

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. А. Добрынина, И. С. Огнев,
А. Я. Пархоменко, М. В. Чистяков

РАДИАЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ И ТЕОРИЯ ПЕРЕНОРМИРОВОК (дополнительные задания)

Учебно-методическое пособие

Ярославль
ЯрГУ
2020

УДК 530.145(075)
ББК 22.31
Д57

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2020 года*

Рецензент
кафедра теоретической физики

Добрынина, Александра Алексеевна.
Д57 Радиационные поправки и теория перенормировок
(дополнительные задания): учебно-методическое посо-
бие / А. А. Добрынина, И. С. Огнев, А. Я. Пархоменко,
М. В. Чистяков; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. —
Ярославль : ЯрГУ, 2020. — 40 с.

В данном учебном пособии рассматриваются допол-
нительные вопросы теории радиационных поправок и пе-
ренормировок в квантовой электродинамике. Материал
представлен в виде задач с подробным решением и ана-
лизом полученных результатов.
Предназначено для студентов, обучающихся по дисци-
плине «Радиационные поправки и теория перенормиро-
вок».

УДК 530.145(075)
ББК 22.31
© ЯрГУ, 2020

1. Метод размерной регуляризации

Задание 1.1. Исходя из инвариантности скалярного интеграла в N -мерном евклидовом пространстве по отношению к выбору начала системы отсчета и преобразованиям вращения, получить соответствующие тензорные интегралы, обращающиеся в ноль.

Решение

При вычислении интегралов в N -мерном (псевдо)евклидовом пространстве пользуются следующими свойствами:

$$\int d^N p C f(p) = C \int d^N p f(p), \quad (1.1)$$

$$\int d^N p [f(k) + g(k)] = \int d^N p f(k) + \int d^N p g(k), \quad (1.2)$$

$$\int d^N p f(p + q) = \int d^N p f(p), \quad (1.3)$$

$$\int d^N p f(\Lambda p) = \int d^N p f(p), \quad (1.4)$$

$$\int d^N p f(Cp) = C^{-N} \int d^N p f(p), \quad (1.5)$$

где C — произвольная константа, q^μ — N -мерный вектор ($\mu = 0, 1, \dots, N-1$ в псевдоевклидовом пространстве и $\mu = 1, \dots, N$ в евклидовом пространстве), независимый от p^μ , и $p'^\mu = \Lambda^\mu_\nu p^\nu$ — вектор, получающийся из p^μ в результате преобразований вращения или Лоренца системы координат. Неявно предполагается, что интегрирование проводится по всему бесконечному N -мерному пространству. В частности, если считать вектор q^μ бесконечно малым и разложить подынтегральное выражение в (1.3) в ряд по q_μ , то получается важное свойство:

$$\int d^N p \frac{\partial f(p)}{\partial p_\mu} = 0. \quad (1.6)$$

Это свойство имеет очень простую интерпретацию — в бесконечном N -мерном пространстве отсутствуют слагаемые, обусловленные деформацией границы области интегрирования. Аналогично, если рассмотреть бесконечно малое преобразование вращения

или Лоренца, то матрица $\Lambda_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}$, где $\omega_{\nu\mu} = -\omega_{\mu\nu}$, и из свойства (1.4) следует интегральное соотношение вида:

$$\int d^N p \left[p^\mu \frac{\partial f(p)}{\partial p_\nu} - p^\nu \frac{\partial f(p)}{\partial p_\mu} \right] = 0. \quad (1.7)$$

Можно также показать, что по свойству (1.5) интегралы, не содержащие размерного параметра, обращаются в ноль. В частности, это выполняется для скалярного интеграла

$$\int \frac{d^N p}{[p^2 - i\delta]^a} = 0 \quad (1.8)$$

для всех $a \neq N/2$. В случае $a = N/2$ значение интеграла может оказаться отличным от нуля и этот случай требует дополнительного исследования.

Задание 1.2. Воспользовавшись свойствами интегралов из предыдущей задачи, найти значения скалярного и векторного интегралов, а также тензорных интегралов 2-го и 3-го рангов.

Решение

В отличие от интегралов, рассмотренных в [1, 2], более приемлемым представляется их немного переопределить таким образом, чтобы их размерность в N -мерном псевдоевклидовом импульсном пространстве оставалась такой же, как и в четырехмерном пространстве. Чтобы достичь этого, можно ввести параметр μ с размерностью массы, и определить скалярный интеграл следующим образом:

$$S_a = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{1}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}, \quad (1.9)$$

где p^μ и ℓ — N -мерный вектор и константа, не зависящие от k . После перехода к новой переменной интегрирования $k'^\mu = k^\mu - p^\mu$ и использования свойства (1.3), интеграл сводится к виду:

$$S_a = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{1}{[k'^2 - \Lambda]^a}, \quad (1.10)$$

где $\Lambda = p^2 + \ell$. Дальнейшее интегрирование удобно проводить в N -мерном евклидовом импульсном пространстве, причем соответствующий переход удобно осуществлять в комплексной плоскости переменной k'_0 , совершив поворот Вика. Такое преобразование эквивалентно заменам: $k'_0 \rightarrow i k'_N$, $k'^2 \rightarrow -k_E'^2$, и $d^N k' \rightarrow$

и $d^N k'_E$, сделав которые в интеграле (1.10), получим выражение (штрих у импульса опускаем):

$$S_a = i\mu^{4-N} \int \frac{d^N k_E}{(2\pi)^N} \frac{(-1)^a}{[k_E^2 + \Lambda]^a}. \quad (1.11)$$

Поскольку подынтегральная функция зависит только от модуля вектора k_E , то интеграл удобно взять в сферической системе координат, причем интегрирование по углам тривиально и дает полный телесный угол N -мерного евклидова пространства:

$$\Omega^{(N)} = \frac{2\pi^{N/2}}{\Gamma(N/2)}, \quad (1.12)$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. После перехода к новой переменной $y = k_E^2$, N -мерный интеграл (1.11) сводится к одномерному виду:

$$S_a = i(-1)^a \mu^{4-N} \frac{\Omega^{(N)}}{2(2\pi)^N} \int_0^\infty \frac{y^{N/2-1} dy}{[y + \Lambda]^a}. \quad (1.13)$$

Вычисление одномерного интеграла труда не представляет и результат, с точностью до размерного множителя $\Lambda^{N/2-a}$, можно записать в форме отношения гамма-функций, а именно:

$$S_a = i(-1)^a \mu^{4-N} \frac{\Omega^{(N)}}{2(2\pi)^N} \frac{\Gamma(N/2) \Gamma(a - N/2)}{\Gamma(a)} \Lambda^{N/2-a}. \quad (1.14)$$

После подстановки телесного угла (1.12) и $\Lambda = p^2 + \ell$ получим окончательное выражение для скалярного интеграла:

$$S_a = (-1)^a \frac{i\mu^{4-N}}{(4\pi)^{N/2}} \frac{\Gamma(a - N/2)}{\Gamma(a)} (p^2 + \ell)^{N/2-a}. \quad (1.15)$$

Оно совпадает с (0.66) из [1] при $\mu = 1$. Найдем также рекуррентное соотношение между скалярными интегралами:

$$S_{a+1} = \left(\frac{N}{2a} - 1 \right) \frac{S_a}{p^2 + \ell}. \quad (1.16)$$

Перейдем теперь к вычислению векторного интеграла

$$V_a^\mu = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{k^\mu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}. \quad (1.17)$$

Сделав переход к новой переменной интегрирования $k'^\mu = k^\mu - p^\mu$ и используя свойство (1.3), сведем интеграл к сумме двух интегралов:

$$V_a^\mu = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu}{[k'^2 - \Lambda]^a} + p^\mu \mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{1}{[k'^2 - \Lambda]^a}, \quad (1.18)$$

где $\Lambda = p^2 + \ell$. Первый интеграл обращается в ноль в силу изотропности пространства в штрихованной системе отсчета (отсутствует выделенное направление, определяемое каким-либо N -мерным вектором), а второй — скалярный интеграл (1.9), поэтому результат очевиден:

$$V_a^\mu = p^\mu S_a. \quad (1.19)$$

С тензорным интегралом

$$T_a^{\mu\nu} = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a} \quad (1.20)$$

вычисление обстоит немного сложнее. Опять сделав переход к $k'^\mu = k^\mu - p^\mu$ и используя (1.3), получим:

$$T_a^{\mu\nu} = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu k'^\nu + p^\mu k'^\nu + k'^\mu p^\nu + p^\mu p^\nu}{[k'^2 - \Lambda]^a}. \quad (1.21)$$

Используя всю ту же аргументацию, что и при вычислении (1.18), легко заметить, что второе и третье слагаемые обращаются в ноль, а четвертое — не что иное, как скалярный интеграл (1.9). В силу изотропности N -мерного пространства в новой системе отсчета, первый интеграл, будучи симметричным тензором второго ранга, пропорционален метрическому тензору $g^{\mu\nu}$:

$$\mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - \Lambda]^a} = \frac{g^{\mu\nu}}{N} \mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^2}{[k'^2 - \Lambda]^a}, \quad (1.22)$$

причем получившийся скалярный интеграл можно выразить через S_a и S_{a-1} как

$$\mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - \Lambda]^a} = \frac{g^{\mu\nu}}{N} (S_{a-1} + \Lambda S_a). \quad (1.23)$$

С учетом рекуррентного соотношения (1.16) получим:

$$\mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - \Lambda]^a} = \frac{g^{\mu\nu}}{N - 2a + 2} \Lambda S_a, \quad (1.24)$$

и после его подстановки в (1.21), интеграл (1.20) примет вид:

$$T_a^{\mu\nu} = \left[p^\mu p^\nu + \frac{(p^2 + \ell) g^{\mu\nu}}{N - 2a + 2} \right] S_a. \quad (1.25)$$

Приведем далее без вывода значение тензорного интеграла третьего ранга:

$$T_a^{\mu\nu\rho} = \mu^{4-N} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}. \quad (1.26)$$

Если в дополнение к вышеизложенному учесть, что

$$\mu^{4-N} \int \frac{d^N k'}{(2\pi)^N} \frac{k'^\mu k'^\nu k'^\rho}{[k'^2 - \Lambda]^a} = 0, \quad (1.27)$$

то интеграл (1.26) можно записать в форме:

$$T_a^{\mu\nu\rho} = \left[4p^\mu p^\nu p^\rho + \frac{p^2 + \ell}{N - 2a + 2} (g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\mu\rho} p^\nu + g^{\nu\rho} p^\mu) \right] S_a. \quad (1.28)$$

Этим мы завершаем сводку требуемых в дальнейшем интегралов.

Простейшие амплитуды, в которых возникают рассмотренные выше интегралы, изображаются двухточечными однопетлевыми диаграммами, содержащими два пропагатора виртуальных частиц. Это соответствует случаю, когда $a = 2$. Если размерность пространства обозначить как $N = 4 - 2\varepsilon$, то скалярный интеграл S_2 можно записать в следующем виде:

$$S_2 = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon)}{(p^2 + \ell)^\varepsilon}. \quad (1.29)$$

В пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при переходе к четырехмерному пространству Минковского, этот интеграл расходится из-за наличия полюса у $\Gamma(\varepsilon)$ в нуле, а именно:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1 + \varepsilon)}{\varepsilon} \simeq \frac{1}{\varepsilon} - \gamma_E + \left[\frac{\pi^2}{6} + \gamma_E^2 \right] \frac{\varepsilon}{2} + \dots, \quad (1.30)$$

где $\gamma_E = 0.577216$ — постоянная Эйлера-Маскерони. Поскольку массовый параметр μ был введен без привязки к конкретной физической величине, то допустимы некоторые его преобразования, в частности, переопределение. Если ввести новый параметр $\tilde{\mu}$ следующим образом:

$$\tilde{\mu}^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}, \quad (1.31)$$

то разложение в ряд по ε интеграла (1.29) будет более простым:

$$S_2 = \frac{i}{(4\pi)^2} e^{\gamma_E \varepsilon} \Gamma(\varepsilon) \left(\frac{\tilde{\mu}^2}{p^2 + \ell} \right)^\varepsilon \simeq \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\frac{1}{\varepsilon} - \ln \frac{p^2 + \ell}{\tilde{\mu}^2} \right]. \quad (1.32)$$

Этот пример наглядно демонстрирует, что переход в N -мерное пространство позволяет сделать интеграл конечным и локализовать особенности, возникающие при переходе к четырехмерному пространству, в виде полюсов по ε . Чтобы сделать обозначения наиболее близкими к [1, 2], введем специальное обозначение для расходящейся при $\varepsilon \rightarrow 0$ части S_2 :

$$P(\tilde{\mu}^2) = \tilde{\mu}^{2\varepsilon} e^{\gamma_E \varepsilon} \Gamma(\varepsilon), \quad S_2 = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{P(\tilde{\mu}^2)}{(p^2 + \ell)^\varepsilon}. \quad (1.33)$$

Введенная функция обладает следующими свойствами:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon P(\tilde{\mu}^2) \rightarrow 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha P(\tilde{\mu}^2) \rightarrow 0, \quad (1.34)$$

для любого $\alpha > 1$.

Амплитуды, описываемые трехточечными петлевыми диаграммами в КЭД, содержат скалярный интеграл S_3 , который посредством рекуррентного соотношения (1.16) сводится к виду:

$$S_3 = \left(\frac{N}{4} - 1 \right) \frac{S_2}{p^2 + \ell} = \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{(4\pi\mu^2)^\varepsilon \Gamma(1 + \varepsilon)}{(p^2 + \ell)^{1+\varepsilon}}, \quad (1.35)$$

причем этот интеграл имеет конечный предел при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$S_3 = \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{p^2 + \ell}. \quad (1.36)$$

Конечность скалярного интеграла в таких диаграммах вовсе не означает, что тензорные интегралы более высоких рангов будут

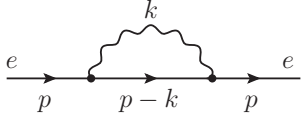


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана процесса $e \rightarrow e$ в однопетлевом приближении

конечными. В частности, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ у тензорного интеграла второго ранга (1.25) при $a = 3$ возникает особенность:

$$T_3^{\mu\nu} = \left[p^\mu p^\nu - \frac{(p^2 + \ell) g^{\mu\nu}}{2\varepsilon} \right] S_3, \quad (1.37)$$

и, чтобы получить правильный результат при его разложении в ряд по ε , требуется учесть линейный по ε член в разложении интеграла (1.35).

Задание 1.3. Вычислить массовый оператор заряженного фермиона в произвольной лоренц-инвариантной калибровке.

Решение

Фиксация калибровки фотона в КЭД лоренц-инвариантным образом реализуется посредством добавления соответствующего члена в лагранжиан неперенормированной КЭД:

$$\Delta \mathcal{L}_{\text{gf}}(x) = -\frac{1}{2a_0} [\partial_\mu A_0^\mu(x)]^2, \quad (1.38)$$

где a_0 — параметр, фиксирующий калибровку. Пропагатор «голо-го» фотона, будучи калибровочно зависимой величиной, с учетом этого слагаемого примет следующий вид:

$$D_{\mu\nu}(k) = \frac{i}{k^2 + i\delta} \left[-g_{\mu\nu} + \xi \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right], \quad (1.39)$$

где $\xi = 1 - a_0$. Массовый оператор электрона $\Sigma(p)$, фейнмановская диаграмма которого изображена на рис. 1, в фейнмановской калибровке $\xi = 0$ ($a_0 = 1$) был вычислен в задаче 1.3 из [1], по-

этому приведем здесь полученное выражение без вывода:

$$\Sigma_0(p) = -\frac{ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ (4m - \hat{p}) \frac{1}{\varepsilon} + \hat{p} - 2m - \right. \quad (1.40)$$

$$\left. -2 \int_0^1 dx (2m - x\hat{p}) \ln \left[\frac{(1-x)m^2 + x\lambda^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right] \right\},$$

где p^μ — четырехмерный импульс фермиона, $e > 0$ — элементарный заряд, Q и m — относительный заряд и масса фермиона, и λ — «масса фотона», которая введена для регуляризации инфракрасной расходимости. Здесь было использовано выражение (1.32) для скалярного интеграла, в котором у параметра $\tilde{\mu}$ была опущена тильда. $\Sigma_0(p)$ отличается от исходного тем, что справедливо для произвольного значения параметра μ и совпадает с (1.22) из [1] при $\mu = m$.

Вычислим теперь аналогичный вклад в массовый оператор от части пропагатора (1.39), зависящей от ξ , который в соответствии с правилами Фейнмана можно записать в виде:

$$\Sigma_\xi(p) = e^2 Q^2 \xi \mu^{4-N} \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{\hat{k}(\hat{p} - \hat{k} + m)\hat{k}}{[(p-k)^2 - m^2 + i\delta](k^2 - \lambda^2 + i\delta)^2}. \quad (1.41)$$

Числитель интеграла можно преобразовать как

$$\hat{k}(\hat{p} - \hat{k} + m)\hat{k} = 2(pk)\hat{k} - k^2(\hat{p} + \hat{k} - m). \quad (1.42)$$

Примем во внимание, что «масса фотона» λ — самый маленький массовый параметр задачи, который введен для регуляризации инфракрасной расходимости на массовой поверхности электрона. Его можно положить равным нулю везде, где это не вызывает вычислительных трудностей. В дальнейшем будем удерживать λ^2 только в знаменателе интеграла и пренебрегать его появлением в числителе. С учетом этих замечаний, $\Sigma_\xi(p)$ можно переписать следующим образом:

$$\Sigma_\xi(p) = e^2 Q^2 \xi \mu^{4-N} \left\{ \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{2(pk)\hat{k}}{[(p-k)^2 - m^2 + i\delta](k^2 - \lambda^2 + i\delta)^2} \right.$$

$$\left. - \int \frac{d^N k}{(2\pi)^N} \frac{\hat{p} + \hat{k} - m}{[(p-k)^2 - m^2 + i\delta](k^2 - \lambda^2 + i\delta)} \right\}. \quad (1.43)$$

Далее воспользуемся параметризацией Фейнмана:

$$\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2 + i\delta](k^2 - \lambda^2 + i\delta)} = \int_0^1 \frac{dx}{[k^2 - 2(k\mathcal{P}) - \ell]^2}, \quad (1.44)$$

$$\frac{1}{[(p-k)^2 - m^2 + i\delta](k^2 - \lambda^2 + i\delta)^2} = \int_0^1 \frac{2(1-x)dx}{[k^2 - 2(k\mathcal{P}) - \ell]^3}, \quad (1.45)$$

где

$$\mathcal{P}^\mu = x p^\mu, \quad \ell = x m^2 - x p^2 + (1-x)\lambda^2 - i\delta, \quad (1.46)$$

и выразим $\Sigma_\xi(p)$ через тензорный, векторный и скалярный интегралы из задания 1.2:

$$\Sigma_\xi(p) = e^2 Q^2 \xi \int_0^1 dx [4(1-x)p_\mu T_3^{\mu\nu} \gamma_\nu - V_2^\mu \gamma_\mu - (\hat{p} - m) S_2]. \quad (1.47)$$

Векторный V_2^μ и тензорный $T_3^{\mu\nu}$ интегралы пропорциональны S_2 :

$$V_2^\mu = \mathcal{P}^\mu S_2, \quad T_3^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \left[g^{\mu\nu} - 2\varepsilon \frac{\mathcal{P}^\mu \mathcal{P}^\nu}{\mathcal{P}^2 + \ell} \right] S_2. \quad (1.48)$$

Подставим их в (1.47), это дает:

$$\Sigma_\xi(p) = -e^2 Q^2 \xi \int_0^1 dx \left\{ 2x\hat{p} - m + 2\varepsilon(1-x) \frac{x^2 p^2}{x^2 p^2 + \ell} \hat{p} \right\} S_2. \quad (1.49)$$

Воспользуемся далее разложением по ε интеграла S_2 (1.32):

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi(p) = & -i\xi \frac{e^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{\hat{p} - m}{\varepsilon} + \int_0^1 \frac{2x(1-x)^2 dx p^2 \hat{p}}{(1-x)m^2 + x\lambda^2 - x(1-x)p^2} - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx [2(1-x)\hat{p} - m] \ln \frac{(1-x)m^2 + x\lambda^2 - x(1-x)p^2}{\mu^2} \right\} \quad (1.50) \end{aligned}$$

Чтобы привести к виду, наиболее близкому (1.40), в интеграле сделана замена $x \rightarrow 1-x$. Выбором схемы перенормировки определяется перенормированное выражение для массового оператора фермиона.

Задание 1.4. Вычислить электромагнитную поправку к массе фермиона в однопетлевом приближении в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировки.

Решение

$\overline{\text{MS}}$ -схема перенормировки, получившая свое название от английского *modified Minimal Subtracted scheme*, заключается в том, что из выражения для массового оператора удаляются все полюса по ε после перехода к новому масштабному параметру $\tilde{\mu}$ (1.31). В результате, оба вклада в массовый оператор фермиона становятся конечными в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. Более того, они не имеют инфракрасной расходимости, поэтому фиктивный параметр — «массу фотона» λ — можно положить равным нулю. В результате, интегрирование по x можно легко выполнить, если воспользоваться следующими табличными интегралами [3]:

$$\int_0^1 dx x^a \ln x = -\frac{1}{(a+1)^2}, \quad (1.51)$$

$$\int_0^1 dx \ln(1-bx) = \frac{b-1}{b} \ln(1-b) - 1, \quad (1.52)$$

$$\int_0^1 dx x \ln(1-bx) = \frac{b^2-1}{2b^2} \ln(1-b) - \frac{b+2}{4b}, \quad (1.53)$$

где $a \geq -1$ и $b < 1$.

Часть массового оператора (1.40), не зависящую от калибровочного параметра ξ , можно привести к виду:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^R(p) = & -\frac{ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{p} \left[\ln \frac{m^2 - p^2}{\mu^2} - \frac{m^4}{(p^2)^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - 1 - \frac{m^2}{p^2} \right] - \right. \\ & \left. - 2m \left[2 \ln \frac{m^2 - p^2}{\mu^2} - \frac{2m^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - 3 \right] \right\}. \quad (1.54) \end{aligned}$$

Это выражение вещественно и справедливо при $p^2 < m^2$.

При $p^2 \geq m^2$ выражение (1.54) следует аналитически продолжить, т.е. учесть, что квадрат массы фермиона имеет мнимую добавку, а именно, $m^2 - i\delta$. Появление мнимой части у массового оператора в этом случае обусловлено поведением логарифмов:

$$\ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2 - i\delta} \right) = \ln \left| 1 - \frac{p^2}{m^2} \right| - 2\pi i \Theta(p^2 - m^2). \quad (1.55)$$

В этом случае $\Sigma_0^R(p)$ можно записать как:

$$\begin{aligned} \Sigma_0^R(p) = & -\frac{ie^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ \hat{p} \left[\ln \frac{p^2 - m^2}{\mu^2} - \frac{m^4}{(p^2)^2} \ln \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) - 1 - \frac{m^2}{p^2} \right] - \right. \\ & - 2m \left[2 \ln \frac{p^2 - m^2}{\mu^2} - \frac{2m^2}{p^2} \ln \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) - 3 \right] - \\ & \left. - 2\pi i \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \left[\hat{p} \left(\frac{m^2}{p^2} + 1 \right) - 4m \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.56)$$

Представляет интерес также предельное выражение для массового оператора ультрарелятивистского фермиона ($m^2 \rightarrow 0$):

$$\Sigma_0^R(p) \simeq -\frac{ie^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ (\hat{p} - 4m) \left[\ln \left| \frac{p^2}{\mu^2} \right| - 2\pi i \Theta(p^2) \right] - \hat{p} + 6m \right\}. \quad (1.57)$$

Зависящая от выбора калибровки часть массового оператора (1.50) при $\lambda \rightarrow 0$ приводится к виду:

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^R(p) = & -i\xi \frac{e^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ 2p^2 \hat{p} \int_0^1 \frac{x(1-x)dx}{m^2 - xp^2} - \right. \\ & \left. - \int_0^1 dx [2x\hat{p} - m] \left[\ln x + \ln \frac{m^2}{\mu^2} + \ln \left(1 - x \frac{p^2}{m^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Если учесть интегралы (1.51)–(1.53), то при $p^2 < m^2$ следует вещественное выражение:

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^R(p) = & -\frac{i\xi e^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ m \left[\ln \frac{m^2 - p^2}{\mu^2} - \frac{m^2}{p^2} \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - 2 \right] - \right. \\ & \left. - \hat{p} \left[\ln \frac{m^2 - p^2}{\mu^2} + \frac{m^2}{p^2} \left[2 - 3 \frac{m^2}{p^2} \right] \ln \left(1 - \frac{p^2}{m^2} \right) - 3 \frac{m^2}{p^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (1.59)$$

а при $p^2 \geq m^2$ оно должно быть аналитически продолжено:

$$\begin{aligned} \Sigma_\xi^R(p) = & -\frac{i\xi e^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ m \left[\ln \frac{p^2 - m^2}{\mu^2} - \frac{m^2}{p^2} \ln \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) - 2 \right] - \right. \\ & - \hat{p} \left[\ln \frac{p^2 - m^2}{\mu^2} + \frac{m^2}{p^2} \left[2 - 3 \frac{m^2}{p^2} \right] \ln \left(\frac{p^2}{m^2} - 1 \right) - 3 \frac{m^2}{p^2} \right] - \\ & \left. - 2\pi i \left(1 - \frac{m^2}{p^2} \right) \left[m - \hat{p} \left(1 + 3 \frac{m^2}{p^2} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Найдем также и для этого вклада предельное выражение в случае $m^2 \rightarrow 0$:

$$\Sigma_\xi^R(p) \simeq \frac{i\xi e^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ (\hat{p} - m) \left[\ln \left| \frac{p^2}{\mu^2} \right| - 2\pi i \Theta(p^2) \right] + 2m \right\}. \quad (1.61)$$

В частности, при $\xi = 1$ сумма (1.57) и (1.61) принимает вид:

$$\Sigma_0^R(p) + \Sigma_\xi^R(p)|_{\xi=1} \simeq \frac{ie^2Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ (\hat{p} - 4m) + 3m \left[\ln \left| \frac{p^2}{\mu^2} \right| - 2\pi i \Theta(p^2) \right] \right\}. \quad (1.62)$$

Задание 1.5. Вычислить anomальную размерность массы в однопетлевом приближении в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировки.

Решение

В представлении взаимодействия лагранжиан КЭД имеет вид:

$$\mathcal{L}_{\text{QED}}(x) = -\frac{1}{4} F_{0\mu\nu}(x) F_0^{\mu\nu}(x) + \bar{\psi}_0(x) [i\hat{D}_0 - m_0] \psi_0(x) + \Delta\mathcal{L}_{\text{gf}}(x), \quad (1.63)$$

где $\psi_0(x)$ и $A_0^\mu(x)$ — «голые» фермионное и фотонное поля соответственно, $F_0^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu A_0^\nu(x) - \partial^\nu A_0^\mu(x)$ — тензор электромагнитного поля, $D_0^\mu \psi_0(x) = [\partial^\mu - iQe_0 A_0^\mu(x)] \psi_0(x)$ — ковариантная производная фермионного поля, m_0 и Q — «голая» масса и относительный заряд фермиона, и $e_0 > 0$ — «голый» элементарный заряд. Определение пропагатора фотона в КЭД, в силу ее калибровочной инвариантности, требует фиксации калибровки фотонного поля на уровне лагранжиана. Представляется удобным добавить такое слагаемое $\Delta\mathcal{L}_{\text{gf}}(x)$, чтобы пропагатор фотона был явно релятивистски ковариантен. Этого можно добиться, воспользовавшись слагаемым вида:

$$\Delta\mathcal{L}_{\text{gf}}(x) = -\frac{1}{2a_0} [\partial_\mu A_0^\mu(x)]^2, \quad (1.64)$$

где a_0 — параметр, фиксирующий калибровку фотона.

Учет взаимодействия с КЭД вакуумом, т. е. радиационных поправок, приводит к перенормировке фермионного и фотонного полей:

$$\psi_0(x) = \sqrt{Z_\psi} \psi(x), \quad A_0^\mu(x) = \sqrt{Z_A} A^\mu(x), \quad (1.65)$$

а также всех параметров теории:

$$m_0 = Z_m m, \quad e_0 = \sqrt{Z_e} e, \quad a_0 = Z_a a, \quad (1.66)$$

где Z_i — перенормировочные константы. Как показано в [4], член, фиксирующий калибровку в лагранжиане КЭД, не приводит к контрчлену в лагранжиане, что достигается тем, что константа перенормировки калибровочного параметра компенсирует перенормировку фотонного поля, т.е., $Z_a = Z_A$. Все остальные константы перенормировки получаются непосредственным вычислением по теории возмущений, в частности, в $\overline{\text{MS}}$ -схеме ряд строится следующим образом:

$$Z_i(\alpha) = 1 + \frac{\alpha}{4\pi} \frac{z_1}{\varepsilon} + \frac{\alpha^2}{(4\pi)^2} \left[\frac{z_{22}}{\varepsilon^2} + \frac{z_{21}}{\varepsilon} \right] + \dots, \quad (1.67)$$

где постоянная тонкой структуры α введена как безразмерный параметр в пространстве произвольной размерности:

$$\frac{\alpha(\mu)}{4\pi} = \left(\frac{\mu^2 e^{\gamma_E}}{4\pi} \right)^{-\varepsilon} Z_\alpha^{-1}(\alpha(\mu)) \frac{e_0^2}{(4\pi)^2}. \quad (1.68)$$

Отметим, что сначала вычисляются физические величины в зависимости от «затравочного» заряда e_0 , а затем e_0^2 заменяется на постоянную тонкой структуры α .

Для нахождения аномальной размерности массы фермиона, требуется доопределить фермионный пропагатор таким образом, чтобы он оставался конечным при учете радиационных поправок. Напомним, что пропагатор невзаимодействующего фермиона имеет вид:

$$S_0(p) = \frac{i(\hat{p} + m_0)}{p^2 - m_0^2} \equiv \frac{i}{\hat{p} - m_0}. \quad (1.69)$$

Радиационные поправки, собранные в массовый оператор фермиона $\Sigma(p)$, приведут к изменению зависимости этого пропагатора от импульса в соответствии с уравнением:

$$S^{-1}(p) = S_0^{-1}(p) - \Sigma(p) = -i(\hat{p} - m_0) - \Sigma(p). \quad (1.70)$$

Из соображений удобства, оператор $\Sigma(p)$ запишем в форме:

$$\Sigma(p) = -i[\hat{p}\Sigma_V(p^2) + m_0\Sigma_S(p^2)], \quad (1.71)$$

после чего точный пропагатор фермиона примет вид:

$$\begin{aligned} S^{-1}(p) &= -i\{\hat{p}[1 - \Sigma_V(p^2)] - m_0[1 + \Sigma_S(p^2)]\} = \\ &= -i[1 - \Sigma_V(p^2)]\left[\hat{p} - m_0 \frac{1 + \Sigma_S(p^2)}{1 - \Sigma_V(p^2)}\right]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

Отметим, что в пропагаторе имеются расходящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ слагаемые, от которых надо избавиться, переопределив волновую функцию и массу фермиона. Этого можно добиться, если на константы перенормировки Z_ψ и Z_m наложить следующие условия:

$$[1 - \Sigma_V(p^2)] Z_\psi \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 - \Sigma_V^R(p^2), \quad \frac{1 + \Sigma_S(p^2)}{1 - \Sigma_V(p^2)} Z_m \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 1 + \frac{\Delta m(p^2)}{m}, \quad (1.73)$$

где учли, что $S(p) = Z_\psi S_R(p)$. Поскольку в $\overline{\text{MS}}$ -схеме подходящим выбором перенормировочных констант (1.67) из выражений удаляются слагаемые $\sim 1/\varepsilon^n$, где $n \geq 1$ — целое, то для определения Z_m и Z_ψ в однопетлевом приближении достаточно знать только слагаемые из массового оператора фермиона (1.40) и (1.50), пропорциональные $1/\varepsilon$:

$$\Sigma^{(\varepsilon)}(p) = \Sigma_0^{(\varepsilon)}(p) + \Sigma_\xi^{(\varepsilon)}(p) = \frac{ie_0^2 Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} [a_0 \hat{p} - (3 + a_0)m_0], \quad (1.74)$$

где сделана замена: $\xi = 1 - a_0$. Сравнив это выражение с (1.71), видно, что

$$\Sigma_V^{(\varepsilon)}(p^2) = -\frac{e_0^2 Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} a_0, \quad \Sigma_S^{(\varepsilon)}(p^2) = \frac{e_0^2 Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon} (3 + a_0). \quad (1.75)$$

После замены квадрата «голового» заряда e_0^2 на $\alpha(\mu)$ (см. (1.68), в котором положили $Z_\alpha(\alpha(\mu)) = 1$ и взяли предел $\varepsilon \rightarrow 0$) и $a_0 \rightarrow a$, получим:

$$\Sigma_V^{(\varepsilon)}(p^2) = -\frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} Q^2 a, \quad \Sigma_S^{(\varepsilon)}(p^2) = \frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} Q^2 (3 + a). \quad (1.76)$$

Теперь не представляет труда найти константы перенормировки из уравнений:

$$[1 - \Sigma_V^{(\varepsilon)}(p^2)] Z_\psi = 1, \quad [1 + \Sigma_S^{(\varepsilon)}(p^2)] Z_\psi Z_m = 1, \quad (1.77)$$

в форме рядов по $\alpha(\mu)$ вида (1.67):

$$Z_\psi(\alpha(\mu)) = 1 - \frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} Q^2 a, \quad Z_m(\alpha(\mu)) = 1 - \frac{\alpha(\mu)}{4\pi\varepsilon} 3Q^2. \quad (1.78)$$

Из полученных выражений видно, что в однопетлевом приближении константа $Z_\psi(\alpha(\mu))$ зависит от выбора калибровки и, например, в калибровке Ландау ($a = 0$) обращается в единицу. В отличие от нее, $Z_m(\alpha(\mu))$ — калибровочно инвариантна.

Заметим, что «голая» масса $m_0 = Z_m(\alpha(\mu)) m(\mu)$ не зависит от параметра μ , поэтому после дифференцирования получим:

$$\frac{dm_0}{d\mu} = Z_m(\alpha(\mu)) \frac{dm(\mu)}{d\mu} + \frac{dZ_m(\alpha(\mu))}{d\mu} m(\mu) = 0. \quad (1.79)$$

Домножив это уравнение на μ и поделив на $Z_m(\alpha(\mu))$, приведем его к виду:

$$\frac{dm(\mu)}{d \ln \mu} + \gamma_m(\alpha(\mu)) m(\mu) = 0, \quad (1.80)$$

в которое входит величина $\gamma_m(\alpha)$, называемая аномальной размерностью массы фермиона:

$$\gamma_m(\alpha(\mu)) = \frac{d \ln Z_m(\alpha(\mu))}{d \ln \mu}. \quad (1.81)$$

Для $\gamma_m(\alpha)$ также возможно представление в форме ряда по α :

$$\gamma_m(\alpha(\mu)) = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_m^{(k)} \left(\frac{\alpha(\mu)}{4\pi} \right)^{k+1}. \quad (1.82)$$

Исходя из определения α (1.68), находим:

$$\frac{d \ln \alpha(\mu)}{d \ln \mu} = -2\varepsilon + \dots, \quad (1.83)$$

что позволяет вычислить первый член ряда (1.82):

$$\gamma_m(\alpha(\mu)) = \gamma_m^{(0)} \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots = 6Q^2 \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots \quad (1.84)$$

После перехода к перенормированным (физическим) полям и параметрам в лагранжиане КЭД возникают дополнительные слагаемые, названные контрчленами [1, 2, 4–8]. Коэффициенты при соответствующих локальных операторах в контрчленах включают в себя формально расходящиеся при $\varepsilon \rightarrow 0$ части петлевых диаграмм. Явный вид контрчленов в схеме перенормировки на массовой поверхности можно найти в [1, 2]. В $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировки контрчлены также можно вычислить, как только перенормировочные константы Z_m и Z_ψ в однопетлевом приближении определены.

Задание 1.6. Вычислить электромагнитную поправку к массе фермиона в однопетлевом приближении в схеме перенормировки на массовой поверхности.

Решение

Электромагнитная поправка к массе в схеме перенормировки КЭД на массовой поверхности определяется как разность:

$$\delta m = m - m_0 = i\Sigma(m), \quad (1.85)$$

в которой при вычислении массового оператора фермиона следует положить $\hat{p} = m$ и $p^2 = m^2$. Из (1.40) и (1.50) получим:

$$i\Sigma(m) = \frac{e^2 Q^2}{(4\pi)^2} m \left[\frac{3}{\varepsilon} + 4 \right], \quad (1.86)$$

причем вклад, пропорциональный фиксирующей калибровке параметру ξ , отсутствует. Это означает, что электромагнитная поправка к массе электрона не зависит от выбора калибровки.

Задание 1.7. Вычислить вершинную функцию электрически заряженного фермиона в однопетлевом приближении в произвольной лоренц-инвариантной калибровке.

Решение

Исходим из определения вершинной функции $\Lambda^\mu(p_1, p_2, q)$ посредством амплитуды перехода $f + \gamma \rightarrow f$ как:

$$\mathcal{M}(f + \gamma \rightarrow f) = ieQ [\bar{u}(p_2) \Lambda^\mu(p_1, p_2, q) u(p_1)] \varepsilon_\mu(q), \quad (1.87)$$

где $e > 0$ — элементарный заряд, Q — относительный заряд фермиона f , $u(p_1)$ и $u(p_2)$ — биспиноры, описывающие начальный и конечный фермионы с одинаковой массой m , четырехмерные импульсы которых p_1^μ и p_2^μ соответственно, и $\varepsilon_\mu(q)$ — вектор поляризации поглощенного фотона с четырехмерным импульсом q^μ , который считается виртуальным, т.е. $q^2 \neq 0$. Будем предполагать, что фермионы находятся на массовой поверхности и для них выполняются условия ($k = 1, 2$)

$$p_k^2 = m^2, \quad (\hat{p}_k + m) u(p_k) = 0. \quad (1.88)$$

В рассматриваемой реакции выполняются законы сохранения энергии и импульса:

$$p_1^\mu + q^\mu = p_2^\mu. \quad (1.89)$$

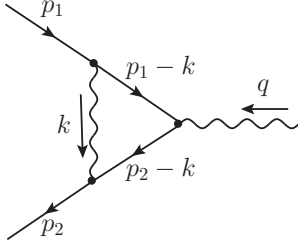


Рис. 2. Диаграмма Фейнмана, описывающая процесс $f + \gamma \rightarrow f$ в однопетлевом приближении. Под f понимается электрически заряженный фермион.

Диаграмма, описывающая процесс $f + \gamma \rightarrow f$ в однопетлевом приближении, изображена на рис. 2. В этом приближении в произвольной лоренц-инвариантной калибровке вершинная функция представляет собой сумму двух слагаемых:

$$\Lambda_\mu(p_1, p_2, q) = \Lambda_\mu^{(0)}(p_1, p_2, q) + \Lambda_\mu^{(\xi)}(p_1, p_2, q), \quad (1.90)$$

что отражает структуру пропагатора фотона (1.39).

Вычисление первого слагаемого $\Lambda_\mu^{(0)}(p_1, p_2, q)$ детально разобрано в задании 1.4 [1], поэтому, опуская детали, приведем здесь только формулы, отражающие основные этапы вычислений. В соответствии с диаграммной техникой КЭД, данная часть вершинной функции может быть записана в форме интеграла:

$$\Lambda_\mu^{(0)} = -e^2 Q^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma_\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \gamma^\nu}{[(p_2 - k)^2 - m^2][(p_1 - k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)}, \quad (1.91)$$

где λ — фиктивная «масса» фотона, которая регулирует инфракрасную расходимость данного интеграла в схеме регуляризации на массовой поверхности фермиона. Воспользовавшись фейнмановской параметризацией, объединим три множителя:

$$\frac{1}{[(p_1 - k)^2 - m^2][(p_2 - k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{2y dx dy}{[k^2 - 2(k\mathcal{P}) - \ell]^3}, \quad (1.92)$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathcal{P}^\mu = y p_1^\mu, \quad p_x^\mu = x p_1^\mu + (1 - x) p_2^\mu, \quad \ell = (1 - y) \lambda^2. \quad (1.93)$$

Так как по условию задачи фермионы находятся на массовой поверхности, то учет уравнений Дирака в амплитуде перехода $f \rightarrow f + \gamma$ позволяет упростить числитель вершинной функции:

$$\Lambda_\mu^{(0)} = -e^2 Q^2 \int_0^1 2y dy \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{(2p_{2\nu} - \gamma_\nu \hat{k}) \gamma_\mu (2p_1^\nu - \hat{k} \gamma^\nu)}{[k^2 - 2(k\mathcal{P}) - \ell]^3}. \quad (1.94)$$

В полученном выражении встречается весь спектр интегралов по импульсу k^μ : скалярный S_3 , векторный V_3^α и тензорный $T_3^{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{1}{y^2 m^2 f(x) + (1 - y) \lambda^2}, \\ V_3^\alpha &= \frac{-i}{2(4\pi)^2} \frac{p_x^\alpha}{y m^2 f(x)}, \\ T_3^{\alpha\beta} &= \frac{-i}{4(4\pi)^2} \left\{ \frac{2p_x^\alpha p_x^\beta}{m^2 f(x)} + g^{\alpha\beta} [-P(\mu^2) + 2 \ln y + \ln f(x)] \right\}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Здесь введена безразмерная функция переменной x , зависящая также от квадрата четырехмерного импульса фотона q^2 :

$$f(x) = 1 - \frac{q^2}{m^2} x(1 - x). \quad (1.96)$$

Наличие λ^2 в знаменателе скалярного интеграла позволяет регуляризовать инфракрасную особенность, возникающую при взятии интеграла по y , а $P(\mu^2)$ в тензорном — ультрафиолетовую расходимость. Подставив интегралы (1.95) в вершинную функцию (1.94) и взяв интеграл по y , получим:

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^{(0)}(p_1, p_2, q) &= \\ &= \frac{-ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left\{ \gamma_\mu \left[P(m^2) - \int_0^1 dx \ln f(x) + 2 \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} - 2 + \right. \right. \\ &+ \left. \left(2 - \frac{q^2}{m^2} \right) \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \left(2 + \ln \frac{\lambda^2}{m^2} - \ln f(x) \right) \right] - \frac{\sigma_{\mu\nu} q^\nu}{m} \int_0^1 \frac{dx}{f(x)} \right\}, \end{aligned} \quad (1.97)$$

где $\sigma_{\mu\nu} = [\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$.

Вычислим теперь второе слагаемое $\Lambda_\mu^{(\xi)}(p_1, p_2, q)$ из (1.89). В соответствие с диаграммной техникой КЭД, данная часть вершинной функции может быть записана как следующий интеграл:

$$\Lambda_\mu^{(\xi)} = e^2 Q^2 \xi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\hat{k} (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \hat{k}}{[(p_2 - k)^2 - m^2][(p_1 - k)^2 - m^2](k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (1.98)$$

Упростим сначала числитель подынтегрального выражения:

$$\begin{aligned} \hat{k} (\hat{p}_2 - \hat{k} + m) \gamma^\mu (\hat{p}_1 - \hat{k} + m) \hat{k} &= \\ &= \left[(m - \hat{p}_2) \hat{k} + 2(p_2 k) - k^2 \right] \gamma^\mu \left[\hat{k} (m - \hat{p}_1) + 2(p_1 k) - k^2 \right] = \\ &= \left[(m - \hat{p}_2) \hat{k} - (p_2 - k)^2 + m^2 \right] \gamma^\mu \left[\hat{k} (m - \hat{p}_1) - (p_1 - k)^2 + m^2 \right]. \end{aligned} \quad (1.99)$$

Здесь использовали, что начальный и конечный фермионы находятся на массовой поверхности ($p_1^2 = p_2^2 = m^2$). Далее, если учесть уравнения Дирака:

$$\bar{u}(p_2) (\hat{p}_2 - m) = 0, \quad (\hat{p}_1 - m) u(p_1) = 0, \quad (1.100)$$

то рассматриваемая часть вершинной функции примет вид:

$$\Lambda_\mu^{(\xi)} = e^2 Q^2 \xi \gamma^\mu \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2 - \lambda^2)^2}. \quad (1.101)$$

В пределе $\lambda \rightarrow 0$ получившийся интеграл не будет содержать параметра с размерностью массы и после перехода в N -мерное пространство он тождественно обращается в ноль:

$$\Lambda_\mu^{(\xi)} = 0. \quad (1.102)$$

Это наглядно демонстрирует, что вершинная функция в случае, когда начальный и конечный фермионы находятся на массовой поверхности, является калибровочно инвариантной величиной.

Задание 1.8. Вычислить вершину взаимодействия трех фотонов в однопетлевом приближении.

Решение

Трехфотонная вершина определяется процессом аннигиляции трех фотонов $3\gamma \rightarrow 0$ и в рассматриваемом приближении изображается двумя трехточечными диаграммами, приведенными на

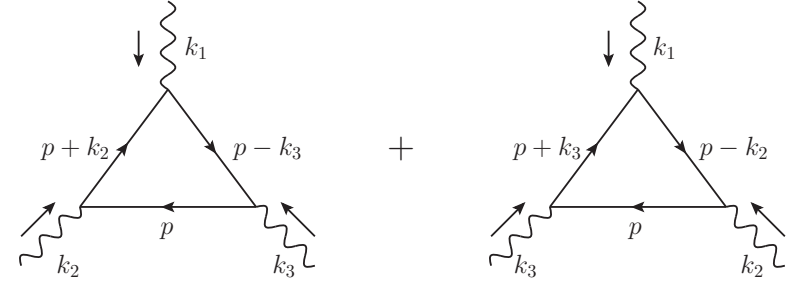


Рис. 3. Диаграммы, описывающие процесс трехфотонной аннигиляции

рис. 3. Используя правила Фейнмана, выпишем амплитуды, соответствующие этим диаграммам:

$$\mathcal{M}_1 = ie^3 Q^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1 [\hat{p} + \hat{k}_2 + m] \hat{\varepsilon}_2 [\hat{p} + m] \hat{\varepsilon}_3 [\hat{p} - \hat{k}_3 + m]\}}{[p^2 - m^2][(p + k_2)^2 - m^2][(p - k_3)^2 - m^2]}, \quad (1.103)$$

$$\mathcal{M}_2 = ie^3 Q^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1 [\hat{p} + \hat{k}_3 + m] \hat{\varepsilon}_3 [\hat{p} + m] \hat{\varepsilon}_2 [\hat{p} - \hat{k}_2 + m]\}}{[p^2 - m^2][(p + k_2)^2 - m^2][(p + k_3)^2 - m^2]}, \quad (1.104)$$

где учтен дополнительный знак минус, возникающий от замкнутой фермионной петли, а также, что заряд фермиона eQ и вектор поляризации i -го фотона $\varepsilon^\mu(k_i) \equiv \varepsilon_i^\mu$.

Преобразуем вторую диаграмму. Сделаем сначала замену импульса интегрирования $p^\mu \rightarrow -p^\mu$:

$$\mathcal{M}_2 = -ie^3 Q^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1 [\hat{p} - \hat{k}_3 - m] \hat{\varepsilon}_3 [\hat{p} - m] \hat{\varepsilon}_2 [\hat{p} + \hat{k}_2 - m]\}}{[p^2 - m^2][(p + k_2)^2 - m^2][(p - k_3)^2 - m^2]}. \quad (1.105)$$

Множители в знаменателе получившегося подынтегрального выражения совпадают с теми, что в амплитуде \mathcal{M}_1 (1.103). Далее воспользуемся матрицей зарядового сопряжения фермионов $C = \gamma^0 \gamma^2$, обладающей следующим свойством [5–8]:

$$C^{-1} C = C C^{-1} = 1, \quad C \gamma_\mu C^{-1} = -\gamma_\mu^T, \quad (1.106)$$

где индекс T у γ -матрицы означает транспонирование. Перепи-

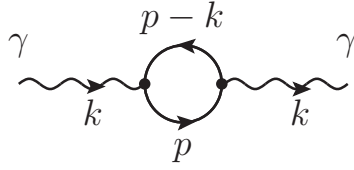


Рис. 4. Диаграмма, дающая вклад в поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении

шем шпур в следующем виде:

$$\begin{aligned}
& \text{Sp}\{C\hat{\varepsilon}_1 C^{-1}C[\hat{p}-\hat{k}_3-m]C^{-1}C\hat{\varepsilon}_3 C^{-1}C[\hat{p}-m]C^{-1} \times \\
& \quad \times C\hat{\varepsilon}_2 C^{-1}C[\hat{p}+\hat{k}_2-m]C^{-1}\} = \\
& = \text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1^T[\hat{p}-\hat{k}_3+m]\hat{\varepsilon}_3^T[\hat{p}+m]\hat{\varepsilon}_2^T[\hat{p}+\hat{k}_2+m]^T\} = \\
& = \text{Sp}\{[\hat{p}+\hat{k}_2+m]\hat{\varepsilon}_2[\hat{p}+m]\hat{\varepsilon}_3[\hat{p}-\hat{k}_3+m]\hat{\varepsilon}_1\} = \\
& = \text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1[\hat{p}+\hat{k}_2+m]\hat{\varepsilon}_2[\hat{p}+m]\hat{\varepsilon}_3[\hat{p}-\hat{k}_3+m]\}. \quad (1.107)
\end{aligned}$$

После подстановки этого шпура в (1.105) получим:

$$\mathcal{M}_2 = -ie^3 Q^3 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Sp}\{\hat{\varepsilon}_1[\hat{p}+\hat{k}_2+m]\hat{\varepsilon}_2[\hat{p}+m]\hat{\varepsilon}_3[\hat{p}-\hat{k}_3+m]\}}{[p^2-m^2][(p+k_2)^2-m^2][(p-k_3)^2-m^2]}. \quad (1.108)$$

Это выражение, с точностью до знака, совпадает с (1.103). Суммарная амплитуда процесса $3\gamma \rightarrow 0$:

$$\mathcal{M}_{if} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 = 0. \quad (1.109)$$

Обращение в ноль этой амплитуды, а значит, и отсутствие не только локальной, но и индуцированной вакуумными эффектами трехфотонной вершины отражает наличие законов сохранения в КЭД, в частности, сохранения P -четности. Более того, в квантовой электродинамике отсутствует любая вершина, содержащая нечетное число фотонов [5–8].

Задание 1.9. Вычислить аномальную размерность волновой функции фотона в однопетлевом приближении в $\overline{\text{MS}}$ -схеме перенормировки.

Решение

Аномальная размерность волновой функции фотона определяется расходящейся частью поляризационного оператора. В низ-

шем порядке теории возмущений по постоянной тонкой структуре α , вклад в поляризационный оператор дает двухточечная однопетлевая диаграмма, изображенная на рис. 4. Данный вклад вычислялся в задании 1.6 [1]. Приведем здесь окончательный результат для этого оператора, обусловленный фермионом с массой m и «голым» зарядом Qe_0 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) &= -\frac{8ie_0^2 Q^2}{(4\pi)^2} k^2 \left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \left(\frac{4\pi\mu^2}{m^2} \right)^\varepsilon \Gamma(\varepsilon) \times \\
& \times \int_0^1 x(1-x) \left[1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right]^{-\varepsilon} dx. \quad (1.110)
\end{aligned}$$

Определим скалярную функцию $\Pi(k^2)$:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}(k) = i k^2 \Pi(k^2) \left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] = i k^2 \Pi(k^2) \mathcal{I}_{\alpha\beta}, \quad (1.111)$$

тогда поперечная часть точного фотонного пропагатора запишется в форме:

$$G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(k) = \frac{-i}{k^2 [1 - \Pi(k^2)]} \mathcal{I}_{\alpha\beta}. \quad (1.112)$$

Скалярная функция $\Pi(k^2)$ расходится в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ и должна быть переопределена таким образом, чтобы поперечная часть перенормированного фотонного пропагатора $G_{R\alpha\beta}^{(\gamma)}(k)$ не имела расходимостей. Воспользуемся определением (1.64) для перенормированного фотонного поля, тогда:

$$G_{\alpha\beta}^{(\gamma)}(k) = Z_A G_{R\alpha\beta}^{(\gamma)}(k). \quad (1.113)$$

С учетом этого соотношения, можно выбрать Z_A так, что у $\Pi(k^2)$ останется только конечная часть $\Pi_R(k^2)$:

$$G_{R\alpha\beta}^{(\gamma)}(k) = \frac{-iZ_A^{-1}}{k^2 [1 - \Pi(k^2)]} \mathcal{I}_{\alpha\beta} = \frac{-i}{k^2 [1 - \Pi_R(k^2)]} \mathcal{I}_{\alpha\beta}. \quad (1.114)$$

Найдем теперь явный вид $\Pi(k^2)$:

$$\Pi(k^2) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha(\tilde{\mu})Q^2}{4\pi\varepsilon} + \Pi_R(k^2), \quad (1.115)$$

где $\tilde{\mu}^2 = 4\pi\mu^2 e^{-\gamma_E}$ и конечная часть имеет вид:

$$\Pi_R(k^2) = \frac{2\alpha(\tilde{\mu})Q^2}{\pi} \int_0^1 x(1-x) \ln \left[\frac{m^2 - x(1-x)k^2}{\tilde{\mu}^2} \right] dx. \quad (1.116)$$

В пределе безмассового фермиона ($m \rightarrow 0$) получим:

$$\Pi_R(k^2) = \frac{\alpha(\tilde{\mu})Q^2}{3\pi} \left[\ln \frac{-k^2}{\tilde{\mu}^2} - \frac{5}{3} \right]. \quad (1.117)$$

Далее, разность в знаменателе пропагатора, с учетом разложения в ряд по α , можно записать как

$$1 - \Pi(k^2) = [1 - \Pi_R(k^2)] \left[1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu)Q^2}{4\pi\varepsilon} \right], \quad (1.118)$$

где опустили тильду у масштабного параметра $\tilde{\mu}$. После подстановки в (1.114), найдем константу перенормировки:

$$Z_A(\alpha(\mu)) = 1 - \frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu)Q^2}{4\pi\varepsilon}. \quad (1.119)$$

В $\overline{\text{MS}}$ -схеме аномальная размерность поля определяется как

$$\gamma_A(\alpha(\mu)) = \frac{d \ln Z_A(\alpha(\mu))}{d \ln \mu}. \quad (1.120)$$

Разложение логарифма в ряд по α дает:

$$\gamma_A(\alpha(\mu)) = -\frac{4}{3} \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon} \frac{d\alpha(\mu)}{d \ln \mu} + \dots = -\frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu)Q^2}{4\pi\varepsilon} \frac{d \ln \alpha(\mu)}{d \ln \mu} + \dots \quad (1.121)$$

Воспользовавшись (1.83), получим:

$$\gamma_A(\alpha(\mu)) = \gamma_A^{(0)} \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \dots = \frac{8}{3} \frac{\alpha(\mu)Q^2}{4\pi} + \dots \quad (1.122)$$

Поскольку «голый» пропагатор явно не зависит от параметра μ , то из соотношения (1.113) следует ренормгрупповое уравнение:

$$\frac{dG_{R\alpha\beta}^{(\gamma)}(k; \mu)}{d \ln \mu} + \gamma_A(\alpha(\mu)) G_{R\alpha\beta}^{(\gamma)}(k; \mu) = 0. \quad (1.123)$$

Это уравнение можно решить, если известна зависимость постоянной тонкой структуры α от μ . Аналогичное ренормгрупповое уравнение можно записать и для параметра, фиксирующего калибровку:

$$\frac{da(\mu)}{d \ln \mu} + \gamma_A(\alpha(\mu)) a(\mu) = 0. \quad (1.124)$$

Решение уравнений (1.123) и (1.124) предоставляется получить читателю самостоятельно.

Приведенное здесь решение в полной мере относится к заряженным лептонам, для которых $Q = -1$. Что касается кварков, то помимо того, что надо отличать верхние и нижние кварки, у которых заряды $Q = 2/3$ и $Q = -1/3$ соответственно, у этих фермионов имеется дополнительное квантовое число — цвет $N_c = 3$, который войдет, как общий множитель, в кварковые вклады в поляризационный оператор, а значит, и в константу перенормировки поля фотона, и в его аномальную размерность.

Задание 1.10. Найти связь между постоянными перенормировки, следующую из тождества Уорда.

Решение

В задании 2.1 из [1] было показано, что вершинная функция и массовый оператор фермиона в однопетлевом приближении удовлетворяют тождеству Уорда:

$$\frac{d\Sigma(p)}{dp_\alpha} = \Lambda^\alpha(p, p, 0), \quad (1.125)$$

или в другой форме:

$$\Sigma(p') - \Sigma(p) = \Lambda^\alpha(p, p', q) q_\alpha, \quad (1.126)$$

где $q^\alpha = p'^\alpha - p^\alpha$ — четырехмерный импульс фотона.

Перепишем теперь это выражение в терминах точных пропагаторов $G^{(e)}(p)$ и $G^{(e)}(p')$, а также точной вершины $\Gamma_\alpha(p, p', q)$:

$$\left[G^{(e)}(p) \right]^{-1} = -i(\hat{p} - m) - \Sigma(p), \quad (1.127)$$

$$\Gamma^\alpha(p, p', q) = \gamma^\alpha - i\Lambda^\alpha(p, p', q). \quad (1.128)$$

С учетом этих определений, получим:

$$\left[G^{(e)}(p) \right]^{-1} - \left[G^{(e)}(p') \right]^{-1} = i\Gamma^\alpha(p, p', q) q_\alpha. \quad (1.129)$$

Точная вершина, как и вершинная функция, содержит ультрафиолетовую расходимость и требует перенормировки, как и точные фермионные пропагаторы:

$$Z_\psi^{-1} \left\{ \left[G_R^{(e)}(p) \right]^{-1} - \left[G_R^{(e)}(p') \right]^{-1} \right\} = i Z_\Gamma \Gamma_R^\alpha(p, p', q) q^\alpha. \quad (1.130)$$

В $\overline{\text{MS}}$ -схеме единственная конечная константа, остающаяся после устранения расходящихся слагаемых из констант перенормировок, — это единица, поэтому из (1.130) следует:

$$Z_\psi Z_\Gamma = 1. \quad (1.131)$$

Это и есть искомое соотношение. Как и (1.126), оно также позволяет контролировать вычисления вершинной функции и массового оператора фермиона в КЭД.

Задание 1.11. Получить ренормгрупповое уравнение, определяющее масштабную зависимость постоянной тонкой структуры $\alpha(\mu)$ в $\overline{\text{MS}}$ -схеме в КЭД.

Решение

В КЭД вершина (1.128) входит в амплитуды физических процессов совместно с зарядом фермиона $e_0 Q$:

$$e_0 Q \Gamma^\alpha(p, p', q) = \sqrt{Z_\alpha} Z_\Gamma Z_\psi \sqrt{Z_A} e(\mu) Q \Gamma_R^\alpha(p, p', q; \mu), \quad (1.132)$$

где в выражение справа введен перенормированный физический заряд $e(\mu)$ и при определении вершины в правой части использованы перенормированные волновые функции фермионов и фотона. Требование конечности правой и левой части дает:

$$\sqrt{Z_\alpha} Z_\Gamma Z_\psi \sqrt{Z_A} = 1 \implies Z_\alpha = Z_A^{-1} (Z_\Gamma Z_\psi)^{-2}. \quad (1.133)$$

Воспользовавшись (1.131) и (1.119), получим:

$$Z_\alpha = Z_A^{-1} = 1 + \frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu) Q^2}{4\pi\epsilon}. \quad (1.134)$$

Из определения (1.68) постоянной тонкой структуры следует:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \ln \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} = -2\epsilon - 2\beta(\alpha(\mu)), \quad (1.135)$$

где введена β -функция КЭД:

$$\beta(\alpha(\mu)) = \frac{1}{2} \frac{d}{d \ln \mu} \ln Z_\alpha(\alpha(\mu)). \quad (1.136)$$

Как и аномальные размерности, рассмотренные ранее, β -функция вычисляется по теории возмущений в виде ряда по $\alpha(\mu)$:

$$\beta(\alpha(\mu)) = \beta_0 \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} + \beta_1 \frac{\alpha^2(\mu)}{(4\pi)^2} + \dots \quad (1.137)$$

Константа Z_α (1.134) позволяет определить β_0 :

$$\beta(\alpha(\mu)) = \frac{1}{2} \frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu) Q^2}{4\pi\epsilon} \frac{d \ln \alpha(\mu)}{d \ln \mu} + \dots = -\frac{4}{3} \frac{\alpha(\mu) Q^2}{4\pi} + \dots, \quad (1.138)$$

где учли -2ϵ из (1.135). Если подставить в уравнение (1.135) первый член разложения β -функции, устремив $\epsilon \rightarrow 0$, то получим:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \frac{\alpha(\mu)}{4\pi} = -2\beta_0 \frac{\alpha^2(\mu)}{(4\pi)^2}, \quad (1.139)$$

или в другом виде:

$$\frac{d}{d \ln \mu} \frac{4\pi}{\alpha(\mu)} = 2\beta_0. \quad (1.140)$$

Решение этого уравнения находится просто:

$$\frac{4\pi}{\alpha(\mu')} - \frac{4\pi}{\alpha(\mu)} = 2\beta_0 \ln \frac{\mu'}{\mu}, \quad (1.141)$$

или в более привычной форме:

$$\alpha(\mu') = \frac{\alpha(\mu)}{1 + 2\beta_0 (\alpha(\mu)/4\pi) \ln (\mu'/\mu)}, \quad (1.142)$$

где $\beta_0 = -4/3$ для заряженных лептонов и $\beta_0 = -4Q^2 N_c/3$ для кварков. В рассматриваемом приближении с увеличением μ' (на некотором маленьком расстоянии) «бегущая» постоянная тонкой структуры имеет полюс. С увеличением расстояния физический заряд частицы уменьшается; такой эффект получил название экранировки заряда.

Задания для самостоятельной работы

1. Доказать формулу (1.8).
2. Доказать формулу (1.12) с помощью N -мерного гауссова интеграла, определенного в евклидовом пространстве.
3. Вычислить поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении в $\overline{\text{MS}}$ -схеме.
4. Найти зависимость массы частицы от масштаба энергии μ .

2. Регуляризация обрезанием импульса

Задание 2.1. Методом обрезания импульса найти значения скалярного и тензорного интегралов, расходящихся логарифмически.

Решение

Суть метода состоит в том, что модуль импульса интегрирования в четырехмерном евклидовом импульсном пространстве ограничивается сверху значением M , т.е. интеграл берется по объему четырехмерного шара $V_M^{(4)}$ радиуса M . В терминах интегральных операторов указанная процедура выглядит так:

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} = i \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \rightarrow i \int_{\Omega^{(4)}} \frac{d\Omega^{(4)}}{(2\pi)^4} \int_0^M k_E^3 dk_E \equiv \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}. \quad (2.1)$$

При вычислении интегралов, требующих замены переменной в форме сдвигки на постоянный вектор, следует учитывать деформацию границы области интегрирования при переходе к новой переменной.

В расчетах однопетлевых диаграмм обычно требуются скалярные, векторные и тензорные интегралы, которые можно разбить на два класса: конечные и ультрафиолетово расходящиеся. Определим эти три типа интегралов:

$$S_a = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}, \quad (2.2)$$

$$V_a^\mu = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}, \quad (2.3)$$

$$T_a^{\mu\nu} = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^a}. \quad (2.4)$$

В наборах скалярных и векторных интегралов, определяемых целым положительным a , при $M \rightarrow \infty$ только два интеграла с $a = 1$ и $a = 2$ расходятся, причем S_1 и V_1^μ — квадратично, а S_2 и V_2^μ — логарифмически, все остальные интегралы — конечны. У тензорных интегралов при $M \rightarrow \infty$ появляются и более сильные расходимости, а именно, $T_1^{\mu\nu}$ пропорционален M^4 , $T_2^{\mu\nu}$ и $T_3^{\mu\nu}$

расходятся квадратично и логарифмически, и, только начиная с $a = 4$, интегралы становятся ультрафиолетово конечными.

В качестве примера приведем два конечных интеграла:

$$S_3 = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - 2(kp) - \ell]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2(p^2 + \ell)}, \quad (2.5)$$

$$V_3^\mu = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - 2(kp) - \ell]^3} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{p^\mu}{2(p^2 + \ell)}, \quad (2.6)$$

где p^μ и ℓ — четырехмерный вектор и скаляр, не зависящие от вектора k .

Начнем вычисления с логарифмически расходящегося интеграла S_2 . При $p^\mu = 0$ вычисление труда не составляет:

$$S_2 = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - \ell]^2} = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{z dz}{[z + \ell]^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{\ell} - 1 \right], \quad (2.7)$$

где $z = k_E^2$. При $p^\mu \neq 0$ вычисление интеграла требует перехода к новой переменной интегрирования $k'^\mu = k^\mu - p^\mu$:

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^2} = \\ &= \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M'^2} \frac{z' dz'}{[z' + p^2 + \ell]^2} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M'^2}{p^2 + \ell} - 1 \right], \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $z' = k_E'^2$. После сдвигки область интегрирования деформировалась, однако ее также можно аппроксимировать шаром радиуса $M' = M + \delta M$, где $\delta M \ll M$. В этом случае

$$\ln M' = \ln M + \ln \left(1 + \frac{\delta M}{M} \right) \simeq \ln M + \frac{\delta M}{M}, \quad (2.9)$$

и, сохранив только расходящиеся и конечные при $M \rightarrow \infty$ члены, запишем значение интеграла (2.8) в следующем виде:

$$S_2 = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - 1 \right]. \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь логарифмически расходящийся тензорный интеграл:

$$T_3^{\mu\nu} = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^3}. \quad (2.11)$$

При $p^\mu = 0$ интеграл вычисляется просто:

$$\begin{aligned} T_3^{\mu\nu} &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - \ell]^3} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{z^2 dz}{[z + \ell]^3} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{\ell} - \frac{3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (2.12)$$

При $p^\mu \neq 0$ для вычисления интеграла нужно сделать замену переменной $k^\mu \rightarrow k'^\mu = k^\mu - p^\mu$:

$$\begin{aligned} T_3^{\mu\nu} &= \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^3} = \\ &= \int_{V_{M'}^{(4)}} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k' + p)^\mu (k' + p)^\nu}{[k'^2 - p^2 - \ell]^3} = \int_{V_{M'}^{(4)}} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'^\mu k'^\nu + p^\mu p^\nu}{[k'^2 - p^2 - \ell]^3} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M'^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right] - \frac{ip^\mu p^\nu}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \frac{z' dz'}{[z' + p^2 + \ell]^3} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right] - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{p^\mu p^\nu}{2(p^2 + \ell)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Здесь учли, что векторный интеграл по k' обращается в ноль.

Задание 2.2. Найти значение векторного интеграла V_2^μ методом обрезания импульса.

Решение

Рассмотрим векторный интеграл:

$$V_2^\mu = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu}{[k^2 - 2(pk) - \ell]^2}. \quad (2.14)$$

При $p^\mu = 0$, по причине отсутствия выделенного направления в пространстве импульсов, этот интеграл обращается в ноль:

$$V_2^\mu = 0. \quad (2.15)$$

При $p^\mu \neq 0$ в пространстве имеется выделенное направление, определяемое этим вектором, по которому и будет направлен интеграл (2.14):

$$V_2^\mu = S_2^{(V)}(p^2) p^\mu, \quad (2.16)$$

где $S_2^{(V)}(p^2)$ — скалярная функция. Непосредственное интегрирование, по аналогии с предыдущей задачей, приводит к неверному результату, поскольку имеется конечный (в пределе $M \rightarrow \infty$)

вклад от деформации границы области интегрирования. Чтобы его учесть, воспользуемся дифференциальным уравнением, связывающим векторный (2.14) и тензорный (2.11) интегралы:

$$\frac{\partial V_2^\mu(p^2)}{\partial p_\nu} = 4T_3^{\mu\nu}(p^2). \quad (2.17)$$

Подставив $V_2^\mu(p^2)$ из (2.16) в это уравнение, получим:

$$g^{\mu\nu} S_2^{(V)} + p^\mu \frac{\partial S_2^{(V)}}{\partial p_\nu} = \frac{i g^{\mu\nu}}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right] - \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{2p^\mu p^\nu}{p^2 + \ell}. \quad (2.18)$$

Искомая функция $S_2^{(V)}$ — структура, стоящая при $g^{\mu\nu}$, и для векторного интеграла (2.16) следует результат:

$$V_2^\mu = \frac{i p^\mu}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right]. \quad (2.19)$$

Этот интеграл также, как и два предыдущие (2.10) и (2.13), расходится логарифмически.

Задание 2.3. Методом обрезания импульса вычислить скалярный и тензорный интегралы, расходящиеся квадратично.

Решение

Квадратично расходящийся скалярный интеграл S_1 имеет вид:

$$S_1 = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - 2(pk) - \ell}. \quad (2.20)$$

При $p^\mu = 0$ вычисление труда не составляет:

$$S_1 = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - \ell} = \frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{z dz}{z + \ell} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[M^2 - \ell \ln \frac{M^2}{\ell} \right], \quad (2.21)$$

где $z = k_E^2$. При $p^\mu \neq 0$ вычисление интеграла требует перехода к новой переменной интегрирования $k'^\mu = k^\mu - p^\mu$ и здесь опять надо учитывать вклад, обусловленный деформацией границы:

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 - 2(pk) - \ell} = \\ &= \frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M'^2} \frac{z' dz'}{z' + p^2 + \ell} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[M'^2 - (p^2 + \ell) \ln \frac{M'^2}{p^2 + \ell} \right], \end{aligned} \quad (2.22)$$

где $z' = k_E'^2$.

По аналогии с тем, как вычислялся векторный интеграл в задании 2.2, здесь также воспользуемся значениями ранее вычисленных интегралов. Легко заметить, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial \ell} = S_2, \quad (2.23)$$

т. е., проинтегрировав S_2 (2.10) по ℓ , получим S_1 с точностью до некоторой функции, зависящей от p^2 :

$$S_1 = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} + g_S(p^2) \right]. \quad (2.24)$$

Значение $g_S(0) = -M^2$ следует из сравнения (2.24) при $p^2 = 0$ с (2.21). Исходя из анализа размерностей, $g_S(p^2) = -M^2 - a_S p^2$, где a_S — безразмерная константа, и S_1 можно записать как:

$$S_1 = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[(p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - M^2 - a_S p^2 \right]. \quad (2.25)$$

Для нахождения a_S воспользуемся еще одним уравнением:

$$\frac{\partial S_1}{\partial p_\alpha} = 2V_2^\alpha, \quad (2.26)$$

где в правой части стоит векторный интеграл, вычисленный в задании 2.2. Взяв производную от (2.25) по p_α и приравняв к удвоенному значению (2.19), получим:

$$\frac{2ip^\alpha}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - 1 - a_S \right] = \frac{2ip^\alpha}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right], \quad (2.27)$$

откуда следует, что $a_S = 1/2$. В итоге, квадратично расходящийся интеграл S_1 примет следующий вид:

$$S_1 = \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[M^2 - (p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} + \frac{p^2}{2} \right]. \quad (2.28)$$

Он отличается последним слагаемым от выражения (27), приведенного в [7] (Дополнение VI).

Вычислим теперь квадратично расходящийся тензорный интеграл:

$$T_2^{\mu\nu} = \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu}{[k^2 - 2(kp) - \ell]^2}. \quad (2.29)$$

При $p^\mu = 0$ его вычисление не вызывает затруднений:

$$\begin{aligned} T_2^{\mu\nu} &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 - \ell]^2} = \\ &= \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{z^2 dz}{[z + \ell]^2} = \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{-i}{(4\pi)^2} \left[M^2 - 2\ell \ln \frac{M^2}{\ell} + \ell \right]. \end{aligned} \quad (2.30)$$

При p^μ отличным от нуля, как и для скалярного интеграла, рассмотренного выше, воспользуемся сначала уравнением, связывающим два тензорных интеграла:

$$\frac{\partial T_2^{\mu\nu}}{\partial \ell} = 2T_3^{\mu\nu}, \quad (2.31)$$

т. е., проинтегрировав удвоенное значение $T_3^{\mu\nu}$ из (2.13) по ℓ , получим $T_2^{\mu\nu}$ с точностью до двух функций, зависящих от p^2 :

$$\begin{aligned} T_2^{\mu\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left[2(p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - (p^2 + \ell) + g_T^{(1)}(p^2) \right] + \\ &+ \frac{i}{(4\pi)^2} p^\mu p^\nu \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} + g_T^{(2)}(p^2) \right]. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Значение $g_T^{(1)}(0) = -M^2$ следует из сравнения (2.32) при $p^\mu = 0$ с (2.30). Исходя из размерностей функций, $g_T^{(1)}(p^2) = -M^2 - a_T^{(1)} p^2$ и $g_T^{(2)}(p^2) = -a_T^{(2)}$, где $a_T^{(1)}$ и $a_T^{(2)}$ — безразмерные константы. С учетом вида этих функций, $T_2^{\mu\nu}$ можно записать как:

$$\begin{aligned} T_2^{\mu\nu} &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left[2(p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - (p^2 + \ell) - M^2 - a_T^{(1)} p^2 \right] + \\ &+ \frac{i}{(4\pi)^2} p^\mu p^\nu \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - a_T^{(2)} \right]. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Чтобы найти константы $a_T^{(1)}$ и $a_T^{(2)}$, продифференцируем $T_2^{\mu\nu}$ по p^ρ , что позволяет получить еще одно уравнение с полностью симметричным тензором $T_3^{\mu\nu\rho}$ в правой части:

$$\frac{\partial T_2^{\mu\nu}}{\partial p_\rho} = 4T_3^{\mu\nu\rho} = 4 \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho}{[k^2 - 2(kp) - \ell]^3}, \quad (2.34)$$

который формально расходится линейно. С учетом свойств симметрии, наиболее общая тензорная структура $T_3^{\mu\nu\rho}$ следующая:

$$T_3^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu + g^{\mu\rho} p^\nu) S_{T_3}^{(1)} + p^\mu p^\nu p^\rho S_{T_3}^{(2)}. \quad (2.35)$$

В изотропном импульсном пространстве ($p^\mu = 0$)

$$T_3^{\mu\nu\rho} = 0. \quad (2.36)$$

Непосредственное вычисление этого интеграла позволяет получить следующие значения скалярных функций:

$$S_{T3}^{(1)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{3}{2} \right], \quad S_{T3}^{(2)} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2(p^2 + \ell)}, \quad (2.37)$$

однако эти выражения не учитывают эффекты, обусловленные деформацией границы области интегрирования, при сдвиге переменной интегрирования.

Для вычисления правильных значений $S_{T3}^{(1)}$ и $S_{T3}^{(2)}$ требуется решить еще одно дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial T_3^{\mu\nu\rho}}{\partial p_\sigma} = 6T_4^{\mu\nu\rho\sigma} = 6 \int_{V_M^{(4)}} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^\mu k^\nu k^\rho k^\sigma}{[k^2 - 2(kp) - \ell]^4}, \quad (2.38)$$

с полностью симметричным тензором $T_4^{\mu\nu\rho\sigma}$, имеющим только логарифмическую расходимость.

После сдвиги переменной интегрирования $k^\mu \rightarrow k'^\mu = k^\mu - p^\mu$ интеграл (2.38) превратится в сумму нескольких слагаемых, каждое из которых будет содержать изотропный интеграл по объему четырехмерного шара радиуса M' . Векторные интегралы, а также тензорные третьего ранга, обращаются тождественно в ноль, и искомый интеграл можно записать в следующем виде:

$$T_4^{\mu\nu\rho\sigma} = T_4'^{\mu\nu\rho\sigma} + p^\mu p^\nu T_4'^{\rho\sigma} + p^\mu p^\rho T_4'^{\nu\sigma} + p^\mu p^\sigma T_4'^{\nu\rho} + p^\nu p^\rho T_4'^{\mu\sigma} + p^\nu p^\sigma T_4'^{\mu\rho} + p^\rho p^\sigma T_4'^{\mu\nu} + p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma S_4', \quad (2.39)$$

причем скалярный S_4' и тензорный $T_4'^{\mu\nu}$ интегралы — конечны, и только $T_4^{\mu\nu\rho\sigma}$ расходится логарифмически. Начнем с конечных интегралов ($M' \rightarrow \infty$):

$$S_4' = \int_{V_{M'}^{(4)}} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k'^2 - p^2 - \ell]^4} = \quad (2.40)$$

$$= \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^\infty \frac{z' dz'}{(z' + p^2 + \ell)^4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{6(p^2 + \ell)^2},$$

$$T_4'^{\mu\nu} = \int_{V_{M'}^{(4)}} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{k'^\mu k'^\nu}{[k'^2 - p^2 - \ell]^4} = \quad (2.41)$$

$$= \frac{-i\pi^2}{(2\pi)^4} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \int_0^\infty \frac{z'^2 dz'}{(z' + p^2 + \ell)^4} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \frac{1}{3(p^2 + \ell)}.$$

Тензорный интеграл четвертого ранга вычисляется аналогично:

$$T_4'^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) S_{T4}^{(0)}, \quad (2.42)$$

$$S_{T4}^{(0)} = \int_{V_{M'}^{(4)}} \frac{d^4 k'}{(2\pi)^4} \frac{(k'^2)^2}{[k'^2 - p^2 - \ell]^4} = \frac{i\pi^2}{(2\pi)^4} \int_0^{M^2} \frac{z'^3 dz'}{(z' + p^2 + \ell)^4} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{11}{6} \right].$$

Собрав все вместе, запишем тензорный интеграл четвертого ранга при $p^\mu \neq 0$ в следующей форме:

$$T_4^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{24} (g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} + g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\nu\rho}) \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{11}{6} \right] - \frac{1}{4} (g^{\mu\nu} p^\rho p^\sigma + g^{\mu\rho} p^\nu p^\sigma + g^{\mu\sigma} p^\nu p^\rho + g^{\nu\rho} p^\mu p^\sigma + g^{\nu\sigma} p^\mu p^\rho + g^{\rho\sigma} p^\mu p^\nu) \times \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{3(p^2 + \ell)} + p^\mu p^\nu p^\rho p^\sigma \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{6(p^2 + \ell)^2}. \quad (2.43)$$

Подстановка тензоров (2.35) и (2.43) в уравнение (2.38) приводит к системе четырех согласованных уравнений на функции $S_{T3}^{(1)}$ и $S_{T3}^{(2)}$ и их производные по p^2 , решения которых следующие:

$$S_{T3}^{(1)} = \frac{i}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{11}{6} \right], \quad S_{T3}^{(2)} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{1}{2(p^2 + \ell)}. \quad (2.44)$$

Сравнение с (2.35) показывает, что $S_{T3}^{(2)}$, как и следовало ожидать, не изменилась, а в логарифмически расходящейся $S_{T3}^{(1)}$ имеется дополнительный вклад, обусловленный деформацией границы области интегрирования.

После подстановки тензоров (2.33) и (2.44) в уравнение (2.34), определяются значения констант $a_T^{(1)}$ и $a_T^{(2)}$:

$$a_T^{(1)} = \frac{2}{3}, \quad a_T^{(2)} = \frac{11}{6}, \quad (2.45)$$

после учета которых в (2.33), получим окончательный результат для квадратично расходящегося тензорного интеграла:

$$T_2^{\mu\nu} = \frac{-i}{(4\pi)^2} \frac{g^{\mu\nu}}{4} \left[M^2 - 2(p^2 + \ell) \ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} + \ell + \frac{5}{3} p^2 \right] + \frac{i}{(4\pi)^2} p^\mu p^\nu \left[\ln \frac{M^2}{p^2 + \ell} - \frac{11}{6} \right]. \quad (2.46)$$

Вывод этого выражения другим методом и в другой метрике можно найти в книге [6]. Теперь можно приступить к расчету конкретных однопетлевых диаграмм.

Задание 2.4. Вычислить массовый оператор фермиона в однопетлевом приближении методом обрезания импульса.

Решение

Массовый оператор фермиона с электрическим зарядом eQ , после применения параметризации Фейнмана, имеет вид:

$$\Sigma^{(2)}(p) = ie^2 Q^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\mu (\hat{p} - \hat{k} + m) \gamma_\mu}{[k^2 - 2x(kp) + x(p^2 - m^2) - (1-x)\lambda^2]^2}. \quad (2.47)$$

Подставив сюда скалярный (2.10) и векторный (2.19) интегралы, получим следующий результат:

$$\Sigma^{(2)}(p) = \frac{e^2 Q^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ (3x - 2) + 4m - \frac{1}{2} \hat{p} + \right. \quad (2.48) \\ \left. + 2[(1-x)\hat{p} - 2m] \ln \frac{M^2}{xm^2 + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2} \right\}.$$

Выражение, входящее в пропагатор фермиона, можно получить из $\Sigma^{(2)}(p)$ вычитанием двух первых членов разложения в ряд вблизи $\hat{p} = m_R$, где m_R — перенормированная масса фермиона:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \Sigma^{(2)}(p) - \Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=m_R} - \frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m_R} (\hat{p} - m_R). \quad (2.49)$$

Первый вычитаемый член легко вычисляется ($\lambda = 0$):

$$\Sigma^{(2)}(p) \Big|_{\hat{p}=m_R} = -\frac{3e^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{m_R^2} + \frac{1}{2} \right]. \quad (2.50)$$

Вычисление второго также особого труда не представляет:

$$\frac{\partial \Sigma^{(2)}(p)}{\partial \hat{p}} \Big|_{\hat{p}=m_R} = -\frac{e^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left[\ln \frac{M^2}{m_R^2} + \frac{9}{2} + 2 \ln \frac{\lambda^2}{m_R^2} \right]. \quad (2.51)$$

Подставив их в (2.49), получим следующее выражение:

$$\Sigma_R^{(2)}(p) = \frac{4e^2 Q^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ [\hat{p} - m_R] \frac{2x(1-x^2)m_R^2}{x^2 m_R^2 + (1-x)\lambda^2} + \right. \quad (2.52) \\ \left. + m_R(1+x) \ln \frac{xm_R^2 + (1-x)\lambda^2 - x(1-x)p^2}{x^2 m_R^2 + (1-x)\lambda^2} \right\}.$$

Данное выражение не содержит ультрафиолетовой расходимости, однако зависит от «массы фотона» λ . Эта зависимость является результатом регуляризации инфракрасной расходимости.

Задание 2.5. Вычислить поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении методом обрезания импульса.

Решение

Поляризационный оператор фотона в однопетлевом приближении, изображенный на рис. 4, обсуждался выше, в задании 1.9. Вычисления методом обрезания импульса, в отличие от метода размерной регуляризации, приводят к значительно более сложному выражению:

$$\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(2)}(k) = -\frac{2ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} \int_0^1 dx \left\{ g_{\alpha\beta} \left[M^2 - m^2 - 4xk^2 + \frac{16}{3} x^2 k^2 \right] + \right. \quad (2.53) \\ \left. + 2k_\alpha k_\beta \left[3x - \frac{11}{3} x^2 \right] + 4x(1-x) [k^2 g_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta] \ln \frac{M^2}{m^2 - x(1-x)k^2} \right\}.$$

Физический смысл имеет только поперечная часть $\mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(2)}(k)$:

$$\mathcal{P}^{(2)}(k^2) = \frac{1}{3} \left[g_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \right] \mathcal{P}_{\alpha\beta}^{(2)}(k), \quad (2.54)$$

и для нее получим:

$$\mathcal{P}^{(2)}(k^2) = -\frac{2ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} \left[M^2 - m^2 - \frac{2}{9} k^2 + \right. \quad (2.55) \\ \left. + 4k^2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \frac{M^2}{m^2 - x(1-x)k^2} \right].$$

После вычитания двух первых членов разложения в ряд по k^2 ,

$$\mathcal{P}_R^{(2)}(k^2) = \mathcal{P}^{(2)}(k^2) - \mathcal{P}^{(2)}(0) - \frac{\partial \mathcal{P}^{(2)}(0)}{\partial k^2} k^2, \quad (2.56)$$

из выражения устраняются все расходящиеся при $M \rightarrow \infty$ члены и оно становится ультрафиолетово конечным:

$$\mathcal{P}_R^{(2)}(k^2) = \frac{8ie^2 Q^2}{(4\pi)^2} k^2 \int_0^1 dx x(1-x) \ln \left[1 - x(1-x) \frac{k^2}{m^2} \right]. \quad (2.57)$$

С точностью до ik^2 , это выражение совпадает с (1.116), в котором надо положить $\tilde{\mu} = m$.

Задания для самостоятельной работы

1. Получить выражение (2.52).
2. Вывести конечную часть $\mathcal{P}_R^{(2)}(k^2)$ в форме (2.57).
3. Вычислить вершинную функцию заряженного фермиона методом обрезания импульса.

Литература

1. Добрынина, А. А. Радиационные поправки и теория перенормировок / А. А. Добрынина, Е. Н. Нарынская. — Ярославль: ЯрГУ, 2015.
2. Михеев, Н. В. Лабораторные задания по курсу «Радиационные поправки и перенормировки в квантовой электродинамике» / Н. В. Михеев. — Ярославль: ЯрГУ, 1990.
3. Прудников, А. П. Интегралы и ряды: в 3 т. Т. 1. Элементарные функции / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. Grozin, A. Lectures on QED and QCD: Practical Calculation and Renormalization of One- and Multi-Loop Feynman Diagrams / A. Grozin. — Singapore: World Scientific, 2007.
5. Берестецкий, В. Б. Квантовая электродинамика / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.
6. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. — М.: Наука, 1981.
7. Боголюбов, Н. Н. Квантовые поля / Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.
8. Пескин, М. Введение в квантовую теорию поля / М. Пескин, Д. Шредер. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

Оглавление

1. Метод размерной регуляризации	3
2. Регуляризация обрезанием импульса	29
Литература	39

Учебное издание

Добрынина Александра Алексеевна
Огнев Игорь Сергеевич
Пархоменко Александр Яковлевич
Чистяков Михаил Валерьевич

Радиационные поправки и теория перенормировок (дополнительные задания)

Учебно-методическое пособие

Компьютерная верстка А. Я. Пархоменко

Подписано в печать 07.02.2020.

Формат 60 × 84/16.

Усл. печ. л. 2,4 Уч.-изд. л. 2,0

Тираж 15 экз. Заказ 004/020.

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском
отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150003, Ярославль, ул. Советская, 14.