МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ИВТ
_______________Д.Ю. Чалый
«_23_»____мая______2023 г.

Рабочая программа дисциплины
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Направление подготовки
09.03.03 Прикладная информатика

Направленность (профиль)
«Информационные технологии в цифровой экономике»

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения
очная

Программа рассмотренана заседании кафедры от 11 апреля 2023 г., протокол № 4

Программа одобрена НМК факультета ИВТ протокол № 6 от 28 апреля 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» являются формирование вероятностного мышления, освоение студентами основных подходов к математической обработке результатов наблюдений и измерений методами теории вероятностей и математической статистики.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» относится к базовой части ОП бакалавриата. При изучении дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» необходим уровень освоения дисциплин «Математический анализ», «Геометрия и алгебра», «Дифференциальные уравнения» не ниже порогового.

Полученные в рамках дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» знания необходимыдля развития навыков решения сложных задач, изученияпрофильных курсов по математике (в том числе продолжения изучения статистических методов в рамках дисциплины «Дополнительные главы математической статистики»), способствуют пониманию особенностей функционирования вероятностных математических моделей.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональныекомпетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности.	ОПК – 1.1Демонстрирует навыки решения типовых задач, выполнения стандартных действий: ОПК – 1.2 Демонстрирует навыки использования основных понятий, концепций, фактов, принципов математики, информатики, естественных наук для решения практических задач, связанных с применением математических и (или) естественных наук.	**Знать:** – основные понятия, теоремы и уравнения теории вероятностей и математической статистики; – точные методы вычислений в теории вероятностей, – метода построения оценок и проверки гипотез в математической статистике. **Уметь:** – находить вероятности сложных событий с использованием свойств вероятностей; – находить условные вероятности событий, вероятности сложных событий с использованием формулы полной вероятности и формулы Байеса; – находить и анализировать числовые характеристики случайных величин, – находить законы распределения зависимых случайных величин,

		– проверять гипотезы с использованием критерия Пирсона, проверять однородность выборок. **Владеть навыками:** – построения рядов распределения, функций, плотностей распределения случайных величин, – генерирования случайных величин с заданным законом распределения, – построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7зач.ед., 252акад.час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Математические основы теории вероятностей	5	8	10				4	Задания для самостоятельной работы
2	Вероятностная зависимость и условная вероятность	5	6	8		2		8	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа №1
3	Случайная величина	5	8	6		2		9,7	Задания для самостоятельной работы
4	Числовые характеристики случайных величин	5	8	6		2		5	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа №2
5	Предельные теоремы	5	6	6		1			Задания для самостоятельной работы, Самостоятельная работа
	Всего за 5 семестр		**36**	**36**		**7**		**28,7**	**Зачет**
6	Непрерывные случай-	6	14	14				10	Контрольная работа№3

	ные величины								
7	Основания математической статистики	6	8	4		2		4	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа№4
8	Методы построения оценок	6	6	8		2		6	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа№5
9	Гипотезы и их проверка	6	4	8		2		9	Задания для самостоятельной работы
	Всего за 6 семестр		**36**	**36**		**7**		**29**	**Экзамен**
	Всего		**72**	**72**		**14**		**57,7**	

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Математические основы теории вероятностей

Интуитивные предпосылки теории вероятностей. Опыт, множество элементарных исходов опыта, событие. Классическое, статистическое, геометрическое определения вероятности. Субъективная вероятность.

Математическое определение вероятности. Алгебра событий, σ-алгебра. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них. Вероятностное пространство как парадигма вероятностного мышления и как корректная математическая модель случайного явления.

События, операции над ними. Вероятность, свойства вероятности.

Раздел 2. Вероятностная зависимость и условная вероятность

Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Причинно-следственная и вероятностная зависимость. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез).

Раздел 3. Случайная величина.

Детализация математической модели случайного явления и концепция случайной величины. Случайная величина как функция от элементарных исходов опыта. Случайная величина как функция, определенная на вероятностном пространстве. Дискретные случайные величины.

Геометрическое распределение. Схема Бернулли и биномиальное распределение. Гипергеометрическое распределение. Простейший поток событий и распределение Пуассона. Векторные случайные величины. Зависимые и независимые случайные величины, условные законы распределения. Функции от случайных величин, преобразование закона распределения при функциональном преобразовании случайных величин.

Раздел 4. Числовые характеристики случайных величин.

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Моменты случайной величины. Мода, медиана, квантиль. Условное математическое ожидание.

Ковариация и коэффициент корреляции двух случайных величин, свойства некоррелированности и независимости.Корреляционная матрица.

Раздел 5. Предельные теоремы.

Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел. Теоремы Хинчина и Чебышёва. Усиленный закон больших чисел. Теорема Пуассона.

Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Эссеена.

Раздел 6. Непрерывные случайные величины.

Функция распределения случайной величины, ее свойства. Абсолютно непрерывные случайные величины, плотность распределения. Локальный смысл плотности. Примеры распределений: равномерное, показательное, нормальное. Числовые характеристики непрерывных случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции.

Векторные случайные величины. Нахождение частных плотностей по общей плотности. Геометрические вероятности. Преобразования непрерывных случайных величин. Суммирование случайных величин, формула свертки. Генерирование величин с заданным законом распределения.

Раздел 7. Основания математической статистики.

Классическая модель математической статистики. Понятие выборки. Оценка как функция выборки. Характеристики выборки: состоятельность, несмещенность. Сравнение оценок.

Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливенко-Кантелли. Эмпирическая плотность распределения (гистограмма).

Раздел 8. Методы построения оценок.

Точечное и интервальное оценивание. Метод наибольшего правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов. Свойства получаемых оценок.

Раздел 9. Гипотезы и их проверка

Статистическая гипотеза, критическая область гипотезы, уровень значимости. Простые и сложные статистические гипотезы. Статистическое решение и решающее правило.

Статистики Колмогорова, Смирнова и Пирсона (хи-квадрат), статистические таблицы. Проверка статистических гипотез о законах распределения: критерии согласия, критерии однородности.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

– для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации, для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами:

программы Microsoft Office (OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232), программы LibreOffice (свободно распространяемое ПО), издательская система LaTeX;

– для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ– Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная:

1. Буре, В. М. Методы прикладной статистики в R и Excel : учебное пособие / В. М. Буре, Е. М. Парилина, А. А. Седаков. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 152 с. — ISBN 978-5-8114-2229-6. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/206042

2. Хуснутдинов, Р. Ш. Сборник задач по курсу теории вероятностей и математической статистики : учебное пособие / Р. Ш. Хуснутдинов. — 2-е изд., испр. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 320 с. — ISBN 978-5-8114-1668-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: https://e.lanbook.com/book/211733

1. Максименко, А. Н., Теория вероятностей: учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с

2. Максименко, А. Н., Теория вероятностей [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по направлениям Прикладная информатика, Фундаментальная информатика и информационные технологии / А. Н. Максименко, Ю. В. Богомолов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 120с – http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20140404.pdf

3. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с

4. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479с

5. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с – http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090405.pdf

6. *Кремер, Н. Ш.* [illegible]

б) дополнительная:

1. Сборник задач по математике : учеб. пособие для втузов / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. В 4 ч. Ч.4. - [3-е изд., перераб. и доп.], М., Физматлит, 2004, 430с

2. Вентцель, Е. С., Теория вероятностей / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 2-е изд., стереотип., М., Наука, 1973, 366с

3. Боровков, А. А., Теория вероятностей : учеб. пособие для втузов / А. А. Боровков. - 2-е изд., перераб. и доп., М., Наука, 1986, 431с

4. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. по-

собие для втузов / В. Е. Гмурман, М., Высшая школа, 2001, 479с
5. Феллер, В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. В 2 т. Т.1, М., Мир, 1984, 527с
6. Феллер, В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения : пер. с англ. В 2 т. Т.2, М., Мир, 1984, 751с

7. Левин, А. Ю., О логике математической статистики : текст лекций по курсу "Дополнительные главы математической статистики" / А. Ю. Левин, В. В. Майоров, М. Л. Мячин. - 2-е изд., перераб. и доп., Ярославль, ЯрГУ, 2003, 44с

8. Гмурман, В. Е., Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие. - 5-е изд., стереотип., М., Высшая школа, 2001, 400с

11. Коваленко, И. Н., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для вузов / И. Н. Коваленко, А. А. Филиппова. - 2-е изд., перераб. и доп., М., Высшая школа, 1982, 256с

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).
2. Конспекты лекций по теории вероятностей и математической статистике (Н.В.Чернова) (http://www.nsu.ru/mmf/tvims/chernova/).
3. Электронно-библиотечная система «Юрайт»(https://urait.ru/).
4. Электронно-библиотечная система «Лань»(https://e.lanbook.com/).

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :
Доцент кафедры дискретного анализа,
к.ф.-м.н. ____________ Ю.В.Богомолов

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика»

Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1. Контрольные задания и иные материалы,используемые в процессе текущей аттестации

Контрольная работа №1 (События и их вероятности)

1. Из множества {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9} наудачу выбрано число q, после чего составлено уравнение $x^2 + 4x + q = 0$. Какова вероятность того, что корни этого уравнения окажутся действительными числами?
2. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?
3. Наудачу выбирается трехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля. Какова вероятность того, что у выбранного числа ровно две одинаковые цифры?
4. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 черные?
5. Три молодых человека сложили в шляпу 10 одинаковые бумажек, одна из которых отмечена крестом. По очереди они вынимают наудачу бумажки, пока кто-нибудь из них не вынет отмеченную. Найти вероятность того, что ее вытащит тот, кто начинает первый.
6. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. Что вероятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет?
7. В первой группе К студентов, во второй - М. В первой группе стипендию всем выдали в наборе 6x50 р. + 4x100р., во второй - в наборе 10x50 р. + 2x100 р. Некий студент , положив стипендию в карман, вынул затем одну ассигнацию; она оказалась достоинством в 50 р. Какова вероятность того, что студент из второй группы?

Ответы и указания к решению контрольной работы №1.

1) 0,5. Указание: записать дискриминант и выяснить, при каких qон неотрицателен.

2) $\frac{A_9^4}{9^4}$ 3) 0,27. Указание: найдите вероятность того, что в числе три одинаковые цифры или вообще нет одинаковых цифр.4) $\frac{C_6^2 C_4^3}{C_{10}^5}$ 5) 0,4 6) Нет. Указание: воспользуйтесь формулой полной вероятности. 7) $\frac{\frac{K}{K+M}\cdot\frac{6}{10}}{\frac{K}{K+M}\cdot\frac{6}{10}+\frac{M}{K+M}\cdot\frac{10}{12}}$. Указание: воспользуйтесь формулой Байеса.

Критерии оценивания контрольной работы №1.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6-7 заданий (без ошибок и недочетов), не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 5 задач или 6 задач, но при отсутствии полных ссылок на используемые факты. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3-4 задания (без грубых ошибок). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой верно выполнено менее 3 задач или 3-4 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №1 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 в части знания основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, умения находить вероятности сложных событий и условных вероятностей с использованием свойств вероятностей, формулы полной вероятности и формулы Байеса. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Контрольная работа №2 (Дискретные случайные величины)

1. Известно, что случайная величина ξ принимает два значения, одно из которых равно 2. Также известно, что M ξ =0.2; D ξ =2.16. Построить таблицу распределения случайной величины ξ .

2.Стрелку выдано 4 патрона, Вероятность поражения мишени первым выстрелом равна 0.2, вторым - 0.5, третьим - 0.7, четвертым - 0.9. Найти математическое ожидание числа израсходованных патронов до поражения мишени.

3. Две клетки с подопытными мышами соединены коридорчиком. В момент начала опыта в первой клетке было 3 мыши, а во второй - 2. В процессе опыта каждая мышь из первой клетки может с вероятностью $\frac{2}{3}$ перебежать в соседнюю, а мышь из второй клетки с вероятностью $\frac{1}{2}$ перебежать в первую. Найти математическое ожидание числа мышей в первой клетке в конце опыта.

4. Имеется 5 ключей, из которых только один подходит к замку. Найдите числовые характеристики случайной величины, равной числу проб при открывании замка, если: а) испробованный ключ в последующих опробованиях не участвует; б) испробованный ключ участвует в последующих опробованиях.

5. В лотерее имеется m_1 выигрышей стоимостью k_1, m_2 выигрышей стоимостью k_2 и т.д., m_n выигрышей стоимостью k_n. Всего билетов N. Какую стоимость билета следует установить, чтобы математическое ожидание выигрыша на один билет равнялось половине его стоимости?

6. Устройство состоит из 10 элементов. Вероятность отказа любого из них за время опыта не зависит от состояния других элементов и равна 0.1. Найти математическое ожидание числа таких опытов, в каждом из которых откажет ровно 3 элемента, если всего произведено 12 независимых опытов.

Ответы и указания к решению контрольной работы №2.

1) Значения –1 и 2 с вероятностями 0,6 и 0,4 соответственно 2) 2,32. Указание: составьте таблицу распределения. 3) 2 4) а) MX = 3, DX = 2. б) MX = 5, DX = 20. Указание: а) составьте таблицу распределения; б): воспользуйтесь характеристиками геометрического распределения. 5) $\dfrac{\frac{1}{N}\sum_i m_i k_i}{\frac{1}{N}\sum_i m_i - \frac{1}{2}}$ 6) $12C_{10}^{3}(0,1)^{3}(0,9)^{7}$.

Критерии оценивания контрольной работы №2.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в одной из многоходовых задач (№№4–6), не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты.
«Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в одной из многоходовых задач (№№4–6). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №2 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятностей; умение находить вероятности сложных событий с использованием свойств вероятностей, умение находить и анализировать числовые характеристики случайных величин; владение навыками построения рядов распределения. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Контрольная работа №3 (Непрерывные случайные величины)

1. Определить, может ли функция $F(x)$ быть функцией распределения некоторой случайной величины (ответ обосновать):

   а) $F(x)=\dfrac{1+|\pi x|-|\pi x-1|}{2}$

   б) $F(x)=\begin{cases}1-e^{-x}, & x\geq 0,\\ 0, & x\in 0\end{cases}$

   в) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ 1+\dfrac{\sin x+1}{x^2+1}, & x>0\end{cases}$

   г) $F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0,\\ \sin x, & 0\in x\leq 5\pi/2,\\ 1, & x>5\pi/2\end{cases}$

2. На сторонах AB и AD единичного квадрата $ABCD$ выбраны точки M и N соответственно. Найти вероятность того, что площадь треугольника MNC не превосходит 1/4.
3. Из отрезка [–2;1] случайным образом взяли 2 числа. Найти вероятность того, что их сумма больше 1, а произведение меньше 1.
4. На двух смежных сторонах (AB и AD) единичного квадрата выбрано по точке. Прямая, проведенная через отмеченные точки, отсекает от квадрата треугольник. Найти функцию и плотность распределения площади отсеченного треугольника.

5. Случайная величина ξ распределена по показательному закону с параметром 2: $F_{\xi}(x)=¿\{0,x\in 0¿¿¿¿$.Найти функцию и плотность распределения случайной величины $\eta=|\xi-2|$.
6. Случайная величина ξ распределена равномерно на отрезке [-π; π]. Найти закон распределения случайной величины $\eta=\cos\xi$.

Ответы и указания к решению контрольной работы №3.

1) а, в, г – не может, в – может 2) $\frac{1-\ln 2}{2}$ 3) 1/18

4) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2x(1-\ln 2x), & 0<x\le 1/2,\\ 1, & x>1/2\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\cup x>1,\\ -2\ln 2x, & 0<x\le 1/2\end{cases}$

5) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ e^{-4}(e^{2x}-e^{-2x}), & 0<x\le 2,\\ 1-e^{-2(2+x)}, & x>2\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 2e^{-4}(e^{2x}+e^{-2x}), & 0<x\le 2,\\ 2e^{-2(2+x)}, & x>2\end{cases}$

6) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le -1,\\ 1-\frac{1}{\pi}\arccos x, & -1<x\le 1,\\ 0, & x>1\end{cases}$

Критерии оценивания контрольной работы №3.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в оставшейся, при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в оставшихся задачах. «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №3 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятностей; умение находить вероятности сложных событий с использованием свойств вероятностей; владение навыками построения функций, плотностей распределения случайных величин. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Контрольная работа №4 (Числовые характеристики случайных величин, предельные теоремы)

1. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $f_\xi(x)=\begin{cases} a(1-x^2), & x\in[-1,1] \\ 0, & x\notin[-1,1]\end{cases}$. Найдите значение параметра *a*, математическое ожидание и дисперсию величины ξ, а также математическое ожидание случайной величины $|\xi|$.
2. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-\pi,\pi]$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\gamma=\cos\xi$.
3. Вероятность того, что лампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наудачу 1000 лампочек. Оцените вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.
4. Несимметричная монета выпадает «орлом» с вероятностью 0,36. Сколько нужно произвести бросаний, чтобы с вероятностью не ниже 0,9 можно было утверждать, что частота выпадения «орла» отличается от вероятности появления этого события не более чем на 0,1?
5. Плотность распределения случайной величины $\xi=(X,Y)$:
$$f(x,y)=\begin{cases} a(x+\sin y), & 0\le x\le 1,\ 0\le y\le \pi/2 \\ 0, & \text{иначе}\end{cases}$$
Найти значение параметра *a*, законы распределения и числовые характеристики компонент *X* и *Y*, определить, являются ли *X* и *Y* зависимыми, найти коэффициент корреляции между *X* и Y.

Ответы и указания к решению контрольной работы №4.

1) $a=3/4;\quad M\xi=0;\quad D\xi=1/5;\quad M|\xi|=3/8$ 2) 0 3) 0,976 4) 63

5) $a=\left(1+\dfrac{\pi}{4}\right)^{-1}$; $f_X(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)^{-1}\left(\dfrac{\pi x}{2}+1\right), & x\in[0,1],\\ 0, & x\notin[0,1]\end{cases}$

$f_Y(y)=\begin{cases}\left(\dfrac{\pi}{4}+1\right)^{-1}\left(\dfrac{1}{2}+\sin y\right), & y\in[0,\pi/2],\\ 0, & y\notin[0,\pi/2]\end{cases}$ Числовые характеристики величин вычисляются аналогично заданию №1. Величины зависимы, так как плотность совместного распределения не равна произведению плотностей компонент.

Критерии оценивания контрольной работы №4.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 5 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены задания №№1–4 и хотя бы наполовину выполнено задание №5 (например, найдены законы распределения компонент и вычислены числовые характеристики), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены задания №№1–4 и нет серьезных продвижений в задании №5, а также за 3 верно решенные задачи из набора №№1–4и конструктивные продвижения в решении задачи №5. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в оставшихся задачах (верно решенная задача №5 при этом засчитывается как две). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 2 заданий.

Контрольная работа №4 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей, точных методов вычислений в теории вероятностей; умение находить и анализировать числовые характеристики случайных величин, умение находить законы распределения зависимых случайных величин; владение навыками построения функций, плотностей распределения случайных величин. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Контрольная работа №5
(Генерирование случайных величин, основы математической статистики)

1. Случайная величина ξ_1 равномерно распределена на отрезке [0,2], ξ_2 равномерно распределена на отрезке [2,7]. ξ_1 и ξ_2 независимы. Найдите закон распределения величины $\xi_1 + \xi_2$.

2. Случайная величина ξ_1 имеет плотность распределения $\begin{cases} ax^2, & x \in [0,3] \\ 0, & иначе. \end{cases}$, ξ_2 имеет плотность распределения $\begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & иначе. \end{cases}$. ξ_1 и ξ_2 независимы. Найдите параметр *a* и закон распределения величины $\xi_1 + \xi_2$.

3. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке [0, 1]. Найти такую функцию $g(x)$, чтобы величина $\gamma = g(x)$ имела функцию распределения: а) $\begin{cases} 0, & x \in 0, \\ \arcsin\frac{\sqrt{x}}{2}, & 0 \leq x \leq 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 0, & x \in 0, \\ 1 - e^{-2x\sqrt{x}} & x \geq 0 \end{cases}$.

4. Случайная величина имеет плотность распределения $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-(x^3-a)^2/2}$. Методом максимального правдоподобия найти оценку параметра *a* по результатам трех наблюдений: 1, 2, 3.

5. Случайная

величина имеет плотность распределения $\begin{cases} \dfrac{xe^{-x/b}}{b^2}, & x \geq 0 \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$. Методом моментов найти оценку параметра bпо результатам четырех наблюдений: 1, 2, 3, 4.

Ответы и указания к решению контрольной работы №5.

1) $$f(z)=\begin{cases}0, & z<2\cup z>9,\\ \dfrac{z-2}{10}, & z\in[2,4),\\ \dfrac{1}{5}, & z\in[4,7),\\ \dfrac{9-z}{10}, & z\in[7,9)\end{cases}$$

2) $a=\dfrac{1}{9}$, $$f(z)=\begin{cases}0, & z<0,\\ \dfrac{1}{9}\left(\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{e^{-2z}}{4}\right), & z\in[0,3),\\ \dfrac{1}{9}e^{-(z-3)}\left(\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{e^{-6}}{4}\right), & z>3\end{cases}$$

3) а) $4\sin^2 x$ б) $\left(-\dfrac{\ln(1-x)}{2}\right)^{2/3}$ 4) 9 5) 1,25.

Критерии оценивания контрольной работы №5.

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, в которой верно выполнены 5 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 4 задачи и есть верные продвижения в оставшейся (например, выполнен из пунктов задания №3 или частично разобраны нетривиальные интервалы в заданиях №№1–2), при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, в которой полностью выполнены 4 заданияили выполнены 3 задания и есть конструктивные продвижения в одной из оставшихся. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил 2–3 задания (без грубых ошибок). «Неудовлетворительно» (2 балла) – ставится за работу, в которой правильно выполнено не более 1 задания или 2–3 задания с большим количеством грубых недочётов.

Контрольная работа №5 позволяет оценивать уровень сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 в следующих компонентах: знание основных понятий, теорем и уравнений теории вероятностей и математической статистики, точных методов вычислений в теории вероятностей, метода построения оценок и проверки гипотез в математической статистике; умение находить законы распределения зависимых случайных величин; владение навыками построения функций, плотностей распределения случайных величин, генерирования случайных величин с заданным законом распределения,построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов. Оценка «отлично», выставленная в соответствии с описанными выше критериями, соответствует высокому уровню сформированности указанной компетенции в рамках описанных компонент, оценка «хорошо» – продвинутому уровню, оценка «удовлетворительно» – базовому уровню, оценка «неудовлетворительно» – соответствующие компоненты компетенции на необходимом уровне не сформированы.

Тестовые вопросы
(для оценки сформированности компетенции на базовом уровне)

1. Пусть вероятность события A равна 0,7. Известно, что если событие A происходит, то происходит и событие B. Что можно заведомо сказать про вероятность события B?
(а) P(B) ≤ 0,7 (б) P(B) ≥ 0,7(в) P(B)= 0,7(г) ничего нельзя сказать.

2. Может ли математическое ожидание случайной величины принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)
(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

3. Из перечисленных свойств математического ожидания подчеркните те, которые верны для всех случайных величин X и Y (считать, что мат. ожидание всех приведённых в вопросе случайных величин существует):
(а) $M(X+Y) = MX + MY$ (б) $M(XY) = MX \cdot MY$ (в) $M(X-Y) = MX - MY$ (г) $M(-X) = MX$.

4. Может ли дисперсия случайной величины принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)
(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

5. Из перечисленных свойств дисперсии подчеркните те, которые верны для всех случайных величин X и Y (считать, что дисперсии всех приведённых в вопросе случайных величин существуют):
(а) $D(X+Y) = DX + DY$ (б) $D(XY) = DX \cdot DY$ (в) $D(X-Y) = DX - DY$ (г) $D(-X) = DX$.

6. Может ли коэффициент корреляций двух случайных величин принимать такие значения? (Укажите все допустимые значения.)
(а) 7 (б) 0 (в) –4 (г) ½ (д) –½

7. Функция $F(x)$ принимает значение 0 при $x<0$, значения $\sin x$при xот 0 до π, значение 1 при $x>\pi$. Эта функция не является функцией распределения случайной величины, так как для неё не выполняются некоторые необходимые свойства. Укажите, какие из приведённых причин для этой функции верны:
(а) Функция распределения должна удовлетворять неравенству $0 \le F(x) \le 1$, а приведённая функция этому неравенству не удовлетворяет.
(б) Функция распределения должна быть нестрого возрастающей, а приведённая функция убывает на некотором промежутке.
(в) Функция распределения всегда непрерывна, а приведённая функция имеет разрыв.
(г) При $x \to +\infty$ функция распределения должна стремиться к 1, а приведённая функция не стремится к 1 при $x \to +\infty$.
(д) При $x \to -\infty$ функция распределения должна стремиться к 0, а приведённая функция не стремится к 0 при $x \to -\infty$.

Верные ответы на тестовое задание:
1б 2абвгд 3ав 4абг 5г 6бгд 7бг

Критерии оценивания заданий:
задание №1: 3 балла за верный ответ, 0 баллов за неверный;
задания №2–3 и №№5–6: 1 балл за каждый верный ответ, –1 балл за каждый неверно указанный ответ, 0 баллов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в тестовом задании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это задание выставляется 0 баллов;
задание №4: 2 балла за верный ответ, –1 балл за каждый неверно указанный ответ, 0 баллов за пропущенный верный ответ, баллы по отдельным пунктам в тестовом задании суммируются, если итоговый балл за тестовое задание отрицателен, то за это задание выставляется 0 баллов.
Итого максимальное суммарное количество баллов: 20.

Критерии оценивания тестовой работы.
Вариант №1 (зачтено/не зачтено): оценка «зачтено» выставляется, если тестируемый набрал не менее 8 баллов, в противном случае оценка «не зачтено».

Вариант №2 (балльная оценка): оценка «отлично» (5 баллов) – тестируемый набрал 17–20 баллов, оценка «хорошо» (4 балла) – тестируемый набрал 13–16 баллов, оценка «удовлетворительно» (3 балла) – тестируемый набрал 8–12 баллов, оценка «неудовлетворительно» (2 балла) – тестируемый набрал 0–7 баллов.

1.2 Список вопросов для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету

(зачет выставляется по результатам выполнения письменной зачетной работы
и краткого собеседования со студентом после его проверки):

События и их вероятности. Вычисление вероятностей.

- Классическое определение вероятностей. Исходы, благоприятные исходы.
- Комбинаторные схемы выбора: размещения, сочетания, перестановки с повторениями и без повторений.
- Свойства событий и вероятностей событий.
- Формула полной вероятности. Формула Байеса.
- Геометрические вероятности (на прямой, на плоскости, в пространстве). Нахождение вероятностей событий.

Дискретные случайные величины, их числовые характеристики.

- Закон распределения случайной величины.
- Стандартные распределения: индикатор события, геометрическое, биномиальное, пуассоновское, гипергеометрическое распределение.
- Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.
- Числовые характеристики стандартных распределений.
- Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
- Формула полного математического ожидания.
- Нахождение вероятностей и вычисление неизвестных параметров с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Примерный вариант зачетной работы

1. Из колоды в 52 карты случайным образом выбирается 4 карты. Найдите вероятность того, что среди них не менее 2 тузов.
2. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. а) Что вероятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет? б) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем последним?
3. Кинотеатр вмещает 730 зрителей. Найдите вероятность того, что хотя бы 3 зрителя родились сегодня.
4. Даны все возможные значения дискретной случайной величиныX: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны $MX = 0{,}1$, $DX = 0{,}89$. Постройте таблицу распределения величины X.
5. Двое игроков бросают по одной игральной кости, пока на кости второго игрока не выпадет значение, большее значения на кости первого игрока. Случайная величина X –

общее количество бросаний кости первого игрока. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайной величины X

6. Случайные величины ξ и η независимы, известны их дисперсии: $D\xi = 3$, $D\eta = 5$. Найдите $\mathrm{cov}(3\xi+\eta-6,\ 3\xi-2\eta+1)$.

Ответы и указания к решению предложенного варианта зачетной работы.

1) $1-\dfrac{C_{48}^4 + C_4^1 C_{48}^3}{C_{52}^4}$ 2) Указание: воспользоваться формулой полной вероятности и формулой Байеса. а) более вероятно, что не попадет; б) Одинаково вероятно. 3) $1-5e^{-2}$ 4) Значения $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ с вероятностями $p_1 = 0.4$, $p_2 = 0.1$, $p_3 = 0.5$ 5) $MX = 2,4$ $DX = 3,36$ 6) 17.

Критерии оценивания зачетной работы.

В практическую часть зачетной работы включается 6 заданий, аналогичных задачам контрольных работ №1 и №2, и позволяет оценивать сформированность профессиональной компетенции ОПК-1 в рамках соответствующих компонент. О высоком уровне сформированности отмеченной компетенции можно сделать вывод в том случае, если в работе верно выполнены 6 заданий (без ошибок и недочетов) или выполнены 5 задач и есть верные продвижения в оставшейся, при этом не содержится грубых ошибок, есть ссылки на используемые теоремы и свойства. Вывод о продвинутом уровне сформированности компетенции делается на основе работы, в которой полностью выполнены 4-5 задач при отсутствии полных ссылок на используемые факты. Если обучающийся правильно выполнил 3 задания (без грубых ошибок) или 2 задания и есть верные продвижения в оставшихся задачах, то делается вывод о базовом уровне сформированности компетенции. В описанных выше случаях обучающемуся выставляется оценка «зачтено».

Если в работеправильно выполнено не более 2 задач или 3 задания с большим количеством грубых недочётов, то делается вывод о недостаточном уровне сформированности отмеченной компетенции и выставляется оценка «не зачтено».

Список вопросов к экзамену:

1. Определения вероятности. События, операции над ними.
2. Аксиоматический подход к определению вероятности, свойства вероятностей
3. Формула включений-исключений. Задача о почтальоне.
4. Условная вероятность. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Независимость событий. Независимость отрицания событий
6. Случайные величины. Примеры дискретных случайных величин: индикатор события, геометрическое, биномиальное, гипергеометрическое и пуассоновское распределение.
7. Математическое ожидание дискретной случайной величины, его свойства. Аддитивность математического ожидания.
8. Математическое ожидание индикатора. Математическое ожидание величины с геометрическим, биномиальным, гипергеометрическим, пуассоновским законом распределения.

9. Независимость случайных величин. Теорема об эквивалентности определений независимости. Независимость функций от независимых случайных величин.
10. Дисперсия случайной величины. Среднеквадратичное отклонение. Свойства. Дисперсия индикатора. Дисперсия величины с геометрическим, пуассоновским законом распределения. Дисперсия суммы случайных величин. Дисперсия величины с биномиальным законом распределения.
11. Математическое ожидание произведения случайных величин. Ковариация случайных величин. Свойства ковариации.
12. Коэффициент корреляции случайных величин. Свойства коэффициента корреляции.
13. Моменты случайной величины, их свойства.
14. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Сходимость по вероятности.
15. Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
16. Условные распределения. Условное математическое ожидание. Формула полного математического ожидания.
17. Функция распределения случайной величины, ее свойства. Непрерывные случайные величины.
18. Плотность распределения случайной величины, ее свойства. Примеры непрерывных случайных величин (равномерное, показательное, нормальное распределения). Нормальное распределение. Его свойства, характеристики.
19. Нахождение частных плотностей по общей плотности.
20. Независимость непрерывных случайных величин. Распределения максимума и минимума из N независимых случайных величин.
21. Локальный смысл плотности.
22. Модель радиоактивного распада атома.
23. Математическое ожидание непрерывных случайных величин. Примеры. Вычислительная функция математического ожидания для непрерывных распределений. Свойства математического ожидания.
24. Дисперсия случайной величины. Ее свойства. Примеры.
25. Дисперсия суммы. Ковариация и коэффициент корреляции. Свойства ковариационной матрицы.
26. Распределение суммы двух независимых случайных величин. Формула свертки.
27. Центральная предельная теорема. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Неравенство Берри-Эссеена.
28. Генерирование случайных величин.
29. Классическая модель математической статистики. Выборки, оценки, их характеристики. Оценки математического ожидания и дисперсии.
30. Выборочное (эмпирическое) распределение. Гистограмма.
31. Методы построения оценок: метод моментов, метод максимального правдоподобия. Сравнение оценок.
32. Интервальные оценки и доверительные интервалы. Построение интервальной оценки для неизвестной вероятности в схеме Бернулли.

33. Гипотезы, их проверка. Критерий Пирсона. $\chi 2$ – распределение, распределение Стьюдента.
34. Выборочный коэффициент корреляции.

Темы практических заданий к экзамену

События и их вероятности. Вычисление вероятностей.

1. Классическое определение вероятностей. Исходы, благоприятные исходы.
2. Комбинаторные схемы выбора: размещения, сочетания, перестановки с повторениями и без повторений.
3. Свойства событий и вероятностей событий.
4. Формула полной вероятности. Формула Байеса.
5. Геометрические вероятности (на прямой, на плоскости, в пространстве). Нахождение вероятностей событий.

Дискретные случайные величины, их числовые характеристики.

6. Закон распределения случайной величины.
7. Стандартные распределения: индикатор события, геометрическое, биномиальное, пуассоновское, гипергеометрическое распределение.
8. Числовые характеристики случайной величины: математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратическое отклонение.
9. Числовые характеристики стандартных распределений.
10. Пуассоновское приближение величины, распределенной по биномиальному закону.
11. Формула полного математического ожидания.
12. Нахождение вероятностей и вычисление неизвестных параметров с использованием интегральной теоремы Муавра-Лапласа.

Непрерывные случайные величины, их числовые характеристики.

13. Непрерывные случайные величины. Примеры непрерывных случайных величин (равномерное, показательное, нормальное распределения).
14. Функция распределения и плотность распределения случайной величины, их свойства.
15. Восстановление функции распределения по плотности распределения.
16. Построение функции распределения с помощью геометрических вероятностей.
17. Построение функции и плотности распределения случайной величины $g(\xi)$ по известной функции или плотности распределения случайной величины ξ.
18. Нахождение числовых характеристик случайной величины: математического ожидания, дисперсии, среднеквадратического отклонения, моментов различных порядков. Нахождение числовых характеристик функции от случайной величины.
19. Нахождение функции и плотности распределения суммы случайных величин.
20. Двумерные случайные величины:
    - Вычисление вероятностей.

- Нахождение частных плотностей компонент случайной величины по плотности совместного распределения.
- Вычисление числовых характеристик компонент.
- Проверка компонент двумерной случайной величины на зависимость.
- Вычисление ковариации и коэффициента корреляции компонент.

21. Генерирование случайной величины с заданным законом распределения из случайной величины с известным законом распределения.

Основы математической статистики

22. Построение оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия и метода моментов.
23. Проверка гипотез с использованием критерия Пирсона.
24. Вычисление выборочного коэффициента корреляции, проверка его значимости.

Пример экзаменационного билета

(2 теоретических вопроса и 2 задачи)

1. Локальный смысл плотности распределения случайной величины.
2. Статистические оценки математического ожидания и дисперсии. Их свойства.
3. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке [a,b]. Найти вероятность: $P(|X\text{-}MX|\geq\sigma_X)$
4. Ножки циркуля, каждая из которых имеет длину 1, раздвинуты на случайный угол φ, равномерно распределенный на отрезке $[0,\pi]$. Найти математическое ожидание расстояния между концами ножек.

Критерии оцениваниязаданий экзаменационного билета

1. Сформулировать теорему о локальном смысле плотности (0,2 балла), доказать её (0,4 балла), уметь дать грамотную интерпретацию и использовать для оценки вероятностей (например, для приблизительного сравнения вероятностей попадания случайной величины в указанные интервалы при известной плотности распределения) (0,4 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 баллов.
2. Сформулировать определения состоятельности (0,1 балла) и несмещенности (0,1 балла) статистической оценки, уметь проинтерпретировать определения (0,1 балла), обосновать состоятельность оценки математического ожидания как выборочного среднего (0,1 балла) и дисперсии как разности среднего по квадратам и квадрата среднего (0,1 балла), доказать несмещенность такой оценки математического ожидания (0,1 балла), показать смещенность такой оценки дисперсии (0,2 балла), предложить способ исправления оценки (0,1 балла), обосновать состоятельность и несмещенность исправленной оценки (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,8–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,5–0,7 баллов.

3. Дать описание (записать плотность и/или функцию распределения) равномерного закона распределения (0,1 балл), вывести или воспользоваться известным значением математического ожидания (0,1 балл) и дисперсии (0,1 балл) случайной величины с таким законом распределения, записать и преобразовать неравенство из задачи (0,1 балл), предложить конкретный вариант дальнейшего нахождения вероятности (0,1 балл) и воспользоваться им для нахождения конкретного значения вероятности (0,4 балла), убедиться в независимости результата от параметров задачи (0,1 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,9–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,8 баллов.

4. Записать закон распределения для угла φ (0,1 балла), вывести зависимость расстояния между концами ножек от угла (0,3 балла), далее либо воспользоваться вычислительной формулой для математического ожидания функции от случайной величины с известным законом распределения (0,6 баллов), либо вывести функцию (0,2) и плотность (0,1 балла) распределения расстояния между концами ножек, после чего по найденной плотности посчитать математическое ожидание (0,3 балла). Задание засчитывается полностью, если выполнено на 0,9–1,0 баллов; засчитывается наполовину, если выполнено на 0,6–0,8 баллов.

Критерии оценивания экзамена, выставления оценки и выводов о сформированности компетенций приведены в параграфах 3.3-3.4 методических рекомендаций преподавателю (раздел 3 рабочей программы курса).

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенцийна различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1. Шкала оцениваниясформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующейтрехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков,полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования,описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компе-тенции	Форма контроля	Этапы форми-рования (№ темы (раздела)	Показатели оценива-ния	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Профессиональные компетенции						
ОПК-1	Контрольные ра-боты (1-5), Самостоятельная работа Задания для до-машней работы по темам № 1–9 Зачет Экзамен	1 – 9	**Знать:** – основные понятия, теоремы и уравнения теории вероятностей и математической стати-стики; – точные методы вы-числений в теории ве-роятностей, – метода построения оценок и проверки гипотез в математиче-ской статистике. **Уметь:** – находить вероятно-сти сложных событий с использованием свойств вероятностей; – находить условные вероятности событий, вероятности сложных событий с использова-нием формулы полной	1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений теории вероятностей и их интерпретация. 2. Вычисление вероят-ностей простых со-бытий в дискретных пространствах ис-ходов, вероятностей сложных событий с использованием основных свойств ве-роятностей.	1. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений теории ве-роятностей и их интерпре-тация. Выполнение основ-ной части математиче-ских выкладок, воспроиз-ведение базовых матема-тических рассуждений в процессе их вывода. 2. Вычисление вероятно-стей простых и сложных событий в дискретных пространствах исходов с использованием комбина-торного подхода к вычис-лению вероятностей, базо-вых свойств событий и ве-роятностей.	1. Воспроизведение основных теорем и соотношений теории вероятностей и их интерпрета-ция. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода. 2. Вычисление вероятностей простых и сложных событий в дискретных пространствах ис-ходов с использованием комби-наторного подхода к вычисле-нию вероятностей, а также пол-ного набора свойств событий и вероятностей.

			вероятности и формулы Байеса; – находить и анализировать числовые характеристики случайных величин, – находить законы распределения зависимых случайных величин, – проверять гипотезы с использованием критерия Пирсона, проверять однородность выборок. **Владеть навыками:** – построения рядов распределения, функций, плотностей распределения случайных величин, – генерирования случайные величины с заданным законом распределения, – построения оценок неизвестных параметров распределения с использованием метода максимального правдоподобия, метода наименьших квадратов, метода моментов.	3. Понимание зависимости и независимости событий, воспроизведение основных свойств. Владение понятием условной вероятности. 4. Воспроизведение основных свойств дискретных случайных величин и их числовых характеристик. Построение законов распределения в дискретных вероятностных пространствах. Вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин по закону распределения.	3. Понимание зависимости и независимости событий, воспроизведение основных свойств и их доказательств. Владение понятием условной вероятности, умение проверять зависимость событий и вычислять условные вероятности в базовых задачах. 4. Воспроизведение основных свойств дискретных случайных величин и их числовых характеристик, обоснование основных свойств. Построение законов распределения в дискретных вероятностных пространствах. Вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин по закону распределения и использованием свойств числовых характеристик. Умение давать вероятностную интерпретацию результатов вычисления.	3. Уверенное понимание зависимости и независимости событий, воспроизведение всех изучаемых свойств и их доказательств. Владение понятием условной вероятности, умение проверять зависимость событий и вычислять условные вероятности в базовых задачах. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе решения задач на данную тему. 4. Воспроизведение основных свойств дискретных случайных величин и их числовых характеристик, обоснование их свойств в полном объёме. Построение законов распределения в дискретных вероятностных пространствах. Вычисление числовых характеристик дискретных случайных величин по закону распределения (в том числе на основе стандартных распределений) и с использованием свойств числовых характеристик. Умение давать вероятностную интерпретацию результатов вычисления.

				5. Воспроизведение основных свойств непрерывных случайных величин и их числовых характеристик. Вычисление числовых характеристик непрерывных случайных величин по закону распределения.	5. Воспроизведение основных свойств непрерывных случайных величин и их числовых характеристик, а также основных свойств. Построение законов распределения непрерывных величин на основе геометрических вероятностей. Вычисление числовых характеристик непрерывных случайных величин по закону распределения, в том числе для величин на основе стандартных распределений. Умение давать вероятностную интерпретацию результатов вычисления.	5. Воспроизведение основных свойств непрерывных случайных величин и их числовых характеристик, а также всех изучаемых свойств. Построение законов распределения непрерывных величин на основе геометрических вероятностей. Преобразование законов распределения величин. Вычисление числовых характеристик непрерывных случайных величин по закону распределения. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение физических и математических рассуждений в процессе решения задач. Умение давать вероятностную интерпретацию результатов вычисления.
				6. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация.	6. Воспроизведение основных понятий, теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация. Выполнение основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их вывода.	6. Воспроизведение основных теорем и соотношений математической статистики и их интерпретация. Выполнение в полном объеме математических выкладок и воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.

				7. Постановка задач точечного оценивания параметров распределения, постановка гипотез согласия и однородности.	7. Постановка задач точечного оценивания параметров распределения, постановка гипотез согласия и однородности. Воспроизведение методов построения точечных оценок и критериев проверки гипотез. Выполнение основной части математических выкладок, воспроизведение базовых математических рассуждений в процессе их вывода.	7. Постановка задач точечного оценивания параметров распределения, постановка гипотез согласия и однородности. Воспроизведение методов построения точечных оценок и критериев проверки гипотез, формулировка и обоснование основных свойств. Выполнение в полном объёме математических выкладок, воспроизведение математических рассуждений в процессе их вывода.

3. Методические рекомендации преподавателюпо процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;

- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2Общие рекомендации по изучению материала курса и подбору заданий

Курс теории вероятностей и математической статистики является одним из важнейших математических курсов для специальности прикладная математика и информатика и относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

Специфика начального этапа изучения теории вероятностей и математической статистике требуют актуализации знаний дискретной математики и комбинаторики на первых практических занятиях. Вместе с тем данный процесс может сопровождаться введением основных вероятностных понятий: случайного события, эксперимента, исхода, частоты, вероятности. На лекциях по элементарной теории вероятностей целесообразно продемонстрировать классические вероятностные опыты, проиллюстрировать основные понятия и решить несколько задач.

Целесообразно подготовить для каждого занятия билеты с задачами (достаточно иметь 2-3 разных варианта). Для первого занятия можно выбрать простые задачи на классификацию событий, частоту, непосредственный подсчет вероятностей, проведение экспериментов. Для второго - взять задачи, где используются теоремы сложения и умножения вероятностей, число сочетаний для непосредственного подсчета вероятностей, а также проводятся эксперименты. При изучении формулы Бернулли можно для иллюстрации рассмотреть ее интерпретацию с помощью так называемых урновых моделей.

Особое внимание следует уделить вопросам, связанным с понятием условной вероятности. Разницу между априорной и апостериорной вероятностью удобно проиллюстрировать на крайних примерах (информация о наступлении события делает гипотезу невозможной либо достоверной) и подтвердить с помощью формулы Байеса. Формулу полной вероятности рекомендуется проиллюстрировать также рассмотрением понятия случайного блуждания (на примере задачи о разорении).

В целом переход от исчисления вероятностей к изучению случайных величин как в первом, так и во втором семестре, происходит по одной схеме: подробный разбор методов вычисления вероятностей события (с помощью комбинаторных свойств для дискретных величин и на примере геометрических вероятностей в случае непрерывных величин), после чего следует обобщение задачи, решение ее в общем виде (построение таблицы распределения или функции распределения случайной величины).

Исследование операций над случайными величинами (преобразование распределений, генерирование случайной величины с заданным законом распределения) целесообразно сопровождать примерами процессов, при моделировании которых используются разнообразные псевдослучайные датчики.

При изучении основ математической статистики следует уделить особое внимание проверке простых гипотез с использованием критерия Пирсона, а также методам построения оценок параметров распределения (метод максимального правдоподобия, метод моментов, метод наименьших квадратов), сопоставляя точность оценок, получаемых с помощью различных методов.

3.3 Форма проведения экзамена по курсу

Студенты и преподаватели вполне отдают себе отчет в том, что еще живо представление об учебном процессе как наборе семестровых аттестационных мероприятий, преодолеваемых в режиме максимальной концентрации, и длительных промежутков между ними, проходящих весьма спокойно и беззаботно, без приложения каких-либо усилий. При этом студенты порой пытаются подтвердить данное представление, а преподаватели стараются такого рода ситуацию сдвинуть с мертвой точки.

Очевидно, формат итоговой (или семестровой) аттестации накладывает определенный отпечаток на то, в каком режиме будет осуществляться работа в течение семестра. В том случае, если интенсивность прикладываемых усилий или успешность продвижения по курсу (возможно, выражаемая в результатах, полученных в ходе промежуточной аттестации) не оказывает большого влияния на характер прохождения итоговых испытаний, то в качестве побочного эффекта это способствует низкой посещаемости занятий, слабой задействованностью студентов в работе в аудитории или дома. Примерно та же картина будет и в том случае, если студент не осознает степени влияния текущих результатов на итоговую аттестацию.

С другой стороны, явным образом оговоренный формат итоговых испытаний с достаточно четко прописанным характером учета текущих результатов при проведении семестровой аттестации (посещаемости, работы на практических семинарских занятиях, результатов промежуточной аттестации, самостоятельной работы вне аудитории, активности работы на лекциях) может поспособствовать увеличению интенсивности работы по ходу семестра, стимулированию самостоятельной работы и активности на аудиторных занятиях, что в итоге выражается в повышении уровня освоения материала курса и, как следствие, повышению успеваемости.

Данные соображения были учтены при разработке формы итоговой аттестации. На экзамене студент получает билет с четырьмя заданиями – два теоретического характера и две задачи – «базовый комплект». Характер работы по ходу семестра «материализуется» в количестве дополнительных предложенных заданий: за активную работу на занятиях, высокие результаты прохождения промежуточных аттестаций (контрольных работ) количество предлагаемых студенту заданий может быть уменьшено, а при слабой работе (низкая посещаемость, слабые результаты или пропуски контрольных работ) – увеличено (возможно, на 2-3). Однако критерии не зависят от количества предложенных заданий, оценка выставляется по следующей схеме: пять минус количество заданий, справиться с которыми не удалось. Таким образом, активная продуктивная работа в течение семестра несколько облегчает прохождение итоговой аттестации, а те, кто своим жизненным стилем избрали упомянутый в эпиграфе принцип, для успешного прохождения экзаменационного испытания вынуждены прикладывать больше усилий.

Стоит отметить, что формат итоговой аттестации, характер учета текущих результатов, а также критерии оценки секретом не являются, абсолютно открыты и прозрачны, и предварительно доносятся до сведения студентов. Это позволяет поддерживать определенный уровень дисциплины и систематическую работу в течение всего семестра, а также повысить «предсказуемость» итоговой оценки, что в какой-то степени стимулирует студентов к ее достижению, мотивирует к освоению курса и положительно влияет на уровень получаемых знаний.

3.4 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

В рамках экзамена выставление оценки и проверки уровня сформированности профессиональной компетенции ОПК-1 производится в соответствии с описанными выше принципами и критериями из раздела 3.3. Оценка «отлично» (обучающийся справился со всеми предложенными экзаменационными заданиями) соответствует высокому уровню сформированности компетенции. Если обучающийся не справился лишь с одним из предложенных заданий, то делается вывод о продвинутом уровне сформированности компетенции и выставляется оценка «хорошо». Оценка «удовлетворительно» и вывод о базовом уровне сформированности компетенции соответствуют ситуации, когда экзаменуемый не справился с двумя предложенными заданиями (и остальные задания выполнены на необходимом уровне). Если обучающийся не справился с тремя или большим количеством экзаменационных заданий, то можно сделать вывод, что компетенция сформирована на уровне ниже порогового, а за экзамен выставляется оценка «неудовлетворительно».

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины
«Теория вероятностей и математическая статистика»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Курс теории вероятностей и математической статистики является одним из важнейших математических курсов для специальности прикладная математика и информатика и относится к числу общих математических и естественно-научных дисциплин в силу отбора изучаемого материала и его важности для подготовки специалиста.

В ходе изучения курса предполагается проведение пяти контрольных работ по следующим темам:

1. Исчисление вероятностей
2. Дискретные случайные величины
3. Непрерывные случайные величины
4. Числовые характеристики случайных величин
5. Элементы математической статистики

В процессе решения контрольных работстуденты должны овладеть практическими навыками по исчислению вероятностей (в том числе с использованием комбинаторных свойств), построения законов распределения дискретных и непрерывных случайных величин, нахождению их числовых характеристик, статистическойобработке и анализу опытных данных, получаемых в ходе проведенияэкспериментальных исследований.

Подробные сведения по данным темам Вы можете найти в книгах изприведенного ниже списка рекомендуемой литературы, где есть ссылки насоответствующие главы и параграфы.

Рекомендуемая литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика : сборник задач / сост. Ю. В. Богомолов, А. Н. Максименко, А. Н. Морозов ; Яросл. гос. ун-т. - 2-е изд., перераб., Ярославль, ЯрГУ, 2009, 110с
2. Гмурман, В. Е., Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие для бакалавров / В. Е. Гмурман. - 12-е изд., М., Юрайт, 2014, 479с

Примеры выполнения заданий контрольных работ

Пример 1. Опыт состоит в бросании игральной кости. Событие A_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) – выпадение i очков; событие A – выпадение четного числа очков, B – выпадение нечетного числа очков, C – выпадение числа очков, кратного трем, и D – выпадение числа очков, большего трех. Выразите события A, B, C и D через A_i, (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6).

Решение. Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает A_2, или A_4, или A_6.Значит$A = A_2 + A_4 + A_6$.Аналогично:$B = A_1 + A_3 + A_5$, $C = A_3 + A_6$и $D = A_4 + A_5 + A_6$.

Пример 2. Сколькими способами можно выбрать четырехзначное число, в десятичной записи которого нет нуля?

Решение.Такие четырехзначные числа можно рассматривать как строки длиной 4, составленные из элементов множества X = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, т.е. как размещения с повторениями из 9 элементов по 4. Поэтому искомое число способов равно: $9^4 = 6561$.

Пример 3. В бригаде 4 женщины и 3 мужчин. Среди членов бригады разыгрываются 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчин?

Решение. Применим схему статистического выбора. Из 7 членов бригады 4 человека можно выбрать C_7^4 = 35 способами, следовательно, число всех элементарных исходов испытания равно 35. Далее, из 4 женщин можно выбрать 2 женщины C_4^2 = 6 способами, а из 3 мужчин можно выбрать 2 мужчин C_3^2 = 3 способами. Тогда число благоприятных случаев будет равно 6 · 3 = 18. Таким образом, $p = \frac{18}{35}$.

Пример 4. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка 0,8, а для второго – 0,6. Стрелки независимо друг от друга сделают по одному выстрелу. Какова вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один из стрелков?

Решение. Введем обозначения: событие А – попадание первого стрелка, событие В – попадание второго стрелка, событие С – попадание хотя бы одного из стрелков. Тогда, очевидно С = А + В, причем события А и В совместны. Следовательно, по формуле (3)

p(C) = p(A) + p)B) – p(AB).

Так как события А и В независимы, то

p(C) = p(A) + p)B) – p(A) p(B).

Учитывая, что p(A) = 0,8, p(B) = 0,6, получаем: p(C) = 0,8 + 0,6 – 0,8 · 0,6 = 0,92.

Пример 5. Найдите наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах, используя условие примера 1, и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Так как np + p = 5 · 0,8 = 4,8 не целое, то k_0 = [4,8] = 4; вероятность $P_5(4)$ находим по формуле Бернулли: $P_5(4) = C_5^4\, 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096$.

Пример 6. По мишени производится 4 независимых выстрела с вероятностью попадания при каждом выстреле p = 0,8. Найти закон распределения дискретной случайной величины x, равной числу попаданий в мишень

Решение. Возможные значения случайной величины x: 0, 1, 2, 3, 4. Соответствующие вероятности вычисляем по формуле Бернулли:

$$p_0 = p(x=0) = C_4^0\, 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016.$$

$$p_1 = p(x=1) = C_4^1\, 0{,}8 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256.$$

$$p_2 = p(x=2) = C_4^2\, 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536.$$

$$p_3 = p(x=3) = C_4^3\, 0{,}8^3 \cdot 0{,}2 = 0{,}4096.$$

$$p_4 = p(x=4) = C_4^4\, 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 0{,}4096.$$

Закон распределения x представится таблицей:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Проверка: 0,0016 + 0,0256 + 0,1536 + 0,4096 + 0,4096 = 1.

Пример 7. Дана функция

$F(x) \doteq$ ¿{ $\frac{-}{2}$,¿¿¿

0, *если*

$x \le 0$,¿

$\sin x$,

если $0 \in$

$x \le$

Является ли функция F(x) функцией распределения некоторой случайной величины?

В случае положительного ответа найдите $p\left(\frac{\pi}{6} \le x \in \frac{\pi}{3}\right)$. Построить график функции F(x).

Решение. Для того чтобы наперед заданная функция F(x) являлась функцией распределения некоторой случайной величины x, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (характеристических свойств функции распределения):

1. F(x) – неубывающая функция.

$\lim F(x) =$ 1· $x \to \infty$,

2

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

3. При любом $x \in R$ $F(x-0) = F(x)$.

Для заданной функции F(x) выполнение этих условий очевидно. Значит, F(x) – функция распределения.

Вероятность $p\left(\frac{\pi}{6} \le x \in \frac{\pi}{3}\right)$ вычисляем по формуле:

$$p\left(\frac{\pi}{6} \le x \in \frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Пример 8. Дана функция

$$F(x) = ¿\{0, если x \le 0, ¿\{0,2, если 0 \in x \le 1, ¿\{0,1x, если 1 \in x \le 3, ¿¿¿$$

Является ли F(x) функцией распределения случайной величины?

Решение. Легко заметить, что F(1) = 0,2 > 0,11 = F(1,1). Следовательно, F(*x*) не является неубывающей, а значит, не является функцией распределения случайной величины. Заметим, что остальные два свойства для данной функции справедливы.

Пример 9. Дана функция

$$f(x) = ¿\{0,\ если\ x \leq 0,¿¿¿$$

При каком значении постоянной *a* функция *f*(*x*) является плотностью вероятности некоторой случайной величины **x**? Найдите функцию распределения F(*x*) величины x? Вычислите вероятность попадания случайной величины x в промежуток [0; 1] двумя способами: при помощи плотности вероятности *f*(*x*) и при помощи функции распределения F(*x*).

Решение. Прежде всего должно быть *a*≥ 0. Для нахождения значения *a* запишем условие (3) и преобразуем его: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \int_{-\infty}^{\infty} a\, e^{-\alpha x} dx = 1,\ \frac{a}{\alpha} e^{-\alpha x}\Big|_0^{\infty} = 1,$

$$\frac{a}{\alpha} = 1$$

Следовательно, *a* = α и функция *f*(*x*) имеет вид:

$$f(x) = ¿\{0,\ если\ x \leq 0,¿¿¿$$

Найдем функцию распределения F(*x*):

если *x*≤ 0, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\, dt = 0;$

если *x*> 0, то $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0\ dt + \int_{0}^{x} \alpha\ e^{-\alpha t} dt = 1 - e^{-\alpha x}$.

Следовательно, $F(x) = ¿\{0,\ если\ x \leq 0,¿¿¿$

Вычислим вероятность P(0 ≤**x**≤ 1) : $P(0 \leq x \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \alpha\, e^{-\alpha x} dx = 1 - \frac{1}{e^{\alpha}}$.

Пример 10.Случайная величина X имеет плотность распределения (показательный закон распределения):

$$f(x) = ¿\{0,\ если\ x \in 0,\ ¿¿¿¿$$

Найдите математические ожидания величин **X** и **y** = 2**X**^{2} +3.

Решение. Имеем:

$$MX = \int_0^\infty x\,\alpha\,e^{-\alpha x}\,dx = -x e^{-\alpha x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}.$$

$$MY = \int_0^{\infty} (2x^2+3)\,\alpha\, e^{-\alpha x}\,dx = \frac{3\alpha^2+4}{\alpha^2}.$$