

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра компьютерных сетей

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 24 » мая 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
«Уравнения математической физики»

**Направление подготовки**  
01.03.02 Прикладная математика и информатика

**Направленность (профиль)**  
«Программирование и технологии искусственного интеллекта»

**Квалификация выпускника**  
Бакалавр

**Форма обучения**  
очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 22 марта 2022 г.,  
протокол № 7

Программа одобрена НМК  
факультета ИВТ  
протокол № 6 от  
18 апреля 2022 г.

Ярославль

### 1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Уравнения математической физики» являются приобретение знаний и умений в соответствии с ФГОС ВПО, овладение методами решения типичных задач для уравнений математической физики, развитие способности применять эти методы в профессиональной и прикладной деятельности. Дисциплина должна давать представление о месте и роли уравнений математической физики в современном мире.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Уравнения математической физики» относится к обязательной части ОП бакалавриата.

Для освоения данной дисциплиной студенты должны изучить такие предметы, как «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Комплексный анализ», «Функциональный анализ», «Дифференциальные уравнения».

Полученные в рамках дисциплины «Уравнения математической физики» знания необходимы для развития навыков решения сложных задач, расширения предметной области в профессиональной деятельности, повышения математической культуры.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК – 3 Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	ОПК – 3.1 Владеет знаниями в области теории и методологии математического моделирования;  ОПК – 3.2 Демонстрирует умение собирать и обрабатывать данные для построения математических моделей, расчетов и конкретных практических выводов;  ОПК – 3.3 Демонстрирует понимание и умение применять на практике математические модели и компьютерные технологии для решения различных задач в области профессиональной деятельности	Знать: – классификацию линейных уравнений второго порядка, постановку задач для типичных уравнений в различных областях;  Уметь: – решать задачи для волнового уравнения на прямой, полупрямой, отрезке, решать задачи для уравнения теплопроводности, задачи для уравнения Лапласа;  Владеть навыками: – исследования и решения различных задач для уравнений математической физики.

### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зач.ед., 144 акад.час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)	
			Контактная работа							
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа		
1.	<b>Раздел 1.</b> Классификация линейных уравнений второго порядка	6	4	13,5		1		2	Контрольная	работа №1.
2.	<b>Раздел 2.</b> Уравнения гиперболического типа	6	10	13,5		3		2	Контрольная Контрольная Индивидуальное задание №1.	работа №2. работа №3. задание №1.
3.	<b>Раздел 3.</b> Уравнения параболического типа	6	10	13,5		3		2	Контрольная	работа №4.
4.	<b>Раздел 4.</b> Уравнения эллиптического типа	6	12	13,5		3		1	Контрольная	работа №5. Индивидуальное задание №2.
	<b>Всего за 6 семестр</b>		<b>36</b>	<b>54</b>		<b>11</b>		<b>7</b>	<b>Экзамен</b>	
	<b>Всего</b>		<b>36</b>	<b>54</b>		<b>11</b>		<b>7</b>		

#### Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Классификация линейных уравнений второго порядка.

- 1.1. Уравнение характеристик для линейного уравнения второго порядка.
- 1.2. Приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду.
- 1.3. Канонические формы линейных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Раздел 2. Уравнения гиперболического типа.

- 2.1. Вывод уравнения колебаний струны.
- 2.2. Постановка и решение задачи для уравнения колебаний струны на бесконечной прямой. Формула Даламбера.
- 2.3. Корректность задачи для уравнения колебаний струны на бесконечной прямой.
- 2.4. Решение задачи для неоднородного уравнения колебаний струны на прямой.
- 2.5. Задачи для уравнения колебаний струны на полупрямой. Метод продолжений.

- 2.6. Задачи для уравнения колебаний струны на отрезке. Метод разделения переменных.
- 2.7. Обоснование метода разделения переменных уравнения колебаний струны.
- 2.8. Решение задачи для неоднородного уравнения колебаний струны на отрезке. Функция влияния сосредоточенного импульса.
- 2.9. Задачи для уравнения колебаний струны с неоднородными краевыми условиями.

### Раздел 3. Уравнения параболического типа.

- 3.1. Вывод уравнения теплопроводности.
- 3.2. Постановка задач для уравнения теплопроводности.
- 3.3. Принцип максимума.
- 3.4. Единственность решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Непрерывная зависимость от начального и краевых условий.
- 3.5. Метод разделения переменных решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности.
- 3.6. Обоснование метода разделения переменных для уравнения теплопроводности.
- 3.7. Решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. Функция источника.
- 3.8. Задачи для уравнения теплопроводности с неоднородными краевыми условиями.
- 3.9. Уравнение теплопроводности на бесконечной прямой.
- 3.10. Уравнение теплопроводности на полупрямой.

### Раздел 4. Уравнения эллиптического типа.

- 4.1. Задачи, приводящие уравнению Лапласа и Пуассона. Постановка краевых задач.
- 4.2. Уравнение Лапласа в криволинейной системе координат.
- 4.3. Фундаментальные решения уравнения Лапласа.
- 4.4. Формулы Грина.
- 4.5. Теоремы о среднем и принцип максимума для гармонических функций.
- 4.6. Единственность и устойчивость решений задачи Дирихле для уравнения Лапласа.
- 4.7. Единственность решения задачи Неймана.
- 4.8. Решение задачи Дирихле в круге методом разделения переменных.
- 4.9. Обоснование метода разделения для решения задачи Дирихле в круге.
- 4.10. Интеграл Пуассона.
- 4.11. Функция источника.

## **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная

информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное решению конкретных задач и закреплению полученных на лекции знаний.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, и т.д. при выполнении студентом домашних заданий.

#### **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации –программы OfficeStd 2013 RUSOLPNLAcademic 021-10232, LibreOffice (свободное), издательская система LaTeX;
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ– Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

#### **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. Лесин, В. В., Уравнения математической физики : учеб. пособие для вузов / В. В. Лесин, М., КУРС; ИНФРА-М, 2017, 240с
2. Байков В. А. Уравнения математической физики: Учебник и практикум. / Байков В.А., Жибер А.В. - 2-е изд. - М.: Издательство Юрайт, 2017. - 255.
3. Метод Фурье решения задач математической физики [Электронный ресурс] : учебно-методическое пособие / сост. С. Е. Ануфриенко, В. А. Шабаршин ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2018, 92с

б) дополнительная:

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — 7-е изд. — М.: Изд. МГУ: Наука, 2004. — 798 с.
2. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — 4-е изд. — М.: Физматлит, 2004. — 688 с.
3. Кубышкин, Е. П., Задачи и упражнения по курсу "Уравнения математической физики" : учеб. пособие для вузов / Е. П. Кубышкин, А. Н. Куликов ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2008, 103с

в) ресурсы сети «Интернет»

Электронно-библиотечная система «Юрайт»( <https://urait.ru/> ).

Электронно-библиотечная система «Лань»( <https://e.lanbook.com/>).

#### **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);

- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

**Автор(ы) :**

Доцент кафедры компьютерных сетей, к.ф.-м.н. \_\_\_\_\_ С.Е. Ануфриенко

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Уравнения математической физики»  
Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации**

**Задания для самостоятельной работы**

*Задания по теме № 1. «Классификация линейных уравнений второго порядка»*

1. Изучить классификацию линейных уравнений 2-го порядка со многими переменными (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава I, § 1, п. 2).

*Задания по теме №2. «Уравнения гиперболического типа»*

1. Решить задачу для полуограниченной струны с неоднородным граничным условием:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= a^2 u_{xx} \\ 0 \leq x < +\infty \\ u(x, 0) &= 0, \\ u_t(x, 0) &= 0, \\ u(0, t) &= \sin t.\end{aligned}$$

(Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава II, § 2, п. 6).

2. Решить задачу методом разделения переменных:

$$\begin{aligned}u_{tt} &= u_{xx} \\ 0 \leq x \leq \pi \\ u(x, 0) &= x, \\ u_t(x, 0) &= 0, \\ u_x(0, t) &= 0, \\ u_x(\pi, t) + hu(\pi, t) &= 0\end{aligned}$$

(Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – глава II, § 3, №108).

*Задания по теме №3. «Уравнения параболического типа»*

Решить задачу методом разделения переменных:

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} \quad 0 \leq x \leq \pi, u(x, 0) = x \cdot (\pi - x), u_x(0, t) - hu(0, t) = 0, \\ u_x(\pi, t) + hu(\pi, t) &= 0.\end{aligned}$$

(Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – глава III, § 2, № 30).

*Задания по теме №4. «Уравнения эллиптического типа»*

1. Решить задачу Дирихле в прямоугольнике.

(Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – глава IV, § 4, № 93).

2. Решить смешанную задачу в прямоугольнике.

(Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – глава IV, § 4, № 94).

3. Решить задачу Дирихле в прямоугольном параллелепипеде.

(Будак Б.М., Самарский А.А., Тихонов А.Н. – глава IV, § 4, № 103).

**Критерии оценки результатов самостоятельной работы :**

- уровень освоения учебного материала;
- уровень умения использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- уровень сформированности общеучебных умений;
- уровень умения активно использовать электронные образовательные ресурсы, находить требующуюся информацию, изучать ее и применять на практике;
- обоснованность и четкость изложения материала;
- уровень умения ориентироваться в потоке информации, выделять главное;
- уровень умения четко сформулировать проблему, предложив ее решение, критически оценить решение и его последствия;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

#### **Описание процедуры выставления оценки**

##### **Оценка «отлично»:**

- Задание решено верно,
- Оформлено по требованиям,
- Решение изложено достаточно полно и чётко.
- Даны правильные формулировки, точные определения, понятия терминов.
- Студент может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- Правильно отвечает на дополнительные вопросы преподавателя.

##### **Оценка «хорошо»:**

- Задание решено верно,
- Оформлено по требованиям,
- Но, решение изложено недостаточно полно и чётко (не менее 70 % от полного)
- При изложении были допущены 1-2 несущественные ошибки;
- Даны правильные формулировки, точные определения, понятия терминов;
- Студент может обосновать свой ответ, привести необходимые примеры;
- Однако, есть затруднения при ответах на вопросы преподавателя.

##### **Оценка «удовлетворительно»:**

- Более половины задания решено верно,
- Задание оформлено по требованиям,
- Решение изложено недостаточно полно и чётко (не менее 70 % от полного), при изложении некоторых заданий допущена 1 существенная ошибка, приводящая к неверному ответу.
- Студент знает и понимает основные положения данной темы, но допускает неточности в формулировки понятий;
- излагает выполнение задания недостаточно логично и последовательно;
- затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

##### **Оценка «неудовлетворительно» :**

- Более половины задания решено неверно,
- Решение изложено неполно и нечётко (менее 50 % от полного), при изложении многих задач были допущены существенные ошибки, приводящая к неверному ответу.
- Студент не знает или не понимает основные положения данной темы, затрудняется при ответах на вопросы преподавателя.

Среднее арифметическое по всем видам текущего контроля СРС составляет оценочный показатель студента, который влияет на выставление итоговой оценки по результатам изучения дисциплины и допуск к итоговой аттестации по дисциплине.

#### **Типовые индивидуальные задания**

##### *Индивидуальная работа №1.*



1. Общая схема разделения переменных (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава II, § 3, п. 9).
2. Колебания ограниченных объёмов (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава V, § 3, п. 1).
3. Колебания прямоугольной мембраны (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава V, § 3, п. 2).
4. Колебания круглой мембраны (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава V, § 3, п. 3).

*Индивидуальная работа №2.*

1. Функция источника (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава IV, § 4, п. 1).
2. Функция источника для круга (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава IV, § 4, п. 2).
3. Функция источника для сферы (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава IV, § 4, п. 3).
4. Функция источника для полупространства (Тихонов А.Н., Самарский А.А. – глава IV, § 4, п. 4).

**Критерии оценки выполнения индивидуального задания:**

Оценка	Критерии
Отлично	<p>Выполненная работа полностью соответствует поставленному заданию.</p> <p>Работа выполнена на высоком теоретическом и практическом уровне. Обучающийся свободно ориентируется в материале и отвечает без затруднений на вопросы по теме задания.</p> <p>Студент проявляет инициативу, навыки работы в коллективе и организационные способности. Способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации.</p>
Хорошо	<p>Выполненная работа полностью соответствует поставленному заданию, возможны небольшие неточности не влияющие на решение задачи в целом..</p> <p>Работа выполнена на достаточно высоком теоретическом и практическом уровне. Обучающийся относительно полно ориентируется в материале и отвечает без затруднений на вопросы по теме задания. Допускает незначительное количество ошибок.</p> <p>Далеко не всегда проявляет инициативу. Способен к выполнению сложных заданий</p>
Удовлетворительно	<p>Уровень недостаточно высок. Допускаются ошибки и затруднения при изложении материала.</p> <p>Выполнена большая часть требований задания.</p>
Неудовлетворительно	<p>Требования поставленной задачи практически не выполнены. При контроле студент допускает значительные ошибки, обнаруживает лишь начальную степень ориентации в материале. Не работал в коллективе. Большая часть работы не выполнена.</p>

**Типовые варианты контрольных работ**

Контрольная работа № 1.  
(проверка ПК-2, тема: приведение линейных уравнений второго порядка к каноническому виду)

Задания	Ответы
1. Привести уравнение к каноническому виду: $4y^2u_{xx} - e^{2x}u_{yy} - 4y^2u_x = 0.$	$\xi = e^x + y^2, \eta = e^x - y^2,$ $u_{\xi\eta} = \frac{1}{8(\xi+\eta)^2}(u_\xi + u_\eta).$
2. Привести уравнение к каноническому виду: $(1+x^2)u_{xx} + (1+y^2)u_{yy} + xu_x + yu_y = 0.$	$\xi = \ln(x + \sqrt{1+x^2}), \eta = \ln(y + \sqrt{1+y^2}),$ $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0.$
3. Привести уравнение к специальному каноническому виду: $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - 10u_x + 6u_y + 22u = 0.$	$\xi = y - 2x, \eta = y,$ $u_{\eta\eta} + 6,5u_\xi + 1,5u_\eta + 5,5u = 0,$ $u = v e^{\lambda\xi + \mu\eta}, \lambda = \frac{-79}{104}, \mu = \frac{-3}{4},$ $v_{\eta\eta} + 6,5v_\xi = 0.$

Контрольная работа № 2.  
(проверка ПК-2, тема: полуограниченная струна, метод продолжений)

Задания	Ответы
1. Выписать формулы, определяющие форму струны в различные моменты времени: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ $0 \leq x < +\infty$ $u(x, 0) = \begin{cases} (x-1) \operatorname{tg} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$ $u_t(x, 0) = 0$ $u(0, t) = 0$	$0 < t_i < \frac{1}{2a}$ $u(x, t_i) = \begin{cases} \frac{(x+at_i-1)\operatorname{tg}(x+at_i) - (x-at_i+1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & 0 \leq x < at_i \\ \frac{(x+at_i-1)\operatorname{tg}(x+at_i) + (x-at_i-1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & at_i < x < 1-at_i \\ \frac{(x-at_i-1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & 1-at_i < x < 1+at_i \\ 0, & x > 1+at_i \end{cases}$ $\frac{1}{2a} < t_i < \frac{1}{a}$ $u(x, t_i) = \begin{cases} \frac{(x+at_i-1)\operatorname{tg}(x+at_i) - (x-at_i+1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & 0 \leq x < 1-at_i \\ \frac{-(x-at_i+1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & 1-at_i < x < at_i \\ \frac{(x-at_i-1)\operatorname{tg}(x-at_i)}{2}, & at_i < x < 1+at_i \\ 0, & x > 1+at_i \end{cases}$ $t_i > \frac{1}{a}$

	$u(x, t_i) = \begin{cases} 0, 0 \leq x \leq 1 + at_i \\ \frac{-(x - at_i + 1) \operatorname{tg}(x - at_i)}{2}, -1 + at_i < x < at_i \\ \frac{(x - at_i - 1) \operatorname{tg}(x - at_i)}{2}, at_i < x < 1 + at_i \\ 0, x > 1 + at_i \end{cases}$
<p>2. Выписать формулы, определяющие форму струны в различные моменты времени:</p> <p><math>u_{tt} = a^2 u_{xx}</math></p> <p><math>0 \leq x &lt; +\infty</math></p> <p><math>u(x, 0) = 0</math></p> <p><math>u_t(x, 0) = \begin{cases} 6(x - x^2), 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x &gt; 1 \end{cases}</math></p> <p><math>u_x(0, t) = 0</math></p>	$u(x, t_i) = \begin{cases} 0 < t_i < \frac{1}{2a} \\ \frac{3(x + at_i)^2 - 2(x + at_i)^3 + 3(x - at_i)^2 + 2(x - at_i)^3}{2a}, 0 \leq x < at_i \\ \frac{3(x + at_i)^2 - 2(x + at_i)^3 - 3(x - at_i)^2 + 2(x - at_i)^3}{2a}, at_i < x < 1 - at_i \\ \frac{1}{a} - \frac{3(x - at_i)^2 - 2(x - at_i)^3 + 1}{2a}, 1 - at_i < x < 1 + at_i \\ 0, x > 1 + at_i \\ \frac{1}{2a} < t_i < \frac{1}{a} \\ \frac{3(x + at_i)^2 - 2(x + at_i)^3 + 3(x - at_i)^2 + 2(x - at_i)^3}{2a}, 0 \leq x < 1 - at_i \\ \frac{1}{a} + \frac{3(x - at_i)^2 + 2(x - at_i)^3 - 1}{2a}, 1 - at_i < x < at_i \\ \frac{1}{a} - \frac{3(x - at_i)^2 - 2(x - at_i)^3 + 1}{2a}, at_i < x < 1 + at_i \\ 0, x > 1 + at_i \\ t_i > \frac{1}{a} \\ \frac{1}{a}, 0 \leq x \leq 1 + at_i \\ \frac{1}{a} + \frac{3(x - at_i)^2 + 2(x - at_i)^3 - 1}{2a}, -1 + at_i < x < at_i \\ \frac{1}{a} - \frac{3(x - at_i)^2 - 2(x - at_i)^3 + 1}{2a}, at_i < x < 1 + at_i \\ 0, x > 1 + at_i \end{cases}$

### Контрольная работа № 3.

(проверка ПК-2, тема: решение задач для уравнения колебаний струны методом разделения переменных)

Задания	Ответы
1. Решить задачу методом разделения переменных:	$u(x, t) = \frac{x^2 + t^2}{\pi} - x + 15t + \frac{\pi}{6} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos 2kt \cos 2kx$

$u_{tt}=u_{xx}$ $0 \leq x \leq \pi$ $u(x,0)=0,$ $u_t(x,0)=15,$ $u_x(0,t)=-1,$ $u_x(\pi,t)=1.$	
<p>2. Решить задачу методом разделения переменных:</p> $u_{tt}=u_{xx}+3\sin t \cdot \cos \frac{x}{2}$ $0 \leq x \leq \pi$ $u(x,0)=10\cos \frac{x}{2}-7\cos \frac{5x}{2},$ $u_t(x,0)=\cos \frac{x}{2}-\cos x,$ $u_x(0,t)=0,$ $u(\pi,t)=\sin t.$	$u(x,t)=i$

#### Контрольная работа № 4.

(проверка ПК-2, тема: решение задач для уравнения теплопроводности методом разделения переменных)

Задания	Ответы
<p>1. Решить задачу методом разделения переменных:</p> $u_t=4u_{xx}-6u$ $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ $u(x,0)=-3\sin 5x+7\sin 9x,$ $u(0,t)=u_x\left(\frac{\pi}{2},t\right)=0.$	$u(x,t)=(7e^{-324t}\sin 9x-3e^{-100t}\sin 5x)e^{-6t}$
<p>2. Решить задачу методом разделения переменных:</p> $u_t=u_{xx}+e^{-2t} \cdot \cos \frac{x}{2}$ $0 \leq x \leq \pi$ $u(x,0)=2\cos \frac{3x}{2}+\cos x,$ $u_x(0,t)=0,$ $u(\pi,t)=-e^{-t}.$	$u(x,t)=\frac{4}{3}(e^{\frac{-t}{4}}-e^{-2t})\cos \frac{x}{2}+2e^{\frac{-9t}{4}}\cos \frac{3x}{2}+e^{-t}\cos x$

#### Контрольная работа № 5.

(проверка ПК-2, тема: решение задач для уравнений Лапласа и Пуассона)

Задания	Ответы
1. Решить задачу Дирихле для уравнения Пуассона в кольце: $\Delta u = \rho \cos \phi$ $1 \leq \rho \leq 2$ $u(1, \phi) = 2 + 4 \cos \phi$ $u(2, \phi) = -3 + 5 \sin 2\phi$	$u(\rho, \phi) = \left( \frac{1}{8} \rho^3 - \frac{23}{24} \rho + \frac{11}{6} \rho^{-1} \right) \cos \phi + 2 - \frac{5}{\ln 2} \ln \rho + \frac{4}{3} (\rho^2 - \rho^{-2})$
2. Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа в секторе: $\Delta u = 0$ $\rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ $u(\rho, 0) = 0$ $u(\rho, \frac{\pi}{2}) = u_1$ $u(1, \phi) = u_2$	$u(\rho, \phi) = \frac{-2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{(u_2 - u_1)(-1)^n - u_2}{n} \rho^{2n} \sin 2n\phi \right] + \frac{2u_1}{\pi} \phi$
3. Решить задачу Неймана: $\Delta u = 0$ $\rho \geq 1$ $\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big _{\rho=1} = A + 8 \cos^4 \phi$	Задача разрешима при $A = -3$ . $u(\rho, \phi) = -2\rho^{-2} \cos 2\phi - \frac{1}{4} \rho^{-4} \cos 4\phi + C$

Правила выставления оценки по результатам контрольных работ № 1 и № 5:

Оценка по результатам контрольной работы считается в баллах по следующему принципу: правильно выполненное

задание №1 – 1,5 балла,

задание №2 – 1,5 балла,

задание №3 – 1,5 балла.

Каждое из заданий может быть оценено частично, а именно:

1 балл – если при верном в целом решении допущена арифметическая ошибка, из-за которой получился неверный ответ, либо в целом верное решение не доведено до конца;

0,5 балла – если в решении допущено несколько арифметических ошибок, либо же отсутствует необходимая часть решения при наличии верно изложенных других частей решения.

Полностью неправильно выполненное задание - 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 4,5 балла.

Набранное количество баллов

от 4 до 4,5 соответствует формированию на данном этапе освоения дисциплины проверяемых умений на высоком уровне (оценка «отлично»),

3-3,5 балла – на продвинутом уровне (оценка «хорошо»),

2-2,5 балла – на пороговом уровне (оценка «удовлетворительно»),

менее 2 баллов – умения не сформированы (оценка «неудовлетворительно»).

Правила выставления оценки по результатам контрольных работ № 2, № 3 и № 4:

Оценка по результатам контрольной работы считается в баллах по следующему принципу: правильно выполненное

задание №1 – 2 балла,

задание №2 – 2 балла.

Каждое из заданий может быть оценено частично, а именно:

1,5 балла – если при верном в целом решении допущена арифметическая ошибка, из-за которой получился неверный ответ;

1 балл – если в решении допущено несколько арифметических ошибок, либо при правильно определенной последовательности действий отсутствует необходимая часть решения при наличии верно изложенных других частей решения;

0,5 балла – если правильно определена последовательность действий, но само решение отсутствует, либо есть решение отдельных частей задания при отсутствии общего плана решения;

Полностью неправильно выполненное задание - 0 баллов.

Максимальное количество баллов по итогам самостоятельной работы – 4 балла.

Набранное количество баллов

от 3,5 до 4 соответствует формированию на данном этапе освоения дисциплины проверяемых умений на высоком уровне (оценка «отлично»),

2,5-3 балла – на продвинутом уровне (оценка «хорошо»),

1,5-2 балла – на пороговом уровне (оценка «удовлетворительно»),

менее 1,5 баллов – умения не сформированы (оценка «неудовлетворительно»).

### **Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины.**

#### **Проверка сформированности компетенций ПК-2 (правильные ответы подчеркнуты)**

1. Уравнения математической физики математическим образом...

- а) определяют физические константы;
- б) устанавливают физические законы;
- в) описывают физические процессы;
- г) уточняют физическую реальность.

2. Важнейшими среди уравнений математической физики являются уравнения \_\_\_\_\_  
порядка

- а) первого;
- б) второго;
- в) третьего;
- г) четвертого.

3. Неизвестная функция в уравнениях математической физики зависит...

- а) от одной переменной;
- б) от нескольких переменных;
- в) от физических условий;
- г) от другой функции.

4. Среди типов уравнений второго порядка нет...

- а) гиперболических;
- б) эллиптических;
- в) цилиндрических;
- г) параболических.

5. Формула Даламбера в уравнениях математической физики задает...

- а) решение задачи о колебаниях полуограниченной струны;
- б) решение задачи о колебаниях неограниченной струны;
- в) решение задачи о колебаниях ограниченной струны;
- г) решение задачи о распространении волн в пространстве.

6. Метод разделения переменных иначе называют...

- а) методом Коши;
- б) методом Лагранжа;
- в) методом Даламбера;
- г) методом Фурье.

7. Смешанная краевая задача не может включать в себя...

- а) уравнение теплопроводности;
- б) экономические условия;
- в) начальные условия;
- г) граничные условия.

8. В результате применения метода Фурье общее решение получается...

- а) путем приведения частных решений к общему знаменателю;
- б) путем последовательных приближений;
- в) путем суммирования частных решений;
- г) путем вероятностного перебора.

9. Функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются...

- а) сходящимися;
- б) непрерывными;
- в) гармоническими;
- г) ограниченными.

10. К типичным задачам для уравнения Лапласа не относятся

- д) задача Дирихле;
- е) задача Коши;
- ж) задача Ньютона;
- з) задача Неймана.

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл.

Набранное количество баллов 9-10 соответствует формированию проверяемых компетенций на высоком уровне, 7-8 баллов – на продвинутом уровне, 5-6 баллов – на пороговом уровне, менее 5 баллов – ниже порогового уровня.

## **1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

На экзамене проверяется сформированность знаний, умений и навыков в соответствии с компетенцией ПК-2.

Экзамен проводится в письменной и устной форме. Важно проверить у обучающихся не только теоретические знания, но и практические навыки решения уравнений математической физики. При этом к каждому обучающемуся необходим индивидуальный подход. Учитывается работа в течение семестра на практических занятиях. В случае высоких оценок («хорошо» и «отлично») по итогам контрольных работ, экзамен производится устно и только по лекционному курсу. Для остальных

обучающихся экзамен включает в себя и как письменное выполнение практических заданий, так и устный опрос.

**Вопросы к экзамену по курсу «Уравнения математической физики».**

1. +Классификация уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными.
2. Приведение к каноническому виду уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
3. +Бесконечная струна. Формула Даламбера.
4. Решение неоднородного уравнения колебаний струны.
5. Корректность задачи о колебаниях бесконечной струны.
6. +Полубесконечная струна и метод продолжения.
7. +Формальное решение уравнения колебаний струны с закрепленными концами.
8. Обоснование метода разделения для уравнения струны.
9. Решение неоднородного уравнения колебаний струны методом разделения. Функция влияния сосредоточенной точечной силы.
10. Общая первая краевая задача.
11. Вывод уравнения теплопроводности.
12. +Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности.
13. +Принцип максимума для уравнения теплопроводности.
14. Теорема единственности решения первой краевой задачи для уравнения теплопроводности. Непрерывная зависимость решения от начальных и граничных условий.
15. +Решение первой краевой задачи для уравнения теплопроводности методом разделения.
16. Обоснование метода разделения для уравнения теплопроводности.
17. Функция источника и неоднородное уравнение теплопроводности.
18. Распространение тепла по бесконечному стержню.
19. Распространение тепла по полубесконечному стержню.
20. +Задачи, приводящие к уравнениям Лапласа и Пуассона. Постановка внутренних и внешних краевых задач.
21. Оператор Лапласа в криволинейной системе координат.
22. +Фундаментальные уравнения Лапласа в пространстве и на плоскости.
23. Первая и вторая формулы Грина.
24. Основная формула Грина.
25. Теоремы о среднем и принцип максимума для гармонических функций.
26. Единственность и устойчивость решений первой краевой задачи для уравнения Лапласа.
27. Единственность решения второй краевой задачи.
28. +Решение задачи Дирихле в круге методом разделения переменных.
29. Обоснование метода разделения для решения задачи Дирихле в круге.
30. Интеграл Пуассона.

Определения, формулировки утверждений и основные результаты из вопросов, отмеченных знаком «+», образуют программу минимум.

**Примеры экзаменационных задач.**

1. Решить краевую задачу:



$$u_{tt} = 4u_{xx} + 5 \cos \frac{3x}{2} \cdot \sin 2t$$

$$0 \leq x \leq \pi$$

$$u(x, 0) = 7 \cos \frac{3x}{2}$$

$$u_t(x, 0) = 10 \cos \frac{5x}{2}$$

$$u_x(0, t) = u(\pi, t) = 0$$

$$\text{Ответ: } u(x, t) = (7 \cos 3t + \sin 2t) \cos \frac{3x}{2} + 2 \sin 5t \cos \frac{5x}{2}.$$

2. Решить краевую задачу:

$$u_{tt} = 4u_{xx}$$

$$0 \leq x \leq 1$$

$$u(x, 0) = \sin \frac{\pi x}{2} + 8 \sin \pi x$$

$$u_t(x, 0) = -16 \pi \sin 4 \pi x$$

$$u(0, t) = 0$$

$$u(1, t) = \cos \pi t$$

$$\text{Ответ: } u(x, t) = 8 \cos 2 \pi t \sin \pi x - 2 \sin 8 \pi t \sin 4 \pi x + \sin \frac{\pi x}{2} \cos \pi t.$$

3. Решить задачу Дирихле:

$$\Delta u = 0$$

$$1 \leq \rho \leq 2$$

$$u|_{\rho=1} = -2 + \sin \phi + \cos 2 \phi$$

$$u|_{\rho=2} = 1 + 2 \sin \phi + 0,25 \cos 2 \phi$$

$$\text{Ответ: } u(\rho, \phi) = -2 + \frac{3 \ln \rho}{\ln 2} + \rho \sin \phi + \rho^{-2} \cos 2 \phi.$$

4. Решить третью внутреннюю задачу

$$\Delta' u = 0$$

$$\rho \leq 2$$

$$\left( \frac{\partial u}{\partial \rho} - u \right) \Big|_{\rho=2} = 1 - 2 \cos \phi + 12 \cos 3 \phi$$

$$\text{Ответ: } u(\rho, \phi) = -1 + 2 \rho \cos \phi + 3 \rho^3 \cos 3 \phi.$$

5. Решить задачу Неймана

$$\Delta u = 0$$

$$\rho \leq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=1} = 3 \cos^2 \phi + \sin^2 2 \phi + A$$

$$\text{Ответ: задача разрешима при } A = -2, u(\rho, \phi) = \frac{1}{2} \rho^2 \cos 2 \phi + C.$$

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* – предполагает знание определений, формулировок утверждений и основных результатов из вопросов, образующих программу минимум (без доказательства), умение определять тип линейных уравнений второго порядка и приводить их к каноническому виду, решать простейшие задачи с использованием фазовой плоскости и метода разделения переменных.

*Продвинутый уровень* – предполагает знание основных теоретических положений (с доказательством) курса «Уравнения математической физики», умение решать стандартные задачи математической физики.

*Высокий уровень* – предполагает глубокое знание теории «Уравнения математической физики», умение выводить уравнения, описывающие различные физические процессы, владение методами исследования (с обоснованием) и решения различных задач математической физики.

**2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Профессиональные компетенции						
ПК-2	Контрольная работа №1, 2, 3, 4,5. Экзамен.	1-5	Знать: – теоретические основы дисциплины, правила постановки задач; Уметь: – решать различные задачи математической физики.	Знать: 1. определения, формулировки утверждений и основные результаты из программы минимум; Уметь: определять тип линейных уравнений второго порядка и приводить их к каноническому виду, решать простейшие задачи.	1. Знать основные теоретические положения курса «Уравнения математической физики» (с доказательством). 2. Уметь решать стандартные задачи математической физики.	1. Знать и понимать теорию курса «Уравнения математической физики». 2. Выводить уравнения, описывающие различные физические процессы.
	Индивидуальные задания №1, 2. Экзамен.	2,5	Владеть навыками: исследования различных задач математической физики, обоснования применяемых методов.	Владеть навыками: использования фазовой плоскости и метода разделения переменных.	1. Владеть навыком применения изучаемых методов решения задач.	1. Владение методами исследования (с обоснованием) и решения различных задач математической физики.

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Уравнения математической физики»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Уравнения математической физики» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе дисциплины лежит особый математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка практических навыков.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом современной информатики, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и индивидуальных заданий. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий, которые вызвали затруднения.

По итогам изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен проводится в устной форме, студентам предлагаются экзаменационные билеты, каждый из которых включает в себя вопрос по теории и задачу. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Уравнения математической физики» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

1. Личный кабинет ([http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.