

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра радиофизики

Т. К. Артёмова
А. С. Гвоздарёв

ОСНОВЫ радиоэлектроники

Задачник

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальностям Радиотехника, Радиофизика и
электроника и направлениям Телекоммуникации, Радиофизика*

Ярославль 2010

УДК 621.37/.39
ББК 3 80я73–4
А 86

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009/10 года*

Рецензент
кафедра радиофизики
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Артёмова, Т. К. Основы радиоэлектроники: задачник
А 86 / Т. К. Артёмова, А. С. Гвоздарёв; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2010. – 56 с.

Задачник содержит краткие теоретические сведения, примеры решения типичных задач и набор заданий различной степени трудности, необходимых для самостоятельного решения. Состоит из девяти разделов. В них собран материал, включающий задачи на спектры и другие параметры детерминированных сигналов, основные понятия теории случайных процессов, анализ резистивных цепей, описание гармонических воздействий, методы анализа линейных цепей и нелинейных элементов, цепи с распределенными параметрами, количественные характеристики передачи и приёма информации.

Предназначен для студентов, обучающихся по специальностям 010801.65 Радиофизика и электроника, 210302.65 Радиотехника и направлениям 210400.62 Телекоммуникации и 010800.62 Радиофизика (дисциплины «Основы радиоэлектроники», «Основы теории цепей», блоки ОПД, ЕН), очной формы обучения

УДК 621.37/.39
ББК 3 80я73–4

© Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, 2010

1. Спектры детерминированных сигналов

Спектром периодического сигнала $s_{nep}(t)$ с периодом T являются коэффициенты \dot{C}_k его разложения в ряд Фурье:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s_{nep}(t) e^{-i\omega_1 k t} dt, \quad (1.1)$$

где $\omega_1 = 2\pi / T$ – частота сигнала. Для нахождения спектра достаточно описать сигнал в пределах одного периода.

Спектром непериодического сигнала $s(t)$ является его спектральная плотность $\dot{S}(\omega)$. Непериодический сигнал раскладывается в интеграл Фурье:

$$\dot{S}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (1.2)$$

Спектры непериодического сигнала $s(t)$ и совпадающего с ним на периоде бесконечного периодического сигнала $s_{nep}(t)$ связаны соотношением:

$$\dot{C}_k = \frac{1}{T} \dot{S}(k\omega_1),$$

т. е. спектр периодического сигнала – это отсчеты спектра соответствующего ему непериодического.

Спектры имеют следующие свойства (на примере спектральной плотности, для спектральных коэффициентов вид аналогичен).

Теорема линейности: если $s(t) = k_1 s_1(t) \pm k_2 s_2(t)$, то $\dot{S}(\omega) = k_1 \dot{S}_1(\omega) \pm k_2 \dot{S}_2(\omega)$.

Теорема запаздывания: если $s_2(t) = s_1(t - t_3)$, то $\dot{S}_2(\omega) = e^{-i\omega t_3} \dot{S}_1(\omega)$.

Теорема частотного сдвига: если $\dot{S}_1(\omega)$ – спектр сигнала $s_1(t)$, то $\dot{S}_2(\omega) = \dot{S}_1(\omega + \Omega)$ – спектр сигнала $s_2(t) = s_1(t)e^{-i\Omega t}$.

Теорема об изменении масштаба времени: если $s_2(t) = s_1(bt)$, то $\dot{S}_2(\omega) = \frac{1}{b} \dot{S}_1\left(\frac{\omega}{b}\right)$.

Теорема о свертке: сигнал $s(t) = s_1(t)s_2(t)$ имеет спектр $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_1(\omega - \Omega) \dot{S}_2(\Omega) d\Omega$.

Обратная теорема о свертке: спектр $\dot{G}(\omega) = \dot{S}_1(\omega) \dot{S}_2(\omega)$ имеет сигнал $s(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s_1(t) s_2(\tau - t) dt$.

Теорема дифференцирования: если $s_2(t) = \frac{ds_1(t)}{dt}$, то $\dot{S}_2(\omega) = i\omega \dot{S}_1(\omega)$.

Теорема интегрирования: если $s_2(t) = \int s_1(t) dt$, то $\dot{S}_2(\omega) = \frac{\dot{S}_1(\omega)}{i\omega} + \pi \delta(\omega) \dot{S}_1(0)$.

Спектры простейших сигналов:

а) δ -функции $s(t) = \delta(t - t_0)$ $\dot{S}_\delta(\omega) = e^{-i\omega t_0}$;

б) σ -функции $s(t) = \sigma(t - t_0)$ $\dot{S}_\sigma(\omega) = \frac{e^{-i\omega t_0}}{i\omega}$;

в) косинуса $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$

$$\dot{S}(\omega) = \pi A [e^{i\phi_0} \delta(\omega - \omega_0) + e^{-i\phi_0} \delta(\omega + \omega_0)],$$

г) синуса $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$

$$\dot{S}(\omega) = \pi A e^{-i\frac{\pi}{2}} [e^{i\phi_0} \delta(\omega - \omega_0) - e^{-i\phi_0} \delta(\omega + \omega_0)],$$

д) постоянного сигнала: $s(t) = C$ $\dot{S}_C(\omega) = 2\pi A \delta(\omega)$.

В задачах о спектрах необходимо:

- 1) найти выражение для комплексного спектра;
- 2) найти амплитудный спектр;
- 3) найти фазовый спектр;
- 4) найти значение постоянной составляющей;
- 5) найти нули спектральной плотности или огибающей спектра;
- 6) схематически изобразить амплитудный и фазовый спектры на спектральной диаграмме.

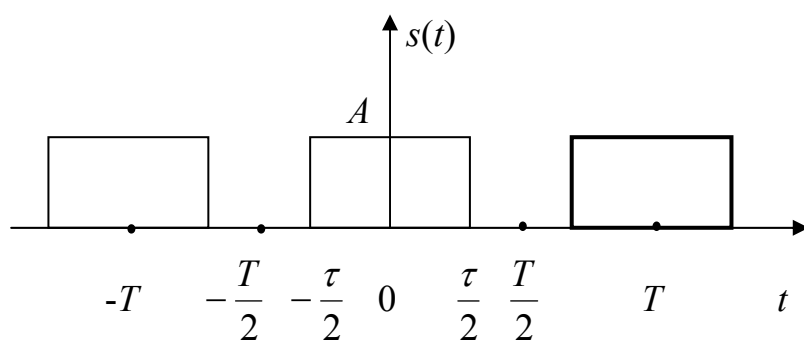


Рис. 1.1

Пример П.1.1.

Дана периодическая последовательность прямоугольных импульсов. Параметры последовательности (рис. 1.1): амплитуда A , длительность τ , период T .

Импульсы центрированы относительно момента времени $t = 0$.
Описать сигнал и найти его спектр.

Решение.

Достаточно описать сигнал на одном периоде:

$$s(t) = \begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.3)$$

Так как сигнал периодический, то его спектром являются коэффициенты \dot{C}_k из (1.1), где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ – частота следования импульсов.

Подставим описание сигнала (1.3) в (1.1) и найдем:

$$\begin{aligned}\dot{C}_k &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega_1 k t} dt = \frac{A}{T} \frac{1}{-i\omega_1 k} e^{-i\omega_1 k t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= -\frac{A}{T} \frac{1}{i\omega_1 k} \left[e^{-i\omega_1 k \frac{\tau}{2}} - e^{i\omega_1 k \frac{\tau}{2}} \right] = \frac{A}{T} \frac{2}{\omega_1 k} \sin\left(\omega_1 k \frac{\tau}{2}\right) = A \frac{\tau}{T} \frac{\sin(\omega_1 k \tau / 2)}{\omega_1 k \tau / 2}.\end{aligned}$$

Здесь была использована одна из формул Эйлера:

$$\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x, \quad \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x.$$

Как любое комплексное число, спектральные коэффициенты имеют модули и аргументы, т. е. допускают экспоненциальное представление: $\dot{C}_k = |\dot{C}_k| e^{i\phi_k}$.

Модули спектральных коэффициентов образуют амплитудный спектр:

$$|\dot{C}_k| = A \frac{\tau}{T} \left| \frac{\sin(\omega_1 k \tau / 2)}{\omega_1 k \tau / 2} \right|. \quad (1.4)$$

Найдем постоянную составляющую сигнала:

$$|\dot{C}_0| = A \frac{\tau}{T} \left| \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega_1 k \tau / 2)}{\omega_1 k \tau / 2} \right| = A \frac{\tau}{T} \cdot 1 = A \frac{\tau}{T} = \frac{A}{q}.$$

Здесь $q = T / \tau$ – скважность последовательности импульсов. Спектральные составляющие располагаются на частотах, кратных частоте следования импульсов ω_1 .

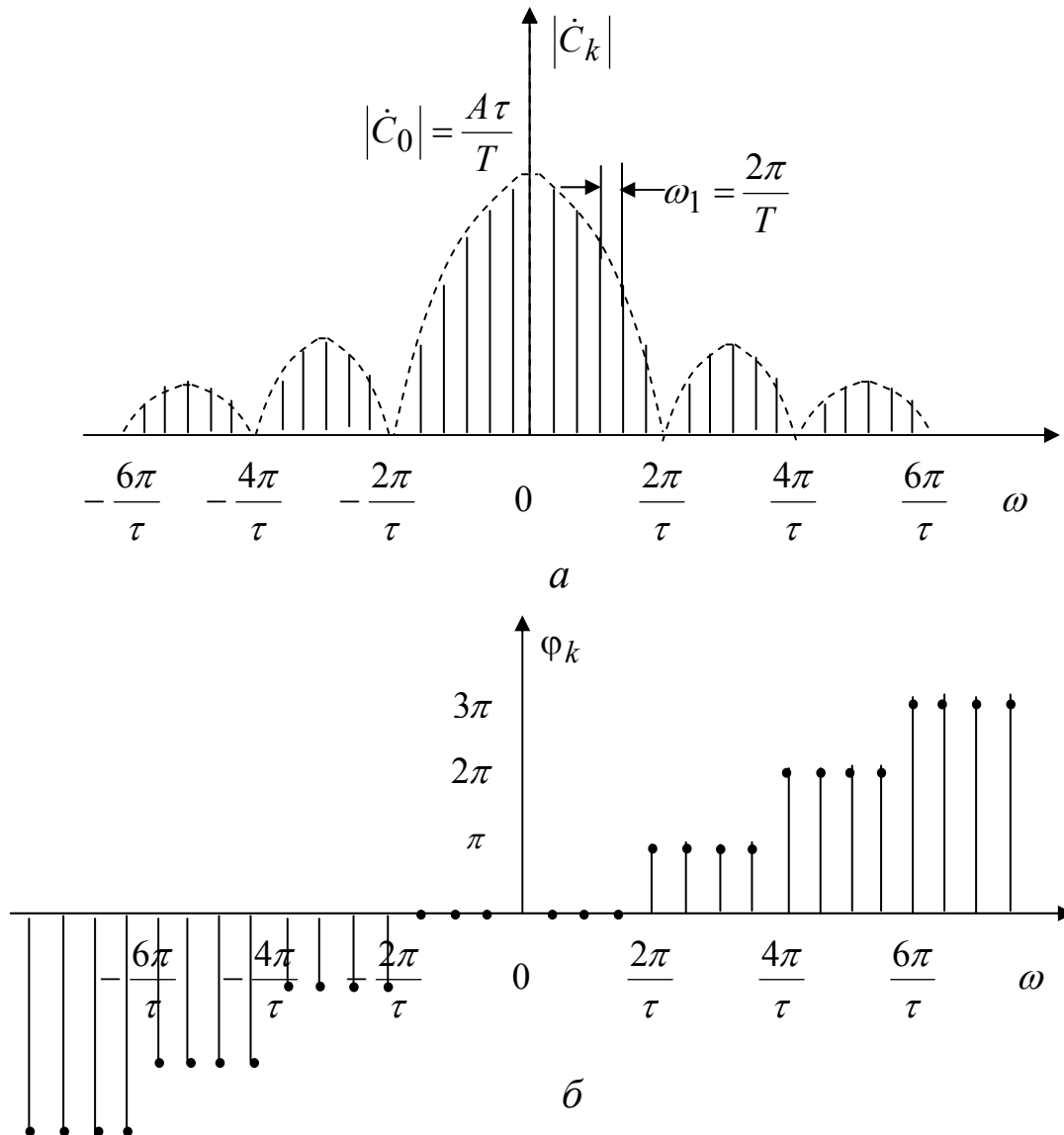


Рис. 1.2

Найдем частоты, на которых спектральные коэффициенты обращаются в нуль (нули огибающей спектра) $|\dot{C}_k| = 0$. Это происходит при $\sin(\omega_1 k \tau / 2) = 0$, т. е. при $\omega_1 k \tau / 2 = \pi m$, $m \neq 0$ — на частотах $\omega = \omega_1 k = 2\pi m / \tau$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$

Первый ноль ($m = 1$) придется на частоту $\omega_1 k_1 = \frac{2\pi}{\tau}$, а это составляющая номер $k_1 = \frac{2\pi}{\tau \omega_1} = \frac{T}{\tau} = q$.

Зная постоянную составляющую, форму и нули огибающей, можно построить амплитудную спектральную диаграмму в общем случае (рис. 1.2, а).

Из рис. 1.2, а видно, что ширина главного лепестка (интервал частот между первыми нулями огибающей спектра) составляет $4\pi/\tau$ рад/с, а всех остальных лепестков – в два раза меньше: $2\pi/\tau$ рад/с. В пределах главного лепестка находятся $2k_1 - 1 = 2T/\tau - 1 = 2q - 1$ ненулевых спектральных составляющих.

Получим фазовый спектр. Выражение для спектральных коэффициентов для данного примера оказалось вещественным, но в зависимости от частоты или номера коэффициентов они могут принимать отрицательные значения, т. е. их можно представить в виде: $\dot{C}_k = |\dot{C}_k| \cdot 1$ для чётных лепестков и $\dot{C}_k = |\dot{C}_k| \cdot (-1)$ для нечётных. На комплексной плоскости числу "1" соответствует аргумент $2\pi p$, а числу "-1" – аргумент $\pi + 2\pi p$, поэтому $\phi_k = \pi p$, где p – номер лепестка (главный лепесток – нулевой). Построим спектральную фазовую диаграмму (рис. 1.2, б).

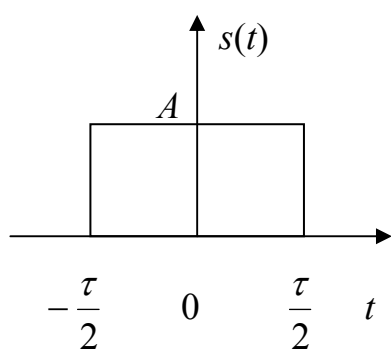


Рис. 1.3

Пример П.1.2. Дан сигнал, состоящий из одиночного прямоугольного импульса длительности τ и амплитуды A . Импульс центрирован относительно момента времени $t = 0$ (рис. 1.3). Описать сигнал и найти его спектр.

Решение.

Сигнал можно описать следующим образом:

$$s(t) = \begin{cases} A, & |t| \leq \tau/2, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Так как сигнал непериодический, то его спектром является непрерывная по частоте функция (1.2). Подставим описание сигнала (1.5) в (1.2) и найдем:

$$\begin{aligned}\dot{S}(\omega) &= \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-i\omega t} dt = \frac{A}{-i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \frac{A}{-i\omega} [e^{-i\omega\tau/2} - e^{i\omega\tau/2}] = \\ &= \frac{2A}{\omega} \frac{e^{i\omega\tau/2} - e^{-i\omega\tau/2}}{2i} = \frac{2A}{\omega} \sin(\omega\tau/2) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}.\end{aligned}$$

Модуль спектральной плотности представляет собой амплитудный спектр:

$$|\dot{S}(\omega)| = A\tau \left| \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right|.$$

Постоянная составляющая сигнала равна

$$|\dot{S}(0)| = A\tau \left| \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right| = A\tau.$$

Нули спектральной плотности совпадают с нулями числителя $\dot{S}(\omega)$, т. е. $\sin(\omega\tau/2) = 0$, $\omega\tau/2 = \pi m$, $m \neq 0$, в итоге получим $\omega_m = 2\pi m / \tau$, $m = \pm 1, \pm 2, \dots$. Первый и второй нули находятся на частотах $\omega_1 = 2\pi / \tau$, $\omega_2 = 4\pi / \tau$, как и в случае периодической последовательности прямоугольных импульсов.

Фазовый спектр находится аналогично случаю периодической последовательности: $\phi(\omega) = 2\pi p$, где p – номер лепестка.

Вид амплитудного и фазового спектров совпадает с огибающей спектра из П.1.1, но значения амплитудного спектра периодического сигнала в T раз меньше. Ширина главного лепестка $2\omega_1 = 4\pi / \tau$.

Пример П.1.3. Найти спектр симметричного треугольного импульса амплитуды A , длительности τ , пользуясь свойствами спектров.

Решение.

Сигнал (рис. 1.4, а) описывается следующим образом:

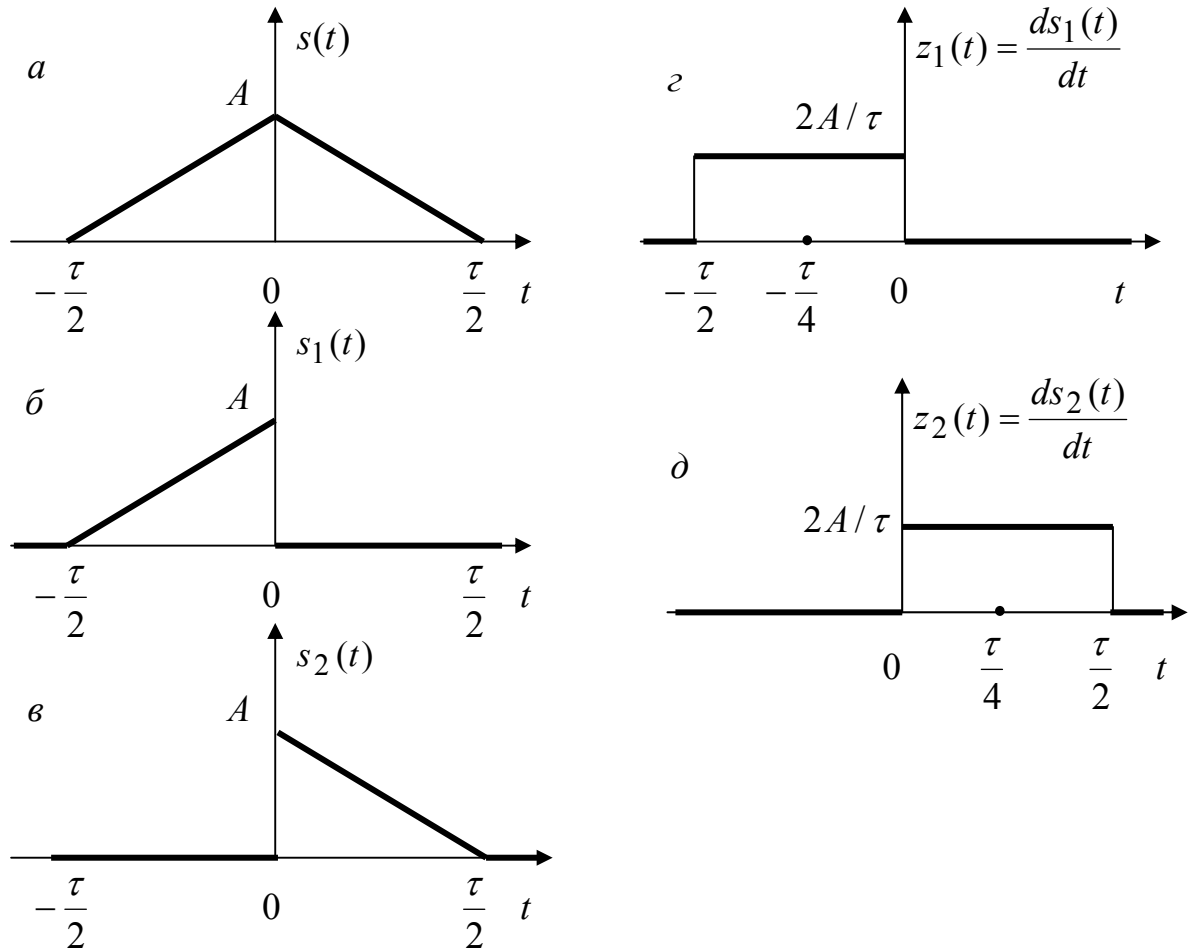


Рис. 1.4

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t < -\tau/2, \\ A + 2At/\tau, & -\tau/2 \leq t < 0, \\ A - 2At/\tau, & 0 \leq t \leq \tau/2, \\ 0, & t > \tau/2. \end{cases}$$

Его можно представить в виде суммы двух сигналов $s_1(t)$ и $s_2(t)$ (рис. 1.4 б и в). Заметим, что производными от них являются прямоугольные импульсы (рис. 1.4 г и д) $z_1(t)$ и $z_2(t)$. Сигнал $z_1(t)$ – прямоугольный импульс с амплитудой $2A/\tau$, длительности $\tau/2$, сдвинутый по времени на $t_3 = -\tau/4$. Используя выражение для спектральной плотности прямоугольного импульса, полученное в примере П.1.2, и теорему запаздывания, сформируем выражение для спектра $z_1(t)$:

$$\dot{Z}_1(\omega) = \frac{2A}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{i\omega\tau/4}.$$

Сигнал $z_2(t)$ – прямоугольный импульс с амплитудой $-2A/\tau$, длительности $\tau/2$, сдвинутый по времени на $t_3 = \tau/4$. Его спектр:

$$\dot{Z}_2(\omega) = -\frac{2A}{\tau} \frac{\tau}{2} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{-i\omega\tau/4}.$$

Зная $\dot{Z}_1(\omega)$ и $\dot{Z}_2(\omega)$, воспользуемся теоремой интегрирования, чтобы получить выражения для $\dot{S}_1(\omega)$ и $\dot{S}_2(\omega)$:

$$\dot{S}_1(\omega) = \frac{\dot{Z}_1(\omega)}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\dot{Z}_1(0) = \frac{A}{i\omega} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{i\omega\tau/4} + \pi\delta(\omega)A,$$

$$\dot{S}_2(\omega) = \frac{\dot{Z}_2(\omega)}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\dot{Z}_2(0) = -\frac{A}{i\omega} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{-i\omega\tau/4} - \pi\delta(\omega)A.$$

Так как исходный треугольный импульс мы разбили на два: $s_1(t)$ и $s_2(t)$, то, в соответствии с теоремой линейности, его спектр складывается из их спектров:

$$\begin{aligned} \dot{S}(\omega) &= \dot{S}_1(\omega) + \dot{S}_2(\omega) = \frac{A}{i\omega} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{i\omega\tau/4} - \frac{A}{i\omega} \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} e^{-i\omega\tau/4} = \\ &= \frac{2A}{\omega} \left[\frac{e^{i\omega\tau/4} - e^{-i\omega\tau/4}}{2i} \right] \frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} = \frac{2A}{\omega} \left(\frac{\sin(\omega\tau/4)}{\omega\tau/4} \right)^2. \end{aligned}$$

Задачи для решения

1.1. Найти спектр пачки из N одинаковых прямоугольных униполярных импульсов амплитуды A , длительности τ , отстоящих друг от друга на интервал T , первый импульс центрирован относительно момента $t = 0$. Определить огибающую спектра. Сопоставить со спектром одиночного импульса.

1.2. Найти спектр биполярной бесконечной последовательности (значения сигнала от $-A/2$ до $A/2$) прямоугольных импульсов длительности τ с периодом T . Сравнить его со спектром последовательности из примера П.1.1.

1.3. Найти спектр задержанного на $t_z = 1$ мс прямоугольного импульса амплитуды $A = 1$ В, длительности $\tau = 2$ мс. Можно ли по амплитудному спектру принятого сигнала определить, какую задержку при передаче он претерпел?

1.4. Найти спектр сжатой в 3 раза последовательности прямоугольных импульсов амплитуды A , длительности τ с периодом T . Как сказывается уменьшение длительности импульсов на обработке их цепями? Будет ли она качественнее?

1.5. Определите ширину спектра треугольных импульсов по первым нулям.

1.6. Как изменится ширина спектра прямоугольного импульса, если: а) длительность импульса возрастает в 2 раза; б) амплитуда падает в 2 раза?

1.7. Найти спектр сигнала, изображенного на рис. 1.5.

1.8. Найти спектр сигнала, изображенного на рис. 1.6.

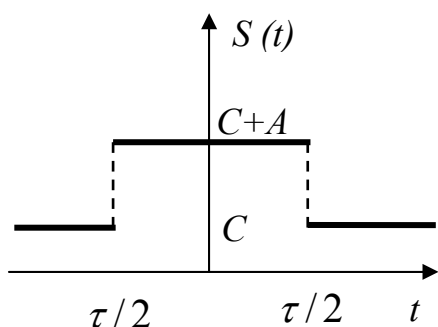


Рис. 1.5

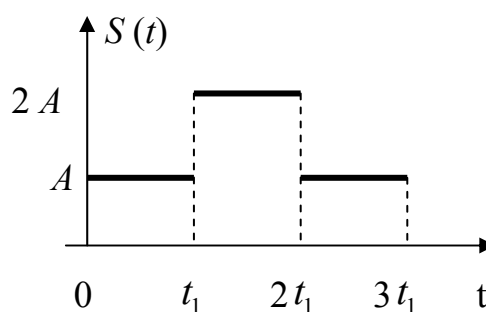


Рис. 1.6

1.9. Найти спектр гармонического сигнала амплитуды A , частоты ω_0 и фазы ϕ_0 , включенного в момент t_0 . Как ограничение по времени (включение, выключение) влияет на спектр сигнала?

1.10. Найти спектр постоянного напряжения, поданного в момент времени $t = 10$ с на вход некоторой цепи через ключ.

1.11. При гетеродинировании с повышением частоты весь спектр прямоугольного униполярного импульса амплитуды A , длительности τ перенесли в область ВЧ на $f_0 = 10^6$ Гц. Какому сигналу соответствует полученный спектр?

1.12. Сигнал представляет собой 2 импульса по 1 В бесконечно малой длительности, зафиксированные в моменты t_0 и t_1 . Каков спектр этого сигнала?

1.13. Радиоимпульс с прямоугольной огибающей длительности 1 мс и амплитуды 1 В имеет гармоническую несущую частоты 1 МГц. Какие частоты должна пропускать цепь, назначение которой – усилить этот сигнал без искажений?

1.14. Предложите способ определения расстояния до неподвижного точечного объекта по спектру посланного в его сторону и отражённого им сигнала.

2. Параметры детерминированных сигналов

Параметры сигналов определяются в зависимости от того, конечная или бесконечная у них энергия:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t)dt = K(0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.1)$$

Если энергия конечна, то для сигнала определяют:

а) *автокорреляционную функцию (АКФ):*

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t)dt. \quad (2.2)$$

б) *спектральную плотность энергии (СПЭ):*

$$G(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2.$$

Если энергия сигнала бесконечна, то определяют следующие параметры:

а) **среднюю на периоде мощность:**

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} s^2(t) dt. \quad (2.3)$$

б) **АКФ по мощности:**

$$K_p(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} s(t-\tau)s(t) dt. \quad (2.4)$$

в) **спектральную плотность мощности (СПМ):**

$$W(\omega) = \frac{G(\omega)}{T} = \frac{|\dot{S}(\omega)|^2}{T}.$$

СПЭ и АКФ, СПМ и АКФ по мощности попарно связаны преобразованиями Фурье:

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad (2.5)$$

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K_p(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad K_p(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega. \quad (2.6)$$

Чтобы описать сигнал в удобном для его стыковки с каналом передачи виде, используют эффективные параметры.

Эффективная полоса частот $\Omega_{эфф}$ определяется по α -му уровню ($\alpha = 0,9 \dots 0,99$) от полной энергии сигнала E из условия:

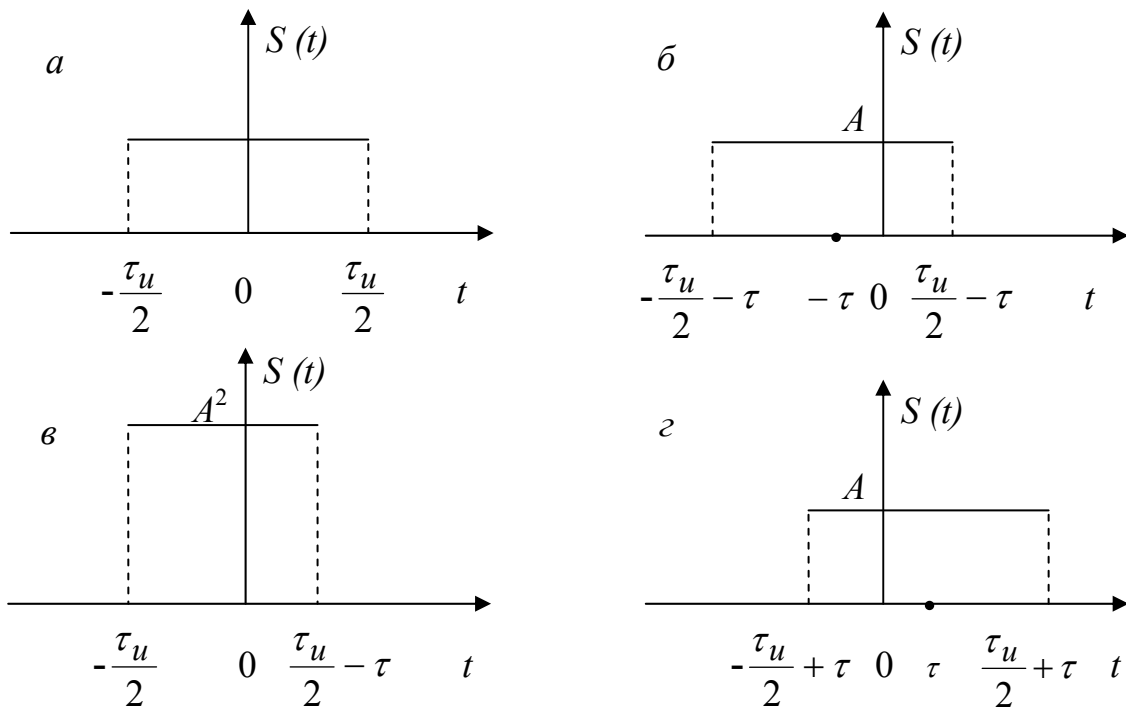


Рис. 2.1

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega_{эфф}} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega = \alpha E = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} |\dot{S}(\omega)|^2 d\omega. \quad (2.7)$$

Можно пользоваться оценкой $\Omega_{эфф}$ из соотношения $\Omega_{эфф} \cdot \tau_{эфф} = const \leq 1$.

Аналогично, из условия $E_{\alpha} = \alpha E$ можно найти и **эффективную длительность**:

$$\int_{-\tau_{эфф}/2}^{\tau_{эфф}/2} s^2(t) dt = \alpha E = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt. \quad (2.8)$$

Пример П.2.1. Найдем АКФ прямоугольного симметричного относительно момента $t = 0$ импульса амплитуды A и длительности τ_u (рис. 2.1, а).

Решение.

Так как это сигнал конечной длительности, ограниченный по величине, то его энергия конечна. Поэтому АКФ определяется по (2.2).

Найдем интервал времени, на котором подынтегральное выражение отлично от нуля – это интервал, где исходный импульс $s(t)$ и его сдвинутая копия $s(t - \tau)$ (рис. 2.1, б) перекрываются. Находим, что $t \in [-\tau_u / 2; -\tau + \tau_u / 2]$. Значение подынтегрального выражения равно на нем A^2 (рис. 2.1, в). Подставляем его в выражение для АКФ и получаем:

$$K(\tau) = \int_{-\tau_u / 2}^{-\tau + \tau_u / 2} A^2 dt = A^2(\tau_u - \tau).$$

Если образовать опережающую на τ копию сигнала $s(t + \tau)$ (рис. 2.1, г), то АКФ вследствие равенства площадей перекрытия остаётся той же – она не зависит от того, с опережением или с отставанием берутся анализируемые отсчеты, т. е. является четной функцией.

Перекрытие исходного и сдвинутого импульсов исчезает, когда $\tau = \tau_u$, поэтому за пределами интервала $|\tau| \leq \tau_u$ АКФ равна нулю. В итоге АКФ описывается выражением:

$$K(\tau) = \begin{cases} A^2(\tau_u - |\tau|), & |\tau| \leq \tau_u, \\ 0, & |\tau| > \tau_u. \end{cases}$$

Пример П.2.2. Найти СПЭ одиночного прямоугольного импульса амплитуды A и длительности τ_u .

Решение.

Так как СПЭ связана со спектральной плотностью сигнала соотношением $G(\omega) = |\dot{S}(\omega)|^2$, то можно воспользоваться полученной в примере П.1.1 формулой для спектра импульса: $\dot{S}(\omega) = A\tau \frac{\sin(\omega\tau / 2)}{\omega\tau / 2}$. Тогда

$$G(\omega) = A^2 \tau^2 \left(\frac{\sin(\omega\tau / 2)}{\omega\tau / 2} \right)^2.$$

С другой стороны, поскольку СПЭ – это преобразование Фурье от АКФ, то можно было бы получить тот же результат, взяв ПФ от найденной в примере П.2.1 АКФ.

Пример П.2.3. Найти энергию и среднюю мощность бесконечной последовательности прямоугольных импульсов длительности τ , амплитуды A с периодом T .

Решение.

По определению, энергия сигнала – сумма его квадратов во все моменты времени его существования (2.1), а так как сигнал бесконечный во времени, то и энергия его бесконечна.

Средняя мощность за один период равна в соответствии с (2.3):

$$P_{cp} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A^2 dt = A^2 \frac{\tau}{T}.$$

Задачи для решения

2.1. Найти АКФ, СПМ, энергию и среднюю мощность гармонического сигнала $s(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$.

2.2. Покажите, что происходит с АКФ непериодического сигнала при: а) его задержке на время t_3 ; б) сжатии в a раз по времени; в) усилении в k раз; г) сдвиге спектра вверх на Ω рад/с.

2.3. Покажите, что происходит с энергией непериодического сигнала при: а) его задержке на время t_3 ; б) сжатии в a раз по времени; в) усилении в k раз; г) сдвиге спектра вверх на Ω рад/с.

2.4. Найдите АКФ, СПЭ, энергию и среднюю мощность одиночного треугольного импульса амплитудой A и длительностью τ_u .

2.5. Найдите АКФ, СПЭ, энергию и среднюю мощность периодической последовательности треугольных импульсов амплитуды A и длительности τ_u с периодом T .

2.6. Получите зависимость эффективной длительности от доли энергии α , принятой за эквивалент полной, для одиночного прямоугольного импульса амплитуды A и длительности τ_u .

2.7. Определите α , при котором эффективная ширина спектра равна ширине спектра по первым нулям для прямоугольного импульса длительности τ_u .

2.8. Найдите эффективную длительность для одиночного треугольного импульса амплитудой A и длительностью τ_u . Какова должна быть минимальная полоса пропускания канала для передачи таких импульсов?

3. Случайные процессы

Одномерный случайный процесс (СП) характеризуется *функцией плотности вероятности* (ФПВ) $w(x, t)$ и *интегральной функцией распределения* (ИФР) $F(x, t)$, связанными соотношениями:

$$w(x, t) = \frac{dF(x, t)}{dx}, \quad F(x, t) = \int_{-\infty}^x w(\xi, t) d\xi. \quad (3.1)$$

Полная вероятность всех значений СП (площадь под кривой плотности вероятности) равна единице.

Случайный процесс является **стационарным**, если его ФПВ, ИФР, мат. ожидание и дисперсия не зависят от времени, а АКФ является функцией только интервала между отсчетами $\tau = t_1 - t_2$.

Характеристики стационарного СП:

а) **математическое ожидание:**

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} xw(x)dx, \quad (3.2)$$

б) **дисперсия:**

$$D = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} [x - m]^2 w(x)dx, \quad (3.3)$$

в) **АКФ**:

$$K(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)x(t-\tau)w(x)]dx. \quad (3.4)$$

Стационарный СП является *эргодическим*, если статистические средние, полученные усреднением по ансамблю реализаций, для него можно заменить средними, полученными по большому интервалу наблюдения $T \rightarrow \infty$ одной реализации.

Характеристики эргодических СП:

а) **АКФ**:

$$K(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t-\tau)dt. \quad (3.5)$$

б) **СПМ** (связана с АКФ преобразованиями Фурье):

$$\dot{W}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau, \quad K(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(\omega)e^{i\omega\tau}d\omega. \quad (3.6)$$

Пример П.3.1. Найти ФПВ, ИФР, мат. ожидание, дисперсию СП, представляющего собой генерацию случайного напряжения, если известно, что все его значения, лежащие в интервале от a до b , равновероятны ($a, b > 0$). Определить, стационарен ли СП?

Решение.

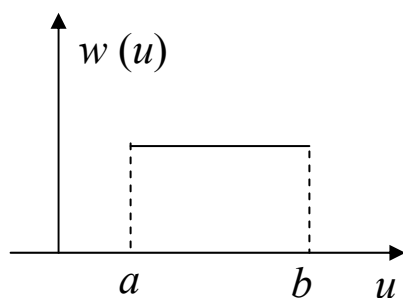


Рис. 3.1

Во-первых, опишем ФПВ СП. По условию, процесс имеет равномерную ФПВ в интервале $a \leq u \leq b$. Изобразим ее (рис. 3.1).

Так как интеграл от ФПВ – это площадь под кривой $w(u)$, то площадь образовавшегося на рис. 3.1 прямоугольника равна 1. Так как его основание равно $(b-a)$, то высота определяет значение ФПВ, то есть

$$w(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & u \in [a, b], \\ 0, & u \notin [a, b]. \end{cases}$$

Найдем ИФР:

$$F(u) = \int_{-\infty}^u w(x) dx = \int_a^u \frac{1}{b-a} dx = \frac{u-a}{b-a}.$$

Слева от a и справа от b ФПВ тождественно равна нулю, поэтому площадь под $w(u)$, равная $F(u)$, на этих участках не изменяется и равна минимуму, т. е. нулю, слева от a , и максимуму, т. е. 1, справа от b . Итак,

$$F(u) = \begin{cases} 0, & u \leq a \\ \frac{u-a}{b-a}, & a < u < b, \\ 1, & u \geq b. \end{cases}$$

Так как ФПВ и ИФР не зависят от времени, то СП стационарен, пользуемся в дальнейшем выражениями для стационарных СП.

Мат. ожидание совпадает с серединой интервала значений:

$$m = \int_{-\infty}^{\infty} uw(u) du = \int_a^b u \frac{1}{b-a} du = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$$

Дисперсия:

$$D = \int_a^b \left(u - \frac{b+a}{2} \right)^2 \frac{1}{b-a} du = \frac{1}{3(b-a)} \left[\frac{(b-a)^3}{8} - \frac{(a-b)^3}{8} \right] = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример П.3.2. Найти АКФ и СПМ для гармонического сигнала $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ со случайной начальной фазой, равновероятной на интервале $[-\pi, \pi]$. Амплитуда и частота – заданы. Процесс является эргодическим.

Решение.

Так как СП эргодический, то определяем АКФ по формуле (3.5):

$$\begin{aligned} K(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A \cos(\omega_0 t + \phi) A \cos(\omega_0 t - \omega_0 \tau + \phi) dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{A^2}{2T} \cos(\omega_0 \tau) T = \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau). \end{aligned}$$

АКФ от φ не зависит, поэтому по ней невозможно восстановить фазу исходного сигнала $x(t)$. Кроме того, АКФ оказалась периодической с той же частотой ω_0 , что и исходный сигнал.

СПМ является преобразованием Фурье от АКФ. Зная спектр косинусоиды, можно сразу записать:

$$\dot{W}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) e^{-i\omega \tau} d\tau = \frac{\pi A^2}{2} [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)].$$

Спектр является чисто вещественным и, как и АКФ, информации о фазе не несет.

Задачи для решения

3.1. Цена деления вольтметра – 1 мВ. Определите ФПВ, ИФР ошибки измерения, предполагая, что она имеет равномерное распределение.

3.2. Цена деления вольтметра – 1 мВ. Определите среднюю погрешность измерения, дисперсию ошибки, среднюю мощность ошибки измерения как случайного процесса.

3.3. Цена деления вольтметра $\Delta = 1$ мВ. Погрешность измерения имеет равномерное распределение. Определите вероят-

ность того, что ошибка измерения находится в пределах:
а) $[-\Delta/2; \Delta/2]$; б) $[-\Delta/4; \Delta/4]$; в) $[-\Delta/2; -\Delta/4]$; г) $[-\Delta/2; 0]$.

3.4. Цена деления вольтметра $\Delta = 1$ мВ. Погрешность измерения имеет равномерное распределение. Определите вероятность того, что ошибка измерения: а) не превышает $\Delta/8$ по модулю; б) неотрицательна; в) равна нулю.

3.5. Как изменятся мат. ожидание и дисперсия СП при усилении его в 3 раза?

3.6. Найдите АКФ белого шума.

3.7. Квазибелый шум имеет равномерную СПМ $N_0 = 1$ мкВт/Гц в полосе частот до 10 кГц. а) Определите и схематически изобразите АКФ такого шума. б) Укажите, каким может быть интервал дискретизации для такого процесса.

3.8. Квазибелый узкополосный шум имеет равномерную СПМ в полосе частот от 9,9 до 10,1 МГц. а) Найдите АКФ такого сигнала. б) Сопоставьте АКФ с АКФ аналогичного низкочастотного шума.

3.9. Дисперсия нормального СП равна 1 мкВт. Каково соотношение (в дБ) сигнал-помеха в смеси этого СП с детерминированным сигналом мощности 1 Вт?

3.10. Докажите, что, если на выходе системы СП имеет равномерную СПМ во всем диапазоне частот, то это система без памяти, т. е. генерируемое ею последующее значение никак не определяется предыдущим.

4. Анализ резистивных цепей

В линейной цепи действуют следующие законы.

1) **Закон Ома:**

$$I = \frac{\phi_1 - \phi_2 + \sum_{m=1}^M E_m}{\sum_{k=1}^K R_k}, \quad (4.1)$$

где $\sum_{m=1}^M E_m$ – алгебраическая сумма включенных на данном участке цепи э.д.с., $\sum_{k=1}^K R_k$ – сопротивление участка цепи, ϕ_1 и ϕ_2 – потенциалы его полюсов.

2) **1-ое правило Кирхгофа** – алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum_{n=1}^N I_n = 0. \quad (4.2)$$

3) **2-ое правило Кирхгофа** – алгебраическая сумма падений напряжений на всех элементах контура равна алгебраической сумме включенных в нем э.д.с.:

$$\sum_{k=1}^K I_k R_k = \sum_{m=1}^M E_m. \quad (4.3)$$

Последовательная резистивная цепь представляет собой **делитель напряжения** с входным сопротивлением $R_{\text{вх}} = \sum_{k=1}^K R_k$. **Коэффициент деления напряжения** при снятии его с R_n :

$$K_{D_{R_n}} = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{R_n}{R_{\text{вх}}} = \frac{R_n}{\sum_{k=1}^K R_k}. \quad (4.4)$$

Параллельная резистивная цепь представляет собой делитель тока с входным сопротивлением: $\frac{1}{R_{\text{вх}}} = \sum_{k=1}^K \frac{1}{R_k}$. **Коэффициент деления тока** при снятии его с R_n :

$$K_{\mathcal{D}_{R_n}} = \frac{I_{\mathcal{E}blx}}{I_{\mathcal{E}x}} = \frac{R_{\mathcal{E}x}}{R_n}. \quad (4.5)$$

Цепи со смешанным соединением элементов анализируют на постоянном сигнале множеством методов. В их числе – метод уравнений Кирхгофа и метод контурных токов.

Метод уравнений Кирхгофа включает следующие этапы.

1) Задать направления обхода контуров и направления токов в ветвях (произвольно).

2) Определить число уравнений, составляемых по 1-му (n_1) и по 2-му (n_2) правилам Кирхгофа:

$$n_1=N_y-1, \quad n_2=N_B-N_T-N_y+1,$$

где N_y – число узлов, N_T – число источников тока, N_B – число ветвей в цепи.

3) Составить систему $(n_1 + n_2)$ уравнений. Знак в ветви тока брать "+", если его направление совпадает с направлением обхода контура, и "-" иначе. Знак э.д.с. брать "+", если ее направление совпадает с направлением обхода контура, где источник включен, и "-" иначе.

4) Решить ее относительно токов в ветвях.

5) По закону Ома найти напряжение на каждом элементе цепи.

Метод контурных токов включает следующие этапы.

1) Выделить n_2 независимых контуров и определить в них направление контурных токов I_{ji} , $i = 1, \dots, n_2$.

2) Составить по 2-му правилу Кирхгофа систему n_2 уравнений.

$$\left\{ \begin{array}{l} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} + ... + R_{1n_2}I_{n_2 n_2} = E_{11}, \\ \\ R_{n_2 1}I_{11} + R_{n_2 2}I_{22} + ... + R_{n_2 n_2}I_{n_2 n_2} = E_{n_2 n_2}, \end{array} \right. \quad (4.6)$$

где R_{ii} – сопротивление всех элементов i -го контура, E_{ii} – сумма включенных в нем э.д.с., R_{ij} – сопротивление ветви, общей для контуров i и j (берется со знаком "+", если контурные токи через эту ветвь сонаправлены, и "-" иначе). Знаки токов и э.д.с. такие же, как в методе уравнений Кирхгофа.

3) Решить ее относительно контурных токов.

4) Пользуясь 1-м правилом Кирхгофа, найти реальные токи в ветвях через контурные.

5) По закону Ома найти напряжение на каждом элементе цепи.

Правильность расчета можно проверить, рассчитав **баланс мощностей** в схеме. Мощность, отдаваемая источниками:

$$P_{ист} = \sum_{i=1}^N I_i E_i + \sum_{j=1}^M J_j U_j, \text{ где } I_i - \text{ток, протекающий через } i\text{-ый}$$

источник э.д.с. E_i , U_j – напряжение на клеммах j -го источника тока с током J_j . Мощность, потребляемая приемниками, равна

$$P_{пр} = \sum_{k=1}^K I_k^2 R_k. \text{ Баланс сходится, если } P_{ист} = P_{пр}.$$

Пример П.4.1. Найти входное сопротивление, коэффициент деления при снятии с R_2 и выходное напряжение в схеме, изображенной на рис. 4.1, если $E = 10$ В, $R_1 = 1$ кОм, $R_2 = 4$ кОм.

Решение.

Входным сопротивлением делителя напряжения является сопротивление этой последовательной цепи:

$$R_{\text{вх}} = R_1 + R_2 = (1 + 4) \text{ кОм} = 5 \text{ кОм}.$$

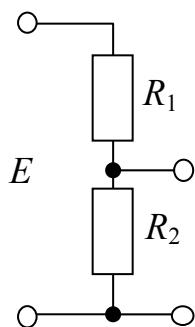


Рис. 4.1

Коэффициент деления при снятии с R_2 равен

$$K_{\mathcal{D}_{R_2}} = R_2 / R_{\text{вх}} = 4 / 5 = 0,8.$$

Выходное напряжение определяется через коэффициент деления:

$$U_{вых} = U_{ex} K_{D_{R_2}} = 10 \text{ В} \cdot 0,8 = 8 \text{ В}.$$

Пример П.4.2. Построить делитель тока на резисторах R_1 и R_2 со входным сопротивлением 10 кОм и коэффициентом деления при снятии с R_1 , равным 2/3.

Решение.

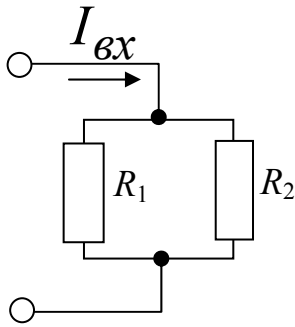


Рис. 4.2

Делитель тока строится как параллельное соединение резисторов R_1 и R_2 (рис. 4.2). Рассчитать схему означает найти номиналы этих резисторов. Для этого пользуемся заданными условиями по входному сопротивлению и коэффициенту деления.

Коэффициент деления тока при снятии с

R_1 имеет вид: $K_{D_{R_1}} = \frac{R_{ex}}{R_1}$, откуда

$$R_1 = \frac{R_{ex}}{K_{D_{R_1}}} = \frac{10 \text{ кОм}}{2/3} = 15 \text{ кОм}.$$

Входное сопротивление делителя тока находится как:

$$\frac{1}{R_{ex}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2},$$

откуда

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_{ex}} - \frac{1}{R_1} = \frac{1}{30 \cdot 10^3},$$

поэтому $R_2 = 30 \text{ кОм}$.

Итак, схема представляет собой параллельное соединение резисторов с номиналами 15 и 30 кОм.

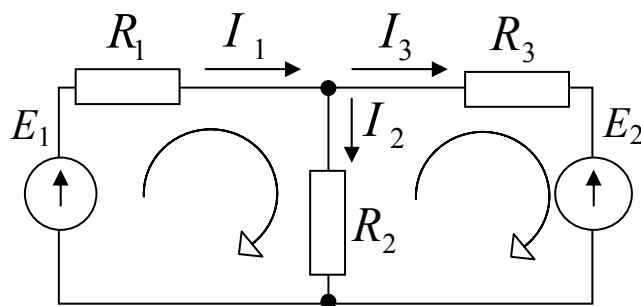


Рис. 4.3

Пример П.4.3. Найти все токи и напряжения в схеме рис. 4.3 методом уравнений Кирхгофа, если $E_1 = 5 \text{ В}$, $E_2 = 5 \text{ В}$, $R_1 = R_3 = 1 \text{ Ом}$, $R_2 = 2 \text{ Ом}$.

Решение.

Топологически в этой схеме можно выделить $N_B = 3$ ветви, $N_y = 2$ узла, 0 источников тока, $n_2 = N_y - N_T - N_B + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ независимых контура.

1. Выбираем два контура (левый и правый) и отмечаем направления их обхода (по часовой стрелке). Задаем направления токов I_1, I_2, I_3 в ветвях.

2. Определяем число уравнений: $n_1 = N_y - N_T - 1 = 2 - 0 - 1 = 1$, $n_2 = 2$.

3. Рассмотрим верхний узел. Запишем для него 1-ое правило Кирхгофа:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Обходя контуры по часовой стрелке, запишем 2 уравнения по 2-му правилу Кирхгофа. Для левого контура:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = E_1.$$

Для правого:

$$I_3 R_3 - I_2 R_2 = -E_2.$$

4. Подставляем значения и решаем полученную систему 3-х уравнений любым методом, в том числе в MathCad. Получаем $I_1 = 1 \text{ А}$, $I_2 = 2 \text{ А}$, $I_3 = -1 \text{ А}$. Знак "-" означает, что реальный ток течет в направлении, противоположном выбранному.

5. По закону Ома находим напряжение на элементах цепи:

$$U_1 = R_1 I_1 = 1 \text{ Ом} \cdot 1 \text{ А} = 1 \text{ В},$$

$$U_2 = R_2 I_2 = 2 \text{ Ом} \cdot 2 \text{ А} = 4 \text{ В},$$

$$U_3 = R_3 I_3 = 1 \text{ Ом} \cdot (-1) \text{ А} = -2 \text{ В}.$$

Пример П.4.4. Найти все токи и напряжения в схеме рис. 4.3 по условиям примера П.4.3 методом контурных токов.

Решение.

1. Выделяем $n_2 = 2$ независимых контура (левый и правый) и вводим контурные токи $I_{11} = I_1$, $I_{22} = I_3$.

2. Составляем систему из 2-х уравнений:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} + R_{12}I_{22} = E_{11}, \\ R_{21}I_{11} + R_{22}I_{22} = E_{22}, \end{cases}$$

где сопротивление первого (левого) контура $R_{11} = R_1 + R_2$, второго (правого) $R_{22} = R_2 + R_3$. Общей для контуров является ветвь с R_2 . Так как контурные токи I_{11} и I_{22} через этот резистор противоположно направлены, то $R_{12} = R_{21} = -R_2$. Эдс, включенная в первом контуре, $E_{11} = E_1$, во втором $E_{22} = -E_2$. Подставляем эти величины в систему:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ -E_2 \end{pmatrix}.$$

3. Подставив значения в систему, решаем ее любым методом. Контурные токи равны $I_{11} = 1 \text{ А}$, $I_{22} = -1 \text{ А}$.

4. Выражаем реальные токи через контурные: $I_1 = I_{11} = 1 \text{ А}$, $I_3 = I_{22} = -1 \text{ А}$. По 1-му правилу Кирхгофа для верхнего узла в схеме: $I_1 = I_2 + I_3$, откуда $I_2 = I_1 - I_3 = 2 \text{ А}$.

5. Напряжения находятся по закону Ома. Ответы совпадают с ответами примера П.4.3.

Пример П.4.5. Проверить баланс мощностей в задачах П.4.3–П.4.4.

Решение.

Через источник э.д.с. E_1 протекает ток I_1 , а через источник E_2 – ток I_3 .

Составим для удобства расширенную таблицу ответов в следующей форме (табл. 4.1).

Таблица 4.1

Элемент	R_1	R_1	R_3	E_1	E_2
Ток	1А	2А	-1А	1А	-1А
Напряжение	1В	4В	-2В	5В	5В

Мощность, отдаваемая источниками, равна:

$$P_{ист} = |E_1 I_1| + |E_2 I_3| = 5 \cdot 1 + |5 \cdot (-1)| = 10 \text{ Вт.}$$

Мощность, расходуемая в приемниках, равна:

$$P_{пр} = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3 = 1 \cdot 1 + 2^2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot 1 = 10 \text{ Вт.}$$

Так как $P_{ист} = P_{пр} = 10 \text{ Вт}$, то баланс сошелся.

Задачи для решения

4.1. Найти входное сопротивление делителя напряжения на резисторах R_1 и R_2 и коэффициент деления при снятии с R_2 , если $U_{вх} = 5 \text{ В}$, $R_1 = 3 \text{ кОм}$, $R_2 = 7 \text{ кОм}$.

4.2. Найти коэффициент деления тока при снятии с R_1 и входное сопротивление делителя на резисторах R_1 и R_2 , если $I_{вх} = 6 \text{ А}$, $R_1 = 4 \text{ кОм}$, $R_2 = 3 \text{ кОм}$.

4.3. Построить делитель напряжения на резисторах R_1 и R_2 , обеспечивающий коэффициент деления при снятии с R_2 , равный $1/5$, при входном сопротивлении 10 кОм .

4.4. Построить делитель тока на резисторах R_1 и R_2 , обеспечивающий коэффициент деления при снятии с R_1 , равный $3/4$, при входном сопротивлении $3/4\text{ кОм}$.

4.5. Построить делитель напряжения на резисторах R_1 , R_2 , R_3 с переключающимся коэффициентом деления, обеспечивающий коэффициент деления при снятии с R_1 , равный $1/2$, при снятии с R_3 , равный $1/4$, со входным сопротивлением 10 кОм . Найти все остальные коэффициенты деления в схеме.

4.6. Построить простейший делитель напряжения с плавной регулировкой коэффициента деления от 0 до 1 .

4.7. Найти все токи и напряжения в схеме, изображенной на рис. 4.4, методом контурных токов. Проверить баланс мощностей. $R_1 = R_2 = R_4 = 4\text{ Ом}$, $R_3 = R_5 = 2\text{ Ом}$, $E = 10\text{ В}$.

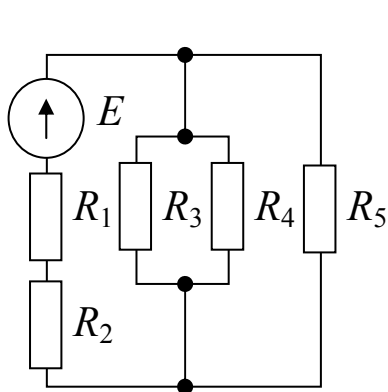


Рис. 4.4

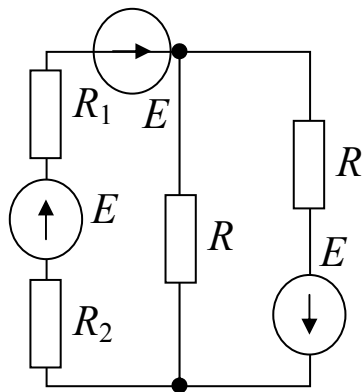


Рис. 4.5

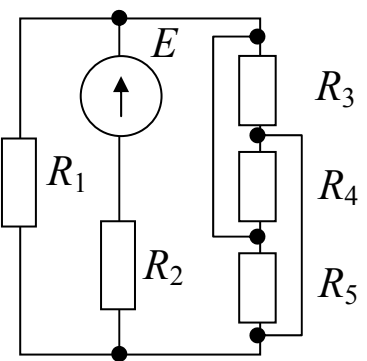


Рис. 4.6

4.8. Найти все токи и напряжения в схеме из задачи 4.7 (рис. 4.4) методом уравнений Кирхгофа. Проверить баланс мощностей.

4.9. Найти все токи и напряжения в схеме, изображенной на рис. 4.5, обоими методами. $R_1 = 1\text{ Ом}$, $R_2 = R_3 = R_4 = 2\text{ Ом}$, $E_1 = E_3 = 2\text{ В}$, $E_2 = 6\text{ В}$.

4.10. Найти все токи и напряжения в схеме, изображенной на рис. 4.6. $R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}$, $R_3 = R_4 = R_5 = 6 \text{ Ом}$, $E = 6 \text{ В}$. Проверить баланс мощностей.

4.11. Найти входное сопротивление и общий ток в цепи на рис. 4.4.

4.12. Найти входное сопротивление и общий ток в цепи на рис. 4.6.

5. Цепи при гармоническом воздействии

Гармонические сигналы можно описать несколькими способами:

- аналитически во времени: $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$;
- эквивалентным ему постоянным сигналом с действующим (эффективным) напряжением $U_D = U / \sqrt{2}$ или током $I_D = I / \sqrt{2}$;

- соответствующим ему аналитическим сигналом $\dot{z}(t) = A e^{i(\omega t + \phi)} = \dot{A} e^{i\omega t}$;

- эквивалентным аналитическому комплексным постоянным сигналом с комплексным действующим значением $\dot{A}_D = \dot{A} / \sqrt{2} = A e^{i\phi} / \sqrt{2}$.

Аналитические сигналы изображают векторами на комплексной плоскости.

Для гармонических воздействий справедливы законы в комплексной форме (для комплексных амплитуд сигналов) – закон Ома

$$\dot{I} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}} \quad (5.1)$$

и правила Кирхгофа

$$\sum_{n=1}^N \dot{I}_n = 0, \quad \sum_{k=1}^K \dot{I}_k \dot{Z}_k = \sum_{m=1}^M \dot{E}_m, \quad (5.2)$$

где \dot{Z} – импеданс цепи.

Импедансы простейших линейных элементов:

$$\dot{Z}_R = R, \quad \dot{Z}_L = i\omega L, \quad \dot{Z}_C = \frac{1}{i\omega C}. \quad (5.3)$$

Пример П.5.1. На входе некоторой цепи действуют два сигнала: $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \phi_1)$, $u_2(t) = U_2 \cos(\omega t + \phi_2)$. Найти амплитуду, комплексную амплитуду и действующее напряжение полного входного сигнала, если $U_1 = 1$ В, $U_2 = 2$ В, $\phi_1 = 30^\circ$ градусов, $\phi_2 = -60^\circ$ градусов.

Решение.

Найдем аналитические сигналы, соответствующие этим вещественным:

$$\dot{u}_1(t) = U_1 e^{i(\omega t + \phi_1)}, \quad \dot{u}_2(t) = U_2 e^{i(\omega t + \phi_2)}.$$

Их комплексные амплитуды равны:

$$\dot{U}_1 = U_1 e^{i\phi_1} = U_1 \cos \phi_1 + i U_1 \sin \phi_1 = 1 \cdot \cos(\pi / 6) + 1 \cdot i \sin(\pi / 6) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2}.$$

$$\dot{U}_2 = U_2 e^{i\phi_2} = U_2 \cos \phi_2 + i U_2 \sin \phi_2 = 2 \cdot \cos(\pi / 3) - 2 \cdot i \sin(\pi / 3) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Так как сигналы одной частоты, то векторы, представляющие на комплексной плоскости аналитические сигналы, будут вращаться со временем против часовой стрелки (в сторону роста фазы) с одной скоростью, так что эти вектора можно складывать, как если бы картина была неподвижной (векторы не движутся относительно друг друга). Это соответствует алгебраическому сложению комплексных амплитуд:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} + 1 - i\sqrt{3} = \frac{2 + \sqrt{3}}{2} + i \frac{1 - 2\sqrt{3}}{2} \text{ В.}$$

Амплитуда сигнала – это модуль комплексной амплитуды:

$$U = |\dot{U}| = \sqrt{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{5} \text{ В.}$$

Фаза сигнала – это аргумент комплексной амплитуды (рис. 5.1):

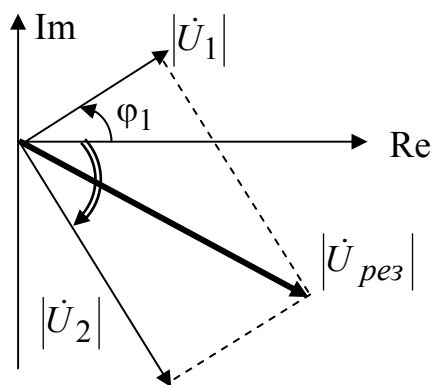


Рис. 5.1

$$\phi = \arctg \frac{\text{Im}(\dot{U})}{\text{Re}(\dot{U})} = \arctg \frac{1-2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \approx -0,584 \text{ рад},$$

т. е. 33,44 градуса.

Комплексная амплитуда результирующего сигнала:

$$\dot{U} = \sqrt{5}e^{-i0,584} \text{ В.}$$

Действующее напряжение входного сигнала:

$$U_D = \frac{U}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2,5} \text{ В.}$$

Итак, на цепь действует сигнал

$$u_{рез}(t) = \sqrt{5} \cos(\omega t - 0,584) \text{ В.}$$

Можно проверить себя, векторно сложив комплексные амплитуды.

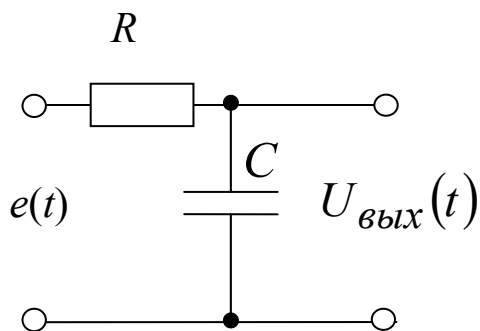


Рис. 5.2

Пример П.5.2. Построить векторную диаграмму токов и напряжений в RC цепи (напряжение снимается с конденсатора, рис. 5.2) при входном сигнале $e(t) = E \cos(\omega_0 t + \phi_E)$.

Решение.

Чтобы построить векторную диаграмму, надо найти комплексные амплитуды всех токов и напряжений.

Сначала найдем входной импеданс цепи. Так как она последовательная, то

$$\dot{Z}_{\text{вх}} = \dot{Z}_R + \dot{Z}_C = R + \frac{1}{i\omega C} = R \left[1 - \frac{i}{\omega RC} \right].$$

Его модуль и аргумент:

$$|\dot{Z}_{\text{вх}}| = \sqrt{\text{Re}^2(\dot{Z}_{\text{вх}}) + \text{Im}^2(\dot{Z}_{\text{вх}})} = R \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}},$$

$$\phi_z = \arctg \frac{\text{Im}(\dot{Z}_{\text{вх}})}{\text{Re}(\dot{Z}_{\text{вх}})} = -\arctg \left(\frac{1}{\omega RC} \right).$$

Входному сигналу $e(t)$ соответствует аналитическое напряжение $\dot{e}(t) = E e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} = \dot{E} e^{i\omega_0 t}$. Так как цепь линейна, то она не порождает новых частот в спектре сигнала, и ток в цепи будет гармоническим той же частоты: $i(t) = I \cos(\omega_0 t + \phi_I)$. Ему соответствует аналитический ток $\dot{i}(t) = \dot{I} e^{i\omega_0 t}$.

Комплексную амплитуду тока в цепи найдем из комплексной формы закона Ома:

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\dot{Z}_{ex}} = \frac{|\dot{E}|}{|\dot{Z}_{ex}|} e^{i(\phi_E - \phi_z)} = |\dot{I}| e^{i\phi_I}.$$

Подставляем найденные модуль и аргумент импеданса:

$$|\dot{I}| = \frac{E}{R \sqrt{1 + \frac{1}{(\omega RC)^2}}} = \frac{E \omega C}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \phi_I = \phi_E + \arctg\left(\frac{1}{\omega RC}\right).$$

Комплексная амплитуда выходного напряжения:

$$\dot{U}_C = \dot{I} \dot{Z}_C = \frac{\dot{I}}{i \omega C} = \frac{|\dot{I}|}{\omega C} e^{i(\phi_I - \pi/2)}.$$

Комплексная амплитуда напряжения на резисторе:

$$\dot{U}_R = \dot{I} \dot{Z}_R = \dot{I} R = |\dot{I}| \operatorname{Re} e^{i\phi_I}.$$

Изобразим все векторы на векторной диаграмме (рис. 5.3).

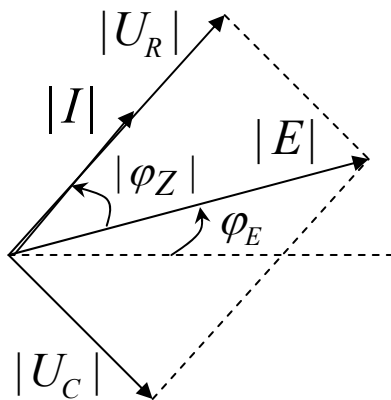


Рис. 5.3

Ток опережает входное напряжение по фазе на $|\phi_z|$, с ним синфазно напряжение на резисторе. Напряжение на конденсаторе отстает от тока на $\pi/2$ по фазе.

Тот факт, что входное напряжение $e(t)$ делится между резистором и конденсатором, отражен на векторной диаграмме: вектор комплексной амплитуды воздействия \dot{E} – сумма векторов \dot{U}_R и \dot{U}_C .

Так как цепь линейная, то $e(t)$, $i(t)$, $u_R(t)$ и $u_C(t)$ синхронны, т. е. если вращать плоскость рис. 5.3 с частотой ω_0 против часовой стрелки, то чертеж выглядит неподвижным.

Задачи для решения

5.1. Построением векторной диаграммы докажите, что ток через конденсатор опережает напряжение на нем на $\pi/2$, а через катушку – отстает по фазе на $\pi/2$.

5.2. При подаче на вход линейной цепи напряжения $u_1(t)$ на выходе ток составляет $\cos(10^2 t + \pi/4)$ мА, при подаче $u_2(t) - 5\cos(10^2 t - \pi/4)$ мА. Найдите амплитуду, фазу, действующее значение тока при одновременном воздействии $u_1(t)$ и $u_2(t)$. Постройте векторную диаграмму.

5.3. Линейная цепь состоит из последовательно соединенных элементов, напряжения на которых $u_1(t) = 2\cos^2(10^4 t + \pi/4)$ и $u_2(t) = -2\sin^2(10^4 t)$. Найти входное напряжение.

5.4. Найти входной импеданс и построить векторную диаграмму токов и напряжений для LR-цепи.

5.5. Построить векторную диаграмму токов и напряжений в последовательном колебательном контуре.

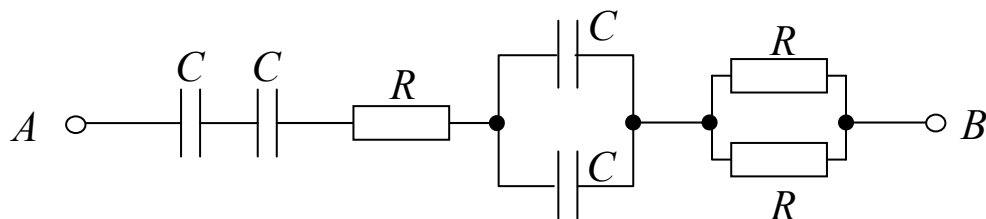


Рис. 5.4

5.6. Найти импеданс цепи, изображенной на рис. 5.4, относительно клемм АВ.

5.7. Найти продолжительность переходного процесса в резистивно-емкостных цепях, если $R = 1$ кОм, $C = 1$ мкФ, в резистивно-индуктивных цепях, если $R = 1$ кОм, $L = 100$ мкГн.

5.8. Каков вид выходного процесса в последовательном колебательном контуре с $C = 100$ пФ, $L = 100$ мкГн при: а) $R = 10$ Ом; б) 1 кОм? Каковы характеристическое сопротивление контура, резонансная частота? Какова добротность контура в обоих случаях? Чему равна в обоих случаях полоса пропускания контура?

6. Методы анализа линейных цепей

Линейная цепь характеризуется следующими параметрами.

Частотный коэффициент передачи по напряжению:

$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{U}_{\text{вых}}(\omega)}{\dot{U}_{\text{вх}}(\omega)}. \quad (6.1)$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) – модуль КП $|\dot{K}(\omega)|$, **фазо-частотная характеристика** – аргумент КП $\phi(\omega) = \arg \dot{K}(\omega)$.

Импульсная характеристика (ИХ) $h(t)$ – реакция цепи на δ -функцию, **переходная характеристика** (ПХ) $g(t)$ – реакция цепи на σ -функцию.

ИХ и КП связаны преобразованиями Фурье:

$$\dot{K}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(\omega)e^{i\omega t} d\omega. \quad (6.2)$$

ИХ и ПХ связаны так же, как δ -функция и σ -функция:

$$\delta(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad h(t) = \frac{dg(t)}{dt}. \quad (6.3)$$

Операторная передаточная функция – отношение L-образов отклика и воздействия:

$$H(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)}.$$

Она связана с КП следующим образом: $\dot{K}(\omega) = H(p = i\omega)$.

Полоса пропускания цепи определяется из условия

$$|\dot{K}_U(\omega_{cp})| = \frac{K_{U_{\max}}}{\sqrt{2}}.$$

Подобно тому, как КП и ИХ связаны преобразованиями Фурье, операторная передаточная функция и ИХ связаны преобразованиями Лапласа.

L-образы импедансов простейших элементов цепей:

$$Z_R(p) = R, \quad Z_L(p) = pL, \quad Z_C(p) = \frac{1}{pC}. \quad (6.4)$$

Пример П.6.1. Найти КП по напряжению, АЧХ и ФЧХ RC-цепи.

Решение.

Цепь является последовательной, поэтому в ней течет один ток и КП (6.1) можно представить в виде:

$$\dot{K}_U(\omega) = \frac{\dot{Z}_{\text{вых}}(\omega)}{\dot{Z}_{\text{вх}}(\omega)} = \frac{\dot{Z}_C}{\dot{Z}_C + \dot{Z}_R} = \frac{\frac{1}{\omega C}}{\frac{1}{\omega C} + R} = \frac{1}{1 + i\omega RC}.$$

Обозначим $\tau = RC$. АЧХ представляет собой модуль КП: $|\dot{K}_U(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}}$. На нулевой частоте значение АЧХ максимально равно 1, с ростом частоты функция монотонно убывает.

ФЧХ цепи – аргумент КП: $\phi(\omega) = \text{arctg}(-\omega\tau) = -\text{arctg}(\omega\tau)$. На нулевой частоте $\phi(0) = 0$.

Найдем граничную частоту:

$$|\dot{K}_U(\omega_{cp})| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{cp}^2 \tau^2}} = \frac{K_{U_{\max}}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда $\omega_{\text{зр}} = 1/\tau$. Полоса пропускания цепи составляет $\omega \in [0, 1/\tau]$.

Пример П.6.2. Найти передаточную и импульсную характеристики RC-цепи.

Решение.

Первый способ. Составим дифференциальное уравнение, описывающее цепь. Так как она последовательная, то воздействие делится между напряжением на конденсаторе и на резисторе:

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = i(t)R + u_C(t).$$

Выразим правую часть в терминах выходного напряжения $u_{\text{вых}}(t) = u_C(t)$. Ток через конденсатор является общим в цепи:

$$i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} = C \frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt}.$$

Учтя, что $u_R(t) = i(t)R$ и обозначив $\tau = RC$, получаем уравнение

$$RC \frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt} + u_{\text{вых}}(t) = e(t), \quad \tau \frac{du_{\text{вых}}(t)}{dt} + u_{\text{вых}}(t) = e(t).$$

Поскольку нас интересует переходная характеристика – реакция цепи на σ -функцию, то ищем решение дифференциального уравнения с правой частью в виде σ -функции. Поскольку цепь интегрирует сигнал инерционно, то в начальный момент напряжение на конденсаторе равно нулю, т. е. начальные условия для уравнения: $u(0) = 0$.

Получаем переходную характеристику цепи:

$$g(t) = 1 - e^{-t/\tau}.$$

В нуле $g(0)=1-1=0$, с течением времени цепь стремится повторить воздействие: $g(\infty)=1$, а τ показывает скорость нарастания выходного напряжения.

Так как импульсная характеристика – это производная от ПХ, то

$$h(t) = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Второй способ. Так как импульсная характеристика и КП связаны преобразованием Фурье, то ИХ можно найти, взяв обратное преобразование Фурье от найденного в примере П.6.1 КП $\dot{K}_U(\omega) = \frac{1}{1+i\omega\tau}$. Переходная характеристика находится интегрированием импульсной и заданием условия $u(0)=0$, следующего из физического устройства цепи.

Пример П.6.3. Составить операторное уравнение, найти операторную передаточную функцию, КП и ИХ RC-цепи.

Решение.

Записываем для цепи 2-ое правило Кирхгофа в операторной форме:

$$E(p) = U_R(p) + U_C(p) = I(p)Z_R(p) + U_{\text{вых}}(p).$$

Выразим L-образ тока через L-образ выходного напряжения:

$$I_C(p) = I(p) = \frac{U_C(p)}{Z_C(p)} = \frac{U_C(p)}{\frac{1}{pC}} = pCU_{\text{вых}}(p).$$

Получаем

$$E(p) = pRCU_{\text{вых}}(p) + U_{\text{вых}}(p), \quad \tau = RC$$

откуда

$$H(p) = \frac{U_{\text{вых}}(p)}{E(p)} = \frac{1}{1 + p\tau}.$$

Передаточную функцию можно и сразу записать как отношение операторных сопротивлений, так как цепь последовательная:

$$H(p) = \frac{Z_{\text{вых}}(p)}{Z_{\text{вх}}(p)} = \frac{\frac{1}{pC}}{R + \frac{1}{pC}} = \frac{1}{1 + p\tau}.$$

Коэффициент передачи получается из операторной функции подстановкой:

$$\dot{K}(\omega) = H(p = i\omega) = \frac{1}{1 + i\omega\tau}.$$

ИХ – это обратное преобразование Лапласа от передаточной функции:

$$h(t) = L^{-1}[H(p)] = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}.$$

Задачи для решения

6.1. Найти КП, АЧХ, ФЧХ и полосу пропускания CR-цепи (напряжение снимается со второго элемента – с резистора).

6.2. Найти КП, АЧХ, ФЧХ и полосу пропускания LR-цепи (напряжение снимается со второго элемента – с резистора).

6.3. Найти КП, АЧХ, ФЧХ и полосу пропускания RL-цепи (напряжение снимается со второго элемента – с катушки).

6.4. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее CR-цепь, и найдите ее ПХ и ИХ.

6.5. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее LR-цепь, и найдите ее ПХ и ИХ.

6.6. Составьте дифференциальное уравнение, описывающее RL-цепь, и найдите ее ПХ и ИХ.

6.7. Составьте операторное уравнение, найдите операторную передаточную функцию, КП и ИХ CR-цепи.

6.8. Составьте операторное уравнение, найдите операторную передаточную функцию, КП и ИХ LR-цепи.

6.9. Составьте операторное уравнение, найдите операторную передаточную функцию, КП и ИХ RL-цепи.

6.10. Составьте операторное уравнение, найдите операторную передаточную функцию и КП последовательного колебательного контура.

7. Нелинейные элементы

Нелинейные резистор, конденсатор, катушка, описываемые функциями $i(u) = f_R(u) = I_0 + \delta i(t)$, $q(u) = f_C(u) = Q_0 + \delta q(t)$, $\Phi(i) = f_L(i) = \Phi_0 + \delta \Phi(t)$, имеют следующие параметры.

статические	динамические
$R_0 = \frac{U_0}{I_0} = \frac{U_0}{f_R(U_0)}$	$r_D(u) = \left[\frac{di(u)}{du} \right]^{-1} = \left[\frac{df_R(u)}{du} \right]^{-1}$
$C_0 = \frac{Q_0}{U_0} = \frac{f_C(U_0)}{U_0}$	$C_D(u) = \frac{dq(u)}{du} = \frac{df_C(u)}{du}$
$L_0 = \frac{\Phi_0}{I_0} = \frac{f_L(I_0)}{I_0}$	$L_D(i) = \frac{d\Phi(i)}{di} = \frac{df_L(i)}{di}$

Для резистивных нелинейных элементов (НЭ) часто используют полиномиальную аппроксимацию:

$$i(u) = f_R(u) = I_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3 + \dots + a_n u^n,$$

где коэффициенты $a_n = \frac{1}{n!} \frac{df}{du} \Big|_{u=U_0}$, причём $a_1 = \frac{df}{du}$ имеет смысл крутизны ВАХ.

Чтобы найти спектр тока, протекающего через НЭ с полиномиальной ВАХ, нужно подставить выражение для приложенного напряжения в ВАХ.

Отклик НЭ на воздействие ищется либо аналитически, либо графически методом проекций.

При последовательном соединении двух элементов (неважно, линейных или нет) распределение напряжения между ними можно найти методом опрокинутой характеристики.

Пример П.7.1. ВАХ НЭ имеет вид $i(u) = 1 + u + 2u^2$ мА при $u \geq 0$. Найти диапазон значений тока, протекающего через элемент, и диапазон значений динамического сопротивления при напряжении на элементе, изменяющемся по закону $u(t) = 2 \cos(10^4 t)$ В.

Решение.

Заметим, что входное напряжение биполярное, но элемент с данной ВАХ должен отсекал отрицательные полупериоды, значит, минимальным значением тока будет нулевое.

Максимальное значение найдем прямой подстановкой (так как ВАХ монотонно возрастающая функция, то максимуму напряжения будет соответствовать максимум тока):

$$i_{\max} = i(u_{\max}) = i(2B) = 1 + 2 + 2 \cdot 2^2 = 11 \text{ мА.}$$

Получаем диапазон значений тока $i \in [0; 11]$ мА.

Динамическое сопротивление, по определению, обратно производной от ВАХ. Выразим ток в амперах и найдем динамическое сопротивление:

$$r_D(u) = \left[\frac{d}{du} (10^{-3} + 10^{-3}u + 2 \cdot 10^{-3}u^2) \right]^{-1} = \frac{10^3}{1 + 4u} \text{ Ом.}$$

При максимальном напряжении $r_D(2B) = \frac{1}{1 + 4 \cdot 2} = 1/9$ кОм – минимально. Для нулевого напряжения получаем

$r_D(0B) = 1$ кОм – максимальное. Итого диапазон значений динамического сопротивления составил $r_D \in [1/9; 1]$ кОм.

Пример П.7.2. Найти спектр тока, протекающего через НЭ с ВАХ $i(u) = u + u^2$ при $u(t) = E \cos(\omega_0 t)$.

Решение.

Подставим $u(t)$ в ВАХ:

$$i(u) = E \cos(\omega_0 t) + (E \cos(\omega_0 t))^2 = E \cos(\omega_0 t) + \frac{E^2}{2} + \frac{E^2}{2} \cos(2\omega_0 t).$$

Спектр состоит из трех составляющих: постоянной $I_0 = E^2 / 2$, основного тона (на частоте ω_0) $I_1 = E$ и второй гармоники (на частоте $2\omega_0$) $I_2 = E^2 / 2$.

Задачи для решения

7.1. ВАХ элемента имеет вид $i(u) = 2 + 3u + u^2$ мА для $u \geq 0$. Найдите диапазон значений тока, сопротивление по постоянному сигналу и диапазон значений динамического сопротивления при напряжении на элементе $u(t) = 1 + 2 \cos(10^4 t + \pi / 4)$ В.

7.2. Методом проекций получите форму тока через НЭ из задачи 7.1.

7.3. Две лампы накаливания включены параллельно друг другу и через резистор сопротивлением 100 Ом подключены к источнику э.д.с. 0,5 В. ВАХ ламп:

$$I_1 = 0.05U_1 + 10^{-3}U_1^2,$$

$I_2 = 0.02U_2 + 0.5 \cdot 10^{-3}U_2^2$. Найти ток и напряжение в лампах.

7.4. Одна из схем стабилизации напряжения на нагрузке представляет собой последовательно включенные резистор сопротивлением 1 кОм и стабилитрон с ВАХ, изо-

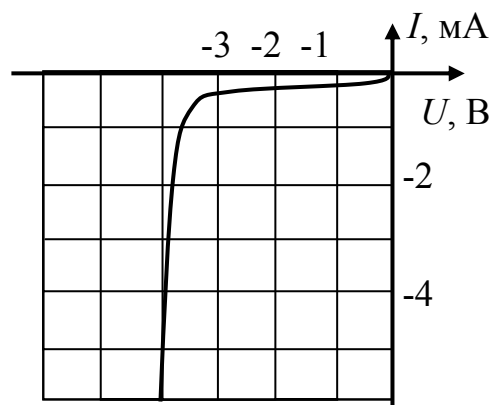


Рис. 7.1

браженной на рис. 7.1. Методом опрокинутой характеристики найти и построить зависимость напряжения на стабилитроне от входного в диапазоне от 0 до 5 В.

7.5. Варикап описывается вольт-кулонной характеристикой $q(u) = 2C_0\phi_K\sqrt{1+u/\phi_K}$ Кл, где $C_0 = 1$ пФ, $\phi_K = 1$ В. Найдите динамическую емкость, диапазон ее значений, если $u(t) = 0.5\cos(100t)$ В.

7.6. Найдите спектр тока, протекающего через НЭ с ВАХ $i(u) = u^2 - 1$ мА, если $u(t) = 2 + \cos(10^3 t)$ В.

7.7. Покажите, какой НЭ нужно взять, чтобы получить умножение частоты входного сигнала в 4 раза. Как зависит от напряжения динамическое сопротивление такого элемента? Что можно сказать о фильтрах, необходимых в схеме умножителя, построенного на таком НЭ?

7.8. В спектре тока через НЭ при воздействии $e(t) = 10\cos(10^4 t)$ В обнаружили: постоянная составляющая 25 мА, основной тон (10^4 рад/с) 9 мА, вторая гармоника ($2 \cdot 10^4$ рад/с) 25 мА. Восстановите ВАХ НЭ.

7.9. НЭ имеет ВАХ с $S = 10^{-1}$ См, $E_n = 2$ В. Какую батарею U_0 нужно включить одновременно с сигналом $u(t) = 10\cos(2\pi 10^3 t)$ В, чтобы импульсы тока отсекались при фазе 60 градусов? Найдите постоянную составляющую в спектре тока.

7.10. Элемент с каким началом характеристики $S = 10^{-1}$ См нужно использовать, чтобы импульсы тока при $u(t) = 2 + 2\cos(2\pi 10^4 t)$ В отсекались при фазе 45 градусов? Найдите первую гармонику в спектре тока.

7.11. Элемент с какой крутизной ВАХ при $E_n = 3,5$ В и какую батарею U_0 нужно обеспечить, чтобы при сигнале $u(t) = 10\cos(2\pi 10^5 t)$ В импульсы тока отсекались при фазе 30 градусов, а постоянная составляющая в спектре тока равнялась 26 мА?

7.12. НЭ имеет ВАХ с $S = 5 \cdot 10^{-3}$ См, $E_H = 2$ В, $U_0 = 1$ В. Какая амплитуда сигнала на частоте 100 кГц обеспечит угол отсечки тока 45 градусов? Найдите первую гармонику в спектре тока.

7.13. Нелинейный элемент имеет ВАХ с $S = 10^{-2}$ См, $E_H = 3$ В. Найдите спектр тока при $u(t) = 5 \cos(2\pi 10^4 t) + 10 \cos(2\pi 10^6 t)$ В.

8. Цепи с распределенными параметрами

Цепь считается *цепью с распределенными параметрами*, если ее длина сравнима с длиной волны или разность фаз тока в начале цепи и в конце составляет более, чем $\pi/8$.

Время прохождения сигнала вдоль линии длиной l $t \approx l/c$, где c – скорость света в вакууме.

Линия характеризуется **характеристическим сопротивлением**:

$$Z_0 = \sqrt{L/C}, \quad (8.1)$$

где L и C – погонные индуктивность и емкость линии, т. е. индуктивность и емкость одного метра длины.

Постоянная распространения волн $\gamma = \frac{2\pi}{\lambda_g}$, где λ_g – длина волны в линии (волноводе или кабеле).

Напряжение и ток на входе линии длины l с нагрузкой:

$$\dot{U}_{вх} = \dot{U}_H \cos \gamma l - i \dot{I}_H \sin \gamma l, \quad (8.2)$$

$$\dot{I}_{вх} = \dot{I}_H \cos \gamma l + i \frac{\dot{U}_H}{Z_0} \sin \gamma l. \quad (8.3)$$

Коэффициент отражения волн в линии:

$$\dot{K}_{отр} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{Z}_H - Z_0}{\dot{Z}_H + Z_0}, \quad (8.4)$$

где \dot{U}_2 – комплексная амплитуда отраженной от нагрузки (обратной) волны напряжения, \dot{U}_1 – комплексная амплитуда прямой (следующей от генератора) волны напряжения.

Качество рабочего режима в линии показывают **коэффициент стоячей волны** (КСВ) и **коэффициент бегущей волны** (КБВ):

$$КСВ^2 = \left(\frac{E_{\max}}{E_{\min}} \right)^2 = \frac{1 + |\dot{K}_{\text{отр}}|}{1 - |\dot{K}_{\text{отр}}|}, \quad КБВ = \frac{1}{КСВ}. \quad (8.5)$$

Они должны быть максимально близки к 1.

Сопротивление отрезка линии при различных режимах:

– при коротком замыкании ($\dot{Z}_н = 0$) $\dot{Z}_{\text{ex}} = -iZ_0 \operatorname{tg}(2\pi l / \lambda)$,

– при холостом ходе ($\dot{Z}_н = \infty$) $\dot{Z}_{\text{ex}} = -iZ_0 \operatorname{ctg}(2\pi l / \lambda)$,

– при согласованной с линией нагрузке ($\dot{Z}_н = Z_0$) $|\dot{Z}_{\text{ex}}| = Z_0$.

Пример П.8.1. Разомкнутая линия без потерь длиной 5 м с характеристическим сопротивлением 500 Ом питается напряжением 100 В на частоте 10 МГц от генератора. Найти реактивное входное сопротивление, ток, поступающий в линию от генератора, напряжение между концами линии.

Решение.

Так как линия разомкнута, то $\dot{Z}_{\text{ex}} = -iZ_0 \operatorname{ctg}(2\pi l / \lambda)$.

Длина волны в линии $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \cdot 10^8}{10^7} = 30$ м. Поэтому

$$\dot{Z}_{\text{ex}} = -i500 \operatorname{ctg}(2\pi 5 / 30) = -i500 \operatorname{ctg}(\pi / 3) = -i500\sqrt{3} \approx -i289 \text{ Ом}.$$

Так как реактивное сопротивление линии изменяется по закону котангенса, т. е. обращается в ноль в случае резонанса (оставляя линии чисто активное сопротивление), как в колебательном контуре, наступающего при $l = (2n + 1)\lambda / 4$, то характер сопротивления можно определить по аналогии с колебательным контуром. На частотах ниже резонансной оно емкостное, выше –

индуктивное, т. е. для линии при $l < \lambda / 4$ реактивное сопротивление емкостное (отрицательное), при $l > \lambda / 4$ – индуктивное (положительное).

Сравним длину линии 5 м с длиной волны 30 м.

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} < \frac{1}{4},$$

значит, характер сопротивления линии емкостный. Пренебрегая активным сопротивлением, даем ответ: $X = 289$ Ом.

Ток, поступающий из генератора, определяем по закону Ома:

$$I_{ex} = \frac{U_{ex}}{X_{ex}} = \frac{100B}{289\text{Ом}} \approx 0,35 \text{ А.}$$

Напряжение на входе линии имеет вид:

$$\dot{U}_{ex} = \dot{U}_H \cos \gamma l - i \dot{I}_H \sin \gamma l.$$

Так как линия разомкнута, то $\dot{I}_H = 0$ и

$$\dot{U}_H = \frac{\dot{U}_{ex}}{\cos(2\pi l / \lambda)} = \frac{\dot{U}_{ex}}{\cos(\pi / 3)} = \frac{100}{1/2} = 200 \text{ В.}$$

Пример П.8.2. К линии с характеристическим сопротивлением 50 Ом подключена нагрузка 70 Ом. Найти коэффициент отражения, КСВ и потери мощности в линии.

Решение.

По определению,

$$\dot{K}_{omp} = \frac{\dot{Z}_H - Z_0}{\dot{Z}_H + Z_0} = \frac{70 - 50}{70 + 50} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

КСВ найдем из его связи с коэффициентом отражения:

$$КСВ^2 = \frac{1 + |\dot{K}_{отр}|}{1 - |\dot{K}_{отр}|} = \frac{1 + 1/6}{1 - 1/6} = \frac{7}{5} = 1,4,$$

откуда $КСВ = \sqrt{1,4} \approx 1,2$, что является неплохим значением с точки зрения согласования линии с нагрузкой.

Коэффициент отражения показывает соотношение между амплитудами обратной и прямой волн. Так как полезной является только прямая, доставляющая энергию к нагрузке, то мощность, переносимая ею, является полезной.

$$P_{\text{полезн}} \sim U_1^2, P_{\text{отр}} \sim U_2^2, \quad \frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{полезн}}} = \left(\frac{U_2}{U_1} \right)^2 = K_{\text{отр}}^2 = \frac{1}{36} \approx 2,78 \, \%.$$

Так как полная мощность, отданная генератором, $P_{\text{ген}} = P_{\text{полезн}} + P_{\text{отр}}$, то

$$\frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{ген}}} = \frac{P_{\text{отр}}}{P_{\text{полезн}} + P_{\text{отр}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{K_{\text{отр}}^2}} = \frac{1}{1 + 36} \approx 2,7 \, \%.$$

Задачи для решения

8.1. Линия имеет длину 30 м. Найти разность фаз на входе и выходе для частот 30 Гц и 3 МГц. Определить, является ли линия на этих частотах цепью с распределенными параметрами.

8.2. Линия имеет погонную индуктивность 1 мкГн/м, погонную емкость 1 пФ/м. Найти ее характеристическое сопротивление. Какая нагрузка будет согласованной с такой линией?

8.3. Рабочая частота кабеля 100 кГц. Найти значения длины кабеля, при которых его сопротивление равно: а) 0; б) бесконечности; в) характеристическому.

8.4. Определить потери мощности в нагрузке из-за рассогласования при КСВ 3.

8.5. Длина разомкнутой линии 1 м, характеристическое сопротивление 50 Ом. Линия питается напряжением 10 В на частоте 1 МГц от генератора. Найти входное сопротивление линии, ток, поступающий в линию от генератора, напряжение между концами линии.

8.6. Согласовать нагрузку сопротивлением 50 Ом с линией, характеристическое сопротивление которой 75 Ом, на длине волны 4 см, т. е. найти сопротивление дополнительного участка линии, играющего роль трансформатора сопротивлений, и рассчитать его сопротивление и длину.

9. Передача и прием информации

Линейные антенны для связи должны иметь примерно полуволновый размер ($l = 0,5\lambda$).

Напряженность поля, создаваемого на расстоянии R в дальней зоне источником мощности P с коэффициентом усиления антенны G (направленные свойства антенн опущены), равна

$$E = \frac{\sqrt{30PG}}{R}. \quad (9.1)$$

Энтропия источника равновероятных событий с алфавитом из m символов равна

$$H = \log_2 m \text{ бит/символ}. \quad (9.2)$$

Количество информации в сообщении длины n символов источника с равновероятными символами

$$I = Hn = n \log_2 m \text{ бит}. \quad (9.3)$$

Чтобы дискретизированный с шагом Δt сигнал впоследствии можно было восстановить без потери информации, Δt берут не более интервала Найквиста

$$\Delta t \leq \frac{1}{2F_{\text{г}}}, \quad (9.4)$$

где $F_{\text{г}}$ – верхняя частота в спектре исходного непрерывного сигнала.

Количество информации в непрерывном сообщении с верхней частотой в спектре $F_{\text{г}}$, длительностью T , представляющего смесь сигнала и шума (ошибок измерения), характеризуемую отношением мощности сигнала к мощности шума $P_{\text{с}}/P_{\text{ш}}$, равно:

$$I = 2F_{\text{г}}T \log_2 \left(1 + \frac{P_{\text{с}}}{P_{\text{ш}}} \right) \text{ бит.} \quad (9.5)$$

Условие неискаженной передачи сигнала с информационным объемом $V_{\text{с}}$ по каналу с информационным объемом $V_{\text{к}}$:

$$V_{\text{с}} = T_{\text{с}} \Delta F_{\text{с}} D_{\text{с}} \leq V_{\text{к}} = T_{\text{к}} \Delta F_{\text{к}} D_{\text{к}}. \quad (9.6)$$

Ширина спектра при частотной модуляции

$$\Delta \omega_{\text{ЧМ}} = (2m + 1) 2\pi F_{\text{г}}. \quad (9.7)$$

Индекс амплитудной модуляции можно найти из осциллограммы напряжения по формуле:

$$m = \frac{U_{\text{max}} - U_{\text{min}}}{U_{\text{max}} + U_{\text{min}}}. \quad (9.8)$$

Пример П.9.1. Определить дальность связи при передатчике мощностью 10 Вт с коэффициентом усиления антенны 3, если чувствительность приемника 10^{-3} В/м.

Решение.

Напряженность электрического поля в точке приема описывается выражением (9.1). Чувствительность приемника определяет минимальную величину напряженности электрического поля, которую он еще может отличить от нуля. Ею и определяется дальность связи. Выражаем расстояние из условия $E = E_{пред}$:

$$R = \frac{\sqrt{30PG}}{E_{пред}} = \frac{\sqrt{30 \cdot 10 \cdot 3}}{10^{-3}} = 30 \text{ км.}$$

Пример П.9.2. Найти количество информации в непрерывном сигнале, передаваемом в течение 1 минуты, с отношением сигнал-шум 10, с верхней частотой в спектре 100 кГц и сравнить его с количеством информации, которое за это же время можно передать от источника с 68 равновероятными символами при длительности посылки 1 мс.

Решение.

Количество информации в непрерывном сообщении описывается выражением (9.5).

Отношение сигнал-шум представляет собой отношение мощностей сигнала и шума. Подставляем данные в формулу и получаем:

$$I = 2 \cdot 100 \cdot 10^3 \cdot 60 \log_2(1 + 10) = 12 \cdot 10^6 \cdot 3,459 = 45513 \text{ бит.}$$

Длительность посылки – это время, отведенное при передаче на один символ. При длительности посылки $\tau = 1$ мс за время передачи $T = 60$ секунд можно передать $n = T / \tau = 6 \cdot 10^4$ символов.

Энтропия дискретного источника равновероятных символов с алфавитом $m = 68$ равна в соответствии с (9.2):

$$H = \log_2 m = \log_2 68 = \log_2 2^6 = 6 \text{ бит/символ.}$$

При передаче последовательности из n символов количество переданной информации составит:

$$I = H \cdot n = 6 \cdot 6 \cdot 10^4 = 36 \cdot 10^4 = 360000 \text{ бит.}$$

Пример П.9.3. Сигнал $e(t) = \cos(100t)$ В модулирует несущий $u_n(t) = 10\cos(10^5 t)$ В. При этом схема модулятора обеспечивает индекс модуляции 0,7. Найти спектр амплитудно-модулированного сигнала. Какова должна быть полоса канала при передаче в реальном времени с сохранением динамического диапазона?

Решение.

Запишем модель АМ-сигнала:

$$s_{AM}(t) = U_n [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t.$$

Разложим ее в ряд по гармоническим сигналам:

$$s_{AM}(t) = U_n \cos \omega_0 t + \frac{U_n m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t + \frac{U_n m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t.$$

Подставляем наши данные: $\omega_0 = 10^5$ рад/с, $\Omega = 100$ рад/с, $U_n = 10$ В, $m = 0,7$. Получаем, что спектр содержит в себе три компоненты:

а) верхнюю боковую на частоте $\omega_0 + \Omega = 100100$ рад/с амплитудой $\frac{U_n m}{2} = \frac{10 \cdot 0,7}{2} = 3,5$ В;

б) нижнюю боковую на частоте $\omega_0 - \Omega = 99900$ рад/с амплитудой $\frac{U_n m}{2} = \frac{10 \cdot 0,7}{2} = 3,5$ В;

в) несущую на частоте $\omega_0 = 10^5$ амплитудой $U_n = 10$ В.

Ширина спектра такого сигнала составляет $2\Omega = 200$ рад/с.

Чтобы передать сигнал без искажений, нужно соблюсти условие (9.6). При передаче в реальном времени сигнал не убыстряется и не замедляется, т. е. $T_C = T_K$. Если сохранить динамический диапазон неизменным, т. е. $D_C = D_K$, то условие ограничения накладывается только на ширину спектра сигнала:

$\Delta F_C \leq \Delta F_K$. То есть, требуемая полоса канала составляет не менее ширины спектра сигнала, т. е.

$$\Delta F_K \geq \Delta F_C = \frac{\Delta \omega_C}{2\pi} = \frac{200}{2\pi} = 31,8 \text{ Гц.}$$

Задачи для решения

9.1. Определите мощность передатчика, обеспечивающего прием $5 \cdot 10^{-3}$ В/м на расстоянии 1 км при коэффициенте усиления антенны 4.

9.2. Найти энтропию источника следующего сообщения: «Я изучаю основы радиофизики!». Найти количество информации в этом сообщении в битах. В «алфавит» источника следует включить символы пробела и знаки препинания.

9.3. По сети передается сигнал с отношением сигнал/шум, равным 100. Длительность передачи 1 минута. Какую полосу частот следует предоставить под канал с пропускной способностью 128 бит/сек?

9.4. С каким интервалом следует брать отсчеты из сигнала с эффективной длительностью 1 мс?

9.5. Каков должен быть динамический диапазон сигнала длительностью 10 мс с полосой 150 Гц для неискаженной ускоренной передачи по каналу с динамическим диапазоном 10 с полосой 1 кГц в течение 1 мс?

9.6. На осциллограмме принимаемое АМ-напряжение имеет максимальное и минимальное значения соответственно 10 и 5 В. Найдите индекс модуляции.

9.7. Сигнал с верхней частотой в спектре 4 кГц передается с помощью частотной модуляции с индексом модуляции 500. Какой ширины канал требуется для передачи?

9.8. В спектре принятого АМ-колебания содержатся компоненты: 10 В на частоте 10^6 Гц, 1,5 В на $9 \cdot 10^5$ Гц и 1,5 В на $11 \cdot 10^5$ Гц. Найдите низкую частоту, частоту несущей, амплитуду несущей и индекс модуляции.

Список литературы

1. Основы радиофизики / под ред. А. С. Логгинова. – М., УРСС, 1996.
2. Нефёдов, В. И. Основы радиоэлектроники / В. И. Нефёдов. – М.: Высш. школа, 2000.
3. Фриск, В. В. Основы теории цепей: учеб. пособие / В. В. Фриск. – М.: ИП РадиоСофт, 2002.
4. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М.: Сов. радио, 1989.
5. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – М.: Высшая школа, 2000.
6. Артёмова, Т. К. Основы радиоэлектроники / Т. К. Артёмова, К. С. Артёмов, В. И. Ярмоленко; Яросл. гос. ун-т. им. П. Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.

Оглавление

1. Спектры детерминированных сигналов.....	3
Задачи для решения	12
2. Параметры детерминированных сигналов	13
Задачи для решения	17
3. Случайные процессы	18
Задачи для решения	21
4. Анализ резистивных цепей	22
Задачи для решения	29
5. Цепи при гармоническом воздействии	31
Задачи для решения	36
6. Методы анализа линейных цепей	37
Задачи для решения	41
7. Нелинейные элементы.....	42
Задачи для решения	44
8. Цепи с распределенными параметрами	46
Задачи для решения	49
9. Передача и прием информации	50
Задачи для решения	54
Список литературы	55

Учебное издание

Артёмова Татьяна Константиновна
Гвоздарёв Алексей Сергеевич

Основы радиоэлектроники

Задачник

Редактор, корректор И. В. Бунакова
Вёрстка Е. Л. Шелехова

Подписано в печать 23.09.10. Формат 60×84 ¹/₁₆.
Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".
Усл. печ. л. 3,25. Уч.-изд. л. 2,5.
Тираж 150 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-издательском отделе Ярославского
государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

**Т. К. Артёмова
А. С. Гвоздарёв**

ОСНОВЫ РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

