

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ

АНАЛИЗ АЛГОРИТМОВ И СЛОЖНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Направление подготовки (специальность):

02.04.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Образовательная программа

Искусственный интеллект и компьютерные науки

очная форма обучения

Составитель:

НИКОЛАЕВ АНДРЕЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ, К.Ф.-М.Н.,
ДОЦЕНТ Ф-ТА ИВТЯРГУ ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА

г. Ярославль

Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)

Основная литература:

1. Алгоритмы: построение и анализ: пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн - 3-е изд. - М.; СПб.: Диалектика, 2020. - 1323 с.: ил.

Дополнительная литература:

2. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 364 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/130477> (дата обращения: 06.10.2021). Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Методы оптимизации: теория и алгоритмы : учебное пособие для академического бакалавриата / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. М. Метельский, С. А. Богданович. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 357 с. — (Бакалавр. Академический курс). — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/415561> (дата обращения: 06.10.2021).
4. Крупский, В. Н. Теория алгоритмов. Введение в сложность вычислений : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. Н. Крупский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 117 с. — (Авторский учебник) — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/444131> (дата обращения: 06.10.2021).

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)

- 1 Электронный университет Moodle ЯрГУ URL: <https://moodle.uniyar.ac.ru/>
- 2 Единое окно доступа к образовательным ресурсам URL: <http://window.edu.ru/>

**Учебно-методические указания и рекомендации
к изучению тем лекционных и практических занятий,
самостоятельной работе студентов**

Содержание дисциплины

Наименование раздела дисциплины	Название темы с кратким содержанием
1	<p>Сложность алгоритмов</p> <p>Задача комбинаторной оптимизации. Определение алгоритма. Алгоритм полного перебора. Трудоемкость алгоритма. Трудоемкость в лучшем, худшем и среднем случаях. Алгоритм сортировки вставками. Анализ трудоёмкости. Асимптотическая верхняя, нижняя и средняя оценка сложности.</p>
2	<p>Разделяй и властвуй</p> <p>Метод «разделяй и властвуй». Алгоритм сортировки слиянием. Анализ трудоёмкости. Алгоритм быстрой сортировки. Анализ трудоёмкости. Деревья принятия решений. Нижняя оценка трудоемкости сортировки. Алгоритм сортировки подсчётом. Алгоритм Карацубы быстрого умножения чисел. Алгоритм Штрассена рекурсивного умножения матриц. Основная теорема о рекуррентных соотношениях. Рекуррентное размещение бинарного дерева на квадратной решётке.</p>
3	<p>Динамическое программирование</p> <p>Метод динамического программирования. Свойство оптимальной подструктуры. Свойство перекрытия вспомогательных подзадач. Задача о наибольшей общей подпоследовательности. Алгоритм динамического программирования для задачи о наибольшей общей подпоследовательности. Алгоритм Флойда-Уоршелла для задачи обо всех кратчайших путях в графе. Задача о самом длинном простом пути и неприменимость динамического программирования.</p>
4	<p>Матроиды и жадные алгоритмы</p> <p>Концепция жадного алгоритма. Жадный алгоритм для задачи о размене монет. Условия применения жадного алгоритма. Алгоритм ближайшего соседа задачи коммивояжёра. Определение матроида. Примеры матроидов (матричный, графический, k-матроид и т.д.). Жадный алгоритм Радо-Эдмондса. Теорема Радо-Эдмондса. Примеры задач, которые не являются матроидами. Задача о планировании единичных заданий. Решение задачи о планировании единичных заданий с помощью матроида.</p>

Наименование раздела	Название темы с кратким содержанием
5	<p>Линейное программирование Постановка задачи линейного программирования. Выпуклый полиэдр и выпуклый многогранник. Основная теорема линейного программирования. Куб Кли-Минти и трудоёмкость симплекс-метода. Постановка задачи о максимальном потоке в форме линейного программирования. Теорема Форда-Фалкерсона. Постановка задачи о многопродуктовом потоке в форме линейного программирования. Постановка задачи о назначениях в форме линейного программирования. Целочисленное линейное программирование, релаксация линейного программирования. Вполне унимодулярные матрицы. Свойства полиэдра с вполне унимодулярной матрицей. Матрица инцидентности двудольного графа. Расширение многогранника. Сложность расширения. Многогранник и его расширение для задачи об остовном дереве. Примеры задач с экспоненциальной сложностью расширения.</p>
6	<p>Классы P и NP Тезис Кобхема-Эдмондса. Полиномиальные и экспоненциальные алгоритмы. Задача распознавания. Детерминированная машина Тьюринга. Полиномиальный алгоритм. Класс задач P. Примеры задач из класса P. Недетерминированная машина Тьюринга. Машина Тьюринга с оракулом. Класс задач NP. Примеры задач из класса NP. Класс задач co-NP. Дополнительные задачи. Задача соотношения классов P и NP.</p>
7	<p>NP-полные задачи Полиномиальная сводимость. Полиномиальное сведение задачи о гамильтоновом цикле к задаче коммивояжёра. NP-полная задача. NP-трудная задача. Сводимость по Тьюрингу. Задача выполнимости булевых формул. Теорема Кука-Левина. Схема доказательства NP-полноты задачи. Доказательство методом сужения задачи. Основные NP-полные задачи (3-выполнимость, вершинное покрытие, клика и независимое множество, гамильтонов цикл и задача коммивояжера, сумма подмножества и задача о рюкзаке). Доказательство NP-полноты сужением задачи.</p>
8	<p>PSPACE и задачи за пределами NP Класс задач PSPACE. Соотношение классов сложности P, NP, co-NP и PSPACE. Примеры PSPACE задач (задача планирования, выполнимость с кванторами, задача конкурентного размещения). Алгоритмы для задач выполнимости с кванторами и конкурентного размещения с полиномиальным ограничением по памяти. PSPACE-полная задача Доказательство PSPACE-полноты задачи о конкурентном размещении. Алгоритм минимакса и пошаговые игры для двух игроков.</p>

Пример теста

- Для двух функций $f(n)$ и $g(n)$, оценивающих трудоёмкость некоторого алгоритма, известно, что
 $\exists C > 0 \exists n_0 \forall n > n_0: f(n) \geq Cg(n)$,
 тогда
 - $f(n) = O(g(n))$;
 - $f(n) = o(g(n))$;
 - $f(n) = \Omega(g(n))$;
 - $f(n) = \Theta(g(n))$.
- Решить рекуррентное соотношение

$$T(n) = 9T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2.$$
 - $\theta(n^3)$;
 - $\theta(n^2 \log n)$;
 - $\theta(n^2)$;
 - $\Theta(n \log n)$.
- 1 000 000 студентов написали тест, который был оценен по 100-бальной шкале. Какой из приведённых алгоритмов позволит отсортировать результаты теста по возрастанию менее чем за 2 000 000 элементарных операций?
 - сортировка вставками;
 - быстрая сортировка;
 - пирамидальная сортировка;
 - сортировка подсчётом.
- Сколько символов содержит самая длинная общая подпоследовательность последовательностей $\langle 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1 \rangle$ и $\langle 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0 \rangle$
 - 4;
 - 5;
 - 6;
 - 7.
- Что из перечисленного не является матроидом:
 - множество клик в графе;
 - множество лесов в графе;
 - множество всех подмножеств конечно множества;
 - множество линейно независимых строк матрицы?
- Каждой вершине графа $G = (V, E)$ сопоставим переменную x_i . Какая задача записана в форме целочисленного линейного программирования:

$$\sum_{i=1}^{|V|} x_i \rightarrow \min,$$

$$x_i + y_j \geq 1, \forall (i, j) \in E,$$

$$x_i \in \{0, 1\}.$$
 - задача о вершинном покрытии;
 - задача о независимом множестве;
 - задача о клике;
 - задача коммивояжёра.
- Найти оптимальное значение целевой функции в задаче линейного программирования

$$f(x, y) = 2x - y \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 3x - 4y \leq 6, \\ 2x + 2y \leq 11, \\ -4x + 3y \leq 6, \\ x \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

- а) $f(x, y) = 3,5$;
- б) $f(x, y) = 5$;
- в) $f(x, y) = 6.5$;
- г) $f(x, y) = 8$.

8. Какая из перечисленных компонент не входит в структуру недетерминированной машины Тьюринга?
- а) бесконечная лента;
 - б) читающая/пишущая головка;
 - в) управляющее устройство;
 - г) все вышеперечисленные компоненты входят в структуру недетерминированной машины Тьюринга.
9. Пусть задача A полиномиально сводится к известной NP-полной задаче B ($A \leq_p B$). Что можно сказать про задачу A ?
- а) задача A полиномиально разрешима;
 - б) задача A является NP-полной;
 - в) задача A является NP-трудной;
 - г) ничего из вышеперечисленного.
10. Расположите классы сложности в верном порядке вложенности:
- а) $P \subseteq PSPACE \subseteq NP \subseteq EXPTIME$;
 - б) $P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$;
 - в) $PSPACE \subseteq P \subseteq NP \subseteq EXPTIME$;
 - г) $P \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME \subseteq NP$.

Правильные ответы

Вопрос №	Правильный ответ	Вопрос №	Правильный ответ
1	в	6	а
2	б	7	в
3	г	8	г
4	в	9	г
5	а	10	б

Критерии оценки

- «Отлично» – 9 правильных ответов;
- «Хорошо» – 7 правильных ответов;
- «Удовлетворительно» – 5 правильных ответов;
- «Неудовлетворительно» – 4 и менее правильных ответов.

Темы докладов

1. Пирамидальная сортировка. Анализ сложности
2. Выбор порядковой статистики с линейным ожидаемым временем
3. Поиск ближайшей пары точек методом «разделяй и властвуй»
4. Динамическое программирование для задачи о перемножении цепочки матриц
5. Динамическое программирование для задачи о расстоянии редактирования
6. Алгоритм Нидлмана – Вунша для выравнивания последовательностей
7. Динамическое программирование для задачи о триангуляции с минимальным весом
8. Динамическое программирование для задачи о независимом множестве в дереве
9. Код Хаффмана
10. Матроид трансверсалей
11. Симплекс-метод
12. Алгоритмы проталкивания предпотока
13. Алгоритм быстрой оболочки для двумерного и многомерного пространств
14. Венгерский алгоритм для задачи о назначениях
15. Полиномиальный алгоритм для задачи о китайском почтальоне
16. Алгоритм динамического программирования для предсказания вторичной структуры РНК
17. Алгоритм Гэйла - Шэпли построения устойчивого паросочетания
18. NP-полнота задачи о многопроцессорном расписании
19. Ориентированные деревья минимального веса. Многофазный жадный алгоритм
20. Алгоритм Штор-Вагнера для задачи о минимальном разрезе
21. Алгоритм Каргера для задачи о минимальном разрезе
22. Поточковый алгоритм планирования авиаперелетов
23. Поточковый алгоритм для задачи об выбывании бейсбольных команд из борьбы за чемпионство
24. Алгоритм динамического программирования для задачи синтаксического разбора
25. Алгоритм определения наличия пересекающихся отрезков
26. Субмодулярные функции и алгоритм Скрейвера
27. Алгоритм Эдмондса для пересечения матроидов
28. Алгоритм Карпа для задачи о цикле минимального среднего веса
29. Гридоиды и жадные алгоритмы
30. Полиматроиды и жадные алгоритмы
31. Ранцевая криптосистема Меркла — Хеллмана
32. Динамическое программирование в алгоритме Seam Carving для изменения размеров изображения с учётом содержания
33. Полиномиальный алгоритм для гиперболической версии «Сапёра»
34. Проектирование и маршрутизация телекоммуникационных сетей с помощью целочисленного линейного программирования
35. Решение головоломки «Shakashaka» с помощью целочисленного линейного программирования
36. Решение задачи разбиения на квадраты с помощью целочисленного линейного программирования
37. Решение головоломок «Судоку» и «Какуро» с помощью целочисленного линейного программирования
38. NP-полнота игры «The Legend of Zelda»

39. NP-полнота игры «Pokemon»
40. NP-полнота игры «Морской бой
41. NP-полнота игры «Тетрис»
42. NP-полнота игры «Plumber»
43. NP-полнота игры «Сапер»
44. NP-полнота задачи о назначении целей для вооружения
45. NP-полнота игры «Змейка»
46. NP-полнота головоломки «Masyu»
47. NP-полнота головоломки «Shakashaka»
48. NP-полнота игры Portal с полями анти-экспроприации
49. NP-полнота головоломки «Нонограмма»
50. PSPACE-полнота игры в города для обычных и планарных графов
51. Динамическое программирование при подсчете результата матча в крикет
52. Экспоненциальная нижняя оценка на сложность задачи коммивояжера в форме линейного программирования
53. NP-полнота задачи о художественной галерее
54. NP-полнота игры «Лемминги»
55. Теорема Шефера о дихотомии. NP-полнота задачи 3-выполнимость при одном истинном литерале. NP-полнота задачи 3-выполнимость при различных литералах
56. Алгоритм динамического программирования для задачи Beat tracking (отслеживание такта в музыке)
57. NP-полнота головоломок «Судоку», «Какуро» и «Slitherlink»
58. NP-полнота задачи коммивояжера на евклидовой плоскости
59. NP-полнота задачи о дереве Штейнера на манхэттенской плоскости
60. NP-полнота вулканской головоломки Кал-тох
61. NP-полнота Match-3 головоломок
62. «Super Mario Bros.» NP и PSPACE полнота, полиномиальный алгоритм спасения принцессы
63. Играть в домино трудно, если играешь не один
64. NP-полнота игр «Threes!», «Fives», «1024!» и «2048»
65. NP-полнота головоломок в игре «The Witness»
66. NP-полнота оптимальной сборки кубика Рубика
67. PSPACE-полнота игры Sokoban
68. Подход к игре «Тантрикс» на основе целочисленного линейного программирования
69. PSPACE-полнота игры «Реверси»
70. Проходить через двери PSPACE-трудно

Показатели	Критерии
Содержание доклада	Анализирует изученный материал, Выделяет наиболее значимые для раскрытия темы факты, научные положения, Соблюдает логическую последовательность в изложении материала
Аргументированно отвечает на вопросы	Проявляет критическое мышление
Представление доклада	Использует иллюстративные, наглядные материалы,

	Владеет культурой речи
--	------------------------

Критерии оценки

- «Отлично» – доклад полностью соответствует описанным критериям;
- «Хорошо» – доклад соответствует описанным критериям за исключением некоторых замечаний не более чем по нескольким пунктам критериев;
- «Удовлетворительно» – доклад соответствует более чем половине описанных критериев;
- «Неудовлетворительно» – доклад не соответствует большей части описанных критериев.

Вариант билета на зачете

Задания	Ответы
1. Сформулировать определение матроида	Раздел 4
2. Сформулировать постановку задачи 3-выполнимость	Раздел 7
3. Сформулировать и доказать теорему о матрице инцидентности двудольного графа	Раздел 5
4. Решить рекуррентное соотношение $T(n) = 3T\left(\frac{n}{2}\right) + n\lg(n).$	$T(n) = \Theta(n^{\log_2 3})$
5. Применим ли алгоритм динамического программирования к задаче о самом длинном простом пути в графе?	Не применим, так как задача о самом длинном пути не обладает свойством оптимальной подструктуры: самый длинный путь между вершинами A и B не является самым длинным путём между промежуточными вершинами на маршруте.
6. Доказать, что следующая задача является NP-полной: Бонни и Клайд ограбили банк и вынесли n чеков на различные суммы, выписанные на их имя; требуется разделить чеки так, чтобы разница между долями Бонни и Клайда не превосходила 100 долларов.	Задача принадлежит классу NP, так как решение можно угадать и проверить за полиномиальное время (достаточно посчитать доли Бонни и Клайда и сравнить их) Проверку можно выполнить за время $O(n)$. Рассмотрим NP-полную задачу о разбиении множества. Задано множество целых неотрицательных чисел $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$ Найти такое подмножество $S \subset A$,

	$\sum_{a_i \in S} a_i = \sum_{a_i \in A \setminus S} a_i.$ <p>что</p> <p>Построим частный случай задачи о Бонни и Клайде с весами:</p> $b_i = 1000a_i.$ <p>В исходном множестве существует разбиение тогда и только тогда, когда Бонни и Клайд могут разделить чеки с разницей не более 100 долларов.</p>
--	---

Критерии оценки

- «Отлично» – даны верные ответы на 5 вопросов из билета;
- «Хорошо» – даны верные ответы на 4 вопроса из билета;
- «Удовлетворительно» – даны верные ответы на 3 вопроса из билета;
- «Неудовлетворительно» – даны верные ответы на 2 и менее вопросов из билета.