

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г.Демидова**

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ**  
**ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

*АЛГОРИТМЫ ДЛЯ NP-ТРУДНЫХ ЗАДАЧ*

Направление подготовки (специальность):

02.04.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Образовательная программа

Искусственный интеллект и компьютерные науки

**очная форма обучения**

Составитель:

**НИКОЛАЕВ АНДРЕЙ ВАЛЕРЬЕВИЧ,**  
**К.Ф.-М.Н, ДОЦЕНТ КАФЕДРЫ ДИСКРЕТНОГО АНАЛИЗА**  
**ЯРГУ ИМ. П.Г. ДЕМИДОВА**

г. Ярославль

## **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

### **Основная литература:**

1. Алгоритмы: построение и анализ: пер. с англ. / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест, К. Штайн - 3-е изд. - М.; СПб.: Диалектика, 2020. - 1323 с.: ил.

### **Дополнительная литература:**

2. Асанов, М. О. Дискретная математика: графы, матроиды, алгоритмы : учебное пособие / М. О. Асанов, В. А. Баранский, В. В. Расин. — 3-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2020. — 364 с.— Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/130477> (дата обращения: 06.10.2021). Режим доступа: для авториз. пользователей.
3. Методы оптимизации: теория и алгоритмы : учебное пособие для академического бакалавриата / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк, Ю. М. Метельский, С. А. Богданович. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2018. — 357 с. — (Бакалавр. Академический курс). — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/415561> (дата обращения: 06.10.2021).
4. Крупский, В. Н. Теория алгоритмов. Введение в сложность вычислений : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. Н. Крупский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 117 с. — (Авторский учебник) — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/444131> (дата обращения: 06.10.2021).
5. Есипов, Б. А. Методы исследования операций : учебное пособие / Б. А. Есипов. — 2-е изд., испр. и доп. — Санкт-Петербург : Лань, 2021. — 304 с. — ISBN 978-5-8114-0917-4. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/168876> (дата обращения: 06.10.2021). — Режим доступа: для авториз. пользователей.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся по дисциплине (модулю)**

- 1 Электронный университет Moodle ЯрГУ URL: <https://moodle.uniyar.ac.ru/>
- 2 Единое окно доступа к образовательным ресурсам URL: <http://window.edu.ru/>

### **Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины (модуля), включая перечень информационных справочных систем (при необходимости)**

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)).

2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> (раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке <http://window.edu.ru/library>).

3. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)).

### **Перечень информационных технологий, используемых при изучении дисциплины, включая программное обеспечение**

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

- для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации – программы Microsoft Office,
- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

### **Учебно-методические указания и рекомендации к изучению тем лекционных и практических занятий, самостоятельной работе студентов**

#### **Содержание дисциплины**

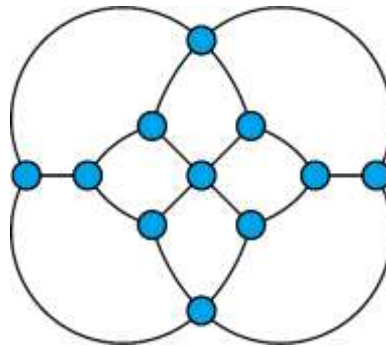
| Наименование раздела дисциплины         | Название темы с кратким содержанием   |
|---|---|
| <b>1 Сложность задач</b>                | Задача распознавания. Детерминированная машина Тьюринга. Полиномиальный алгоритм. Класс задач P. Недетерминированная машина Тьюринга. Класс задач NP. Класс co-NP. Полиномиальная сводимость. NP-полные и NP-трудные задачи. Теорема Кука-Левина. Схема доказательства NP-полноты задачи. Основные NP-полные задачи. NP-промежуточные задачи. Теорема Ладнера. Полиномиально разрешимые и NP-полные задачи двойники |
| <b>2 Анализ подзадач</b>                | Определение подзадачи задачи распознавания. Полиномиальные частные случаи задачи о расписании с предшествованием. Задача маршрутизации транспорта. Задача о раскраске графа. Алгоритм раскраски графа в 2 цвета. NP-полнота задачи о 3-раскраске. Теорема о четырех красках. NP-полнота задачи о 3-раскраске планарного графа   |
| <b>3 Псевдополиномиальные алгоритмы</b> | Псевдополиномиальный алгоритм. Псевдополиномиальные алгоритмы для задачи о сумме подмножества. Задачи с числовыми параметрами. Сильная и слабая NP-полнота. Сильная NP-полнота задачи коммивояжера. Два псевдополиномиальных алгоритма для задачи о рюкзаке по весам и стоимостям предметов   |
| <b>4 Параметризованные алгоритмы</b>    | Параметризованные алгоритмы для задачи о вершинном покрытии. Техника параметрической редукции. Техника ограниченных деревьев поиска. Параметризованная задача.  |

| Наименование раздела             | Название темы с кратким содержанием  |
|----------------------------------|--|
|                                  | Класс FPT. FPT-алгоритмы для задач о вершинном покрытии и клике  |
| <b>5 Частичный перебор</b>       | Поиск с возвратом (бэктрекинг). Алгоритм поиска с возвратом для решения головоломки «Судоку». Метод ветвей и границ. Решение задачи целочисленного программирования методом ветвей и границ. Задачи о покрытии и разбиении множества. Задачи о покрытии и разбиении множества в форме ЦЛП. Задача о вершинном покрытии в форме ЦЛП. Задача о нескольких рюкзаках. Задача о нескольких рюкзаках в форме ЦЛП. Алгоритм Мартелло-Тота для задачи о нескольких рюкзаках. Стратегии ускорения работы метода ветвей и границ   |
| <b>6 Метаэвристики</b>           | Эвристический алгоритм и метаэвристики. Алгоритм локального поиска. Параметры настройки локального поиска. Примеры окрестностей для задач коммивояжера, максимальный разрез и MAX-SAT. Параметры локального поиска. Контрпримеры к локальному поиску. Поиск с запретами. Параметры настройки алгоритма поиска с запретами. Имитация отжига. Параметры настройки алгоритма имитации отжига. Примеры функций понижения температуры. Поиск с переменными окрестностями. Параметры настройки поиска с переменными окрестностями. Генетические алгоритмы. Параметры генетических алгоритмов. Примеры генетических алгоритмов для задач коммивояжера, максимальный разрез и MAX-SAT. |
| <b>7 Вероятностные алгоритмы</b> | Вероятностная машина Тьюринга. Алгоритмы Лас-Вегас и Монте-Карло. Быстрая сортировка. Монте-Карло интегрирование. Алгоритмы Атлантик-Сити. Задача о квадратичном невычете. Вероятностный Лас-Вегас алгоритм для задачи о квадратичном невычете. Класс ZPP. Алгоритмы Монте-Карло с односторонней и двусторонней ошибкой. Классы RP и co-RP. Проверка чисел на простоту. Тест Соловея-Штрассена. Алгоритм генерации простых чисел. Класс BPP. Принцип принятия решения большинством голосов. Вероятность ошибки. Соотношение вероятностных классов сложности между собой и классами P и NP  |

| Наименование раздела                 | Название темы с кратким содержанием   |
|--------------------------------------|---|
| <b>8 Аппроксимационные алгоритмы</b> | <p>Определение аппроксимационного алгоритма. Основные методы разработки приближенных алгоритмов. 2-аппроксимационный MST-алгоритм для задачи коммивояжера. 2-аппроксимационный алгоритм для задачи о вершинном покрытии на основе линейного программирования. Разрыв целочисленности. Вероятностные аппроксимационные алгоритмы. 7/8-аппроксимационный алгоритм для задачи о максимальной 3-выполнимости. Полиномиальные и полностью полиномиальные приближенные схемы. Полностью полиномиальная приближенная схема для задачи о рюкзаке. FPTAS и NP-полные в сильном смысле задачи. Классы NPO и APX. Сложность аппроксимации общей задачи коммивояжера. Сложность аппроксимации задачи о раскраске графа. Классификация задач по типам аппроксимационных алгоритмов</p> |

### Пример теста

- Какому классу сложности принадлежит задача о размере наибольшей клики. Задан граф  $G = (V, E)$  и положительное целое  $K$ . Верно ли, что наибольшая клика в графе  $G$  имеет размер  $K$ ?
  - P;
  - NPC;
  - NPI
  - $P^{NP}$
- Определите хроматическое число графа



- 1;
  - 2;
  - 3;
  - 4.
- NP-полная задача  $A$  называется слабо NP-полной, если
    - $A$  содержит своим частным случаем полиномиально разрешимую задачу;
    - для  $A$  существует полиномиальный алгоритм;
    - для  $A$  существует псевдополиномиальный алгоритм;
    - найдётся задача из класса NP, которая не сводится к  $A$ .

4. Рассматривается задача о рюкзаке. Заданы  $n$  предметов с весами  $w_1, \dots, w_n$  и стоимостями  $v_1, \dots, v_n$ , а также положительное целое  $W$  – ограничение вместимости рюкзака. Требуется положить в рюкзак подмножество предметов с максимальной суммарной стоимостью, чтобы сумма весов выбранных предметов не превосходила ограничение  $W$ .

Рассматривается следующий алгоритм динамического программирования.

$$m(i, w) = \begin{cases} m(i-1, w), & \text{если } w_i > w, \\ \max\{m(i-1, w), m(i-1, w - w_i) + v_i\}, & \text{если } w_i \leq w, \end{cases}$$

где  $m(i, w)$  – максимальная стоимость, которую можно получить из первых  $i$  предметов с ограничением рюкзака  $w$ .

Оцените трудоёмкость этого алгоритма.

- $n$ ;
  - $nW$ ;
  - $n^2$ ;
  - $n^2W$ .
5. Пусть в NP-трудной задаче задан граф на  $n$  вершинах, степень которых ограничена параметром  $k$ . Алгоритм с какой трудоёмкостью позволит отнести задачу к классу FPT?
- $n^k$ ;
  - $k \cdot n^3$ ;
  - $2^k \cdot n^3$ ;
  - $k \cdot 2^n$ .
6. Каждой вершине графа  $G = (V, E)$  сопоставим переменную  $x_i$ . Какая задача записана в форме целочисленного линейного программирования:
- $$\sum_{i=1}^{|V|} x_i \rightarrow \max,$$
- $$x_i + y_j \leq 1, \forall (i, j) \in E,$$
- $$x_i \in \{0, 1\}.$$
- задача о независимом множестве;
  - задача о вершинном покрытии;
  - задача о клике;
  - задача коммивояжёра.
7. Вероятностный алгоритм, который гарантирует получение верного ответа, но работает за недетерминированное время принадлежит классу:
- Лас-Вегас;
  - Монте-Карло;
  - Атлантик-Сити;
  - Макао?
8. Рассматривается задача о максимальной 3-выполнимости. Задана булева формула в конъюнктивной нормальной форме  $n$  – число логических переменных  $m$  – число дизъюнкций. Каждая дизъюнкция содержит ровно 3 литерала. Найти набор

значений логических переменных, для которого было бы выполнено наибольшее число дизъюнкций.

Рассматривается следующий вероятностный аппроксимационный алгоритм:

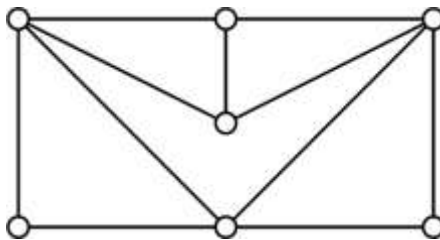
каждой логической переменной с вероятностью  $\frac{1}{2}$  назначаем значение «истина» или «ложь». Найдите коэффициент аппроксимации алгоритма.

- а)  $\frac{1}{2}$ ;
- б)  $\frac{3}{4}$ ;
- в)  $\frac{7}{8}$ ;
- г)  $\frac{15}{16}$ .

9. Расположите классы сложности в верном порядке вложенности.

- а)  $P \subseteq RP \subseteq BPP \subseteq ZPP$ ;
- б)  $P \subseteq ZPP \subseteq RP \subseteq BPP$ ;
- в)  $P \subseteq BPP \subseteq ZPP \subseteq RP$ ;
- г)  $ZPP \subseteq P \subseteq RP \subseteq BPP$ .

10. Какие из перечисленных циклов есть в графе:



- а) гамильтонов цикл и эйлеров цикл;
- б) только гамильтонов цикл;
- в) только эйлеров цикл;
- г) в графе нет ни гамильтонова, ни эйлерова циклов.

### Правильные ответы

| Вопрос № | Правильный ответ | Вопрос № | Правильный ответ |
|----------|------------------|----------|------------------|
| 1        | г                | 6        | а                |
| 2        | б                | 7        | а                |
| 3        | в                | 8        | в                |
| 4        | б                | 9        | б                |
| 5        | в                | 10       | б                |

### Критерии оценки

- «Отлично» – 9 правильных ответов;
- «Хорошо» – 7 правильных ответов;
- «Удовлетворительно» – 5 правильных ответов;
- «Неудовлетворительно» – 4 и менее правильных ответов.

### Темы докладов

1. Теорема Ладнера

2. Сильная NP-полнота задачи 3-разбиение
3. Сильная NP-полнота задачи об упорядочивании внутри интервалов
4. Сильная NP-полнота задачи об изоморфизме подлесу
5. Решение задачи о рюкзаке методом ветвей и границ
6. Решение задачи коммивояжера методом ветвей и границ
7. Вероятностный алгоритм для задачи о минимальном разрезе в мультиграфе
8. Вероятностный алгоритм Фрейвальдса проверки умножения матриц
9. Генетический алгоритм раскраски графа
10. Алгоритм Кристофидеса для задачи коммивояжера
11. Вероятностный алгоритм Каргера-Штейна для задачи о минимальном разрезе
12. Полиномиальная приближенная схема Грэхема для построения расписания работы на идентичных параллельных машинах
13. Полиномиальная приближенная схема для задачи об упаковке в контейнеры
14. Тест Миллера-Рабина
15. Лемма Шварца-Зиппеля и вероятностный тест равенства двух многочленов
16. Применение локального поиска в нейронных сетях Хопфилда
17. Рандомизированный алгоритм маршрутизации пакетов
18. Задача о независимом множестве в графах с ограниченной древовидной шириной
19. Жадный аппроксимационный алгоритм для задачи о выборе центров
20. Сегментация изображений на базе локального поиска
21. Распределение регистров с помощью раскраски графа
22. Алгоритмы Дрейфуса-Вагнера и Коу-Марковски-Бермана для задачи о дереве Штейнера
23. 4/3-аппроксимационный алгоритм для задачи MAX-SAT
24. Рандомизация кэширования
25. Жадные эвристики для задачи об упаковке в контейнеры
26. Квантовый алгоритм Шора для задачи факторизации чисел
27. Алгоритм Лина-Кернигана для задачи коммивояжера
28. Метод ветвей и границ для задачи о поиске  $k$  ближайших соседей
29. Алгоритмы решения 3-SAT за время меньше
30. Вероятностный алгоритм поиска корней квадратного многочлена над конечным полем
31. Вероятностный алгоритм Чу построения триангуляции Делоне
32. Аппроксимационный алгоритм для максимизации банковского флоута
33. Сложность аппроксимации задачи минимизации времени работы независимых параллельных машин
34. Алгоритм «Dancing Links» для укладки пентамино
35. 3-приближенный алгоритм для задачи о кратчайшей надстроке
36. 3/2-приближенный алгоритм для задачи о многонаправленном разрезе
37. Аппроксимационный алгоритм для задачи о дереве Штейнера со сбором премий
38. Проектирование и маршрутизация телекоммуникационных сетей с помощью целочисленного линейного программирования
39. Генетический алгоритм для задачи составления расписания занятий
40. Алгоритм имитации отжига для решения нонограмм
41. Монте-Карло алгоритм для головоломки «Какуро»

42. Муравьиный алгоритм для задачи о минимальном остовном дереве ограниченного диаметра
43. Квадратичная задача о назначении клавиш французской клавиатуры
44. Алгоритм Гейтса-Пападимитриу для сортировки блинчиков
45. Алгоритмы ветвей и границ (MTM и Mulknar) для задачи о нескольких рюкзаках
46. Квадратичная задача о рюкзаке, алгоритм QuadBranch
47. Решение sudoku с помощью задачи о точном покрытии
48. Квадратичная задача о назначениях. Метод Гилмора-Лоулера. Метод Каку-Томпсона
49. Алгоритмы ветвей и границ для построения минимальных эволюционных деревьев
50. Алгоритм Ловаса-Вемпала для вычисления объёма выпуклых тел
51. Оптимизация SQL запросов: динамическое программирование и вероятностные алгоритмы
52. Генетический алгоритм для задачи настройки системы распределения электроэнергии
53. Полиномиальная приближенная схема Арора для евклидовых задач коммивояжера и дерева Штейнера
54. Полиномиальная приближенная схема для задачи о локализации робота с минимальным маршрутом
55. KMS алгоритм раскраски графов с хроматическим числом 3
56. Вероятностный алгоритм развития персонажа в игре «Heroes of Might and Magic III»
57. Подход к игре «Тантрикс» на основе целочисленного линейного программирования
58. Аппроксимационные алгоритмы для задачи о прощальных поцелуях
59. Аппроксимационные алгоритмы для задачи о пожарных и эпидемии
60. Моделирование глобальных изменений температуры с помощью генетических алгоритмов
61. Задача коммивояжера на решетке с запрещенной окрестностью и выборочная лазерная плавка ( $r=1$ )
62. Задача о блинчиках и бедной официантке
63. Решение нонограмм с помощью генетического алгоритма
64. Задача о наведении вооружений на цели: генетический алгоритм, имитация отжига и VNS – локальный поиск с чередующимися окрестностями
65. Алгоритм Бансала раскраски гиперграфа с малым несоответствием
66. Задача о кластеризации электоральных округов
67. Задача об оптимизации работы склада - Amazon

| Показатели                   | Критерии  |
|------------------------------|---|
| Содержание доклада           | Анализирует изученный материал,<br><br>Выделяет наиболее значимые для раскрытия темы факты, научные положения,<br><br>Соблюдает логическую последовательность в изложении материала |
| Аргументированно отвечает на | Проявляет критическое мышление  |

|                       |   |
|-----------------------|---|
| вопросы               |   |
| Представление доклада | Использует иллюстративные, наглядные материалы,<br>Владеет культурой речи |

### Критерии оценки

- «Отлично» – доклад полностью соответствует описанным критериям;
- «Хорошо» – доклад соответствует описанным критериям за исключением некоторых замечаний не более чем по нескольким пунктам критериев;
- «Удовлетворительно» – доклад соответствует более чем половине описанных критериев;
- «Неудовлетворительно» – доклад не соответствует большей части описанных критериев.

### Вариант экзаменационного билета

| Задания  | Ответы   |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |
|--|--|---|---|----|----|---|-----------|---|---|---|----|----|---|
| 1. Описать принцип работы генетического алгоритма  | Раздел 6   |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |
| 2. Привести постановку задачи расписания с отношением предшествования  | Раздел 2   |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |
| 3. Описать алгоритмы Монте-Карло с односторонней и двусторонней ошибками   | Раздел 7   |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |
| 4. Применимы ли псевдополиномиальные алгоритмы к задаче коммивояжера?  | Не применимы. Задача коммивояжера является сильно NP-полной, так как NP-полна уже с весами 1 и 2 (к ней сводится задача о гамильтоновом цикле, раздел 3.6) |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |
| 5. Решить задачу о рюкзаке:<br><table border="1"><tr><td>Вес</td><td>1</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>Стоимость</td><td>4</td><td>7</td><td>8</td><td>10</td><td>13</td></tr></table> если $W = 5$ | Вес  | 1 | 2 | 2  | 3  | 4 | Стоимость | 4 | 7 | 8 | 10 | 13 | Максимальная стоимость 19<br>Предметы 1,2,3 |
| Вес  | 1  | 2 | 2 | 3  | 4  |   |           |   |   |   |    |    |   |
| Стоимость  | 4  | 7 | 8 | 10 | 13 |   |           |   |   |   |    |    |   |
| 6. Сформулировать задачу о независимом множестве в форме ЦЛП   | $\sum_{i=1}^n x_i \rightarrow \max,$ $x_i + x_j \leq 1, \forall (i, j) \in E,$ $x_i \in \{0,1\}$   |   |   |    |    |   |           |   |   |   |    |    |   |

### Критерии оценки

- «Отлично» – даны верные ответы на 5 вопросов из билета;
- «Хорошо» – даны верные ответы на 4 вопроса из билета;
- «Удовлетворительно» – даны верные ответы на 3 вопроса из билета;
- «Неудовлетворительно» – даны верные ответы на 2 и менее вопросов из билета.

