МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета ИВТ
_____________Д.Ю. Чалый
«_23_»____мая_____2023 г.

Рабочая программа дисциплины
«Математический анализ»

Направление подготовки
02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии

Профиль
«Информатика и компьютерные науки»

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения
очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 11 апреля 2023 г.,
протокол № 4

Программа одобрена НМК
факультета ИВТ
протокол № 6 от
28 апреля 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями дисциплины «Математический анализ» являются Целью освоения дисциплины «Математический анализ» является изучение основ математического анализа, объединяющих теорию действительного числа, теорию пределов, теорию рядов, дифференциальное и интегральное исчисление и их непосредственные приложения, а также приобретение знаний и умений в соответствии с государственным стандартом, формирование мировоззрения и развитие способности понимать и применять в исследовательской и прикладной деятельности современный математический аппарат.

2. Место дисциплины в структуре ОП бакалавриата

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части ОП бакалавриата.

Основу курса составляют дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной, а также дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных, теория числовых и функциональных рядов, в том числе рядов Фурье. Поэтому математический анализ необходим при изучении дисциплин базовой части профессионального цикла: «Теория вероятностей», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Методы оптимизации», «Численные методы». Также она предоставляет методы исследования, которые используются в дисциплинах вариативной части цикла МЕН, таких как «Математические методы в компьютерных технологиях» «Доп. главы математической статистики», «Концепции современного естествознания», дисциплин по выбору профессионального цикла, таких как «Цифровая обработка сигналов».

Студент первого курса, приступая к изучению математического анализа, должен иметь вполне определенную базовую подготовку по курсу математики за среднюю школу, и, в частности, хорошие знания по теме «Элементарные функции, их свойства и графики». Вместе с тем такие личностные характеристики как общая образованность, организованность и трудолюбие, самостоятельность, настойчивость в достижении цели необходимы при освоении дисциплины.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП бакалавриата

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Демонстрирует навыки решения типовых задач, выполнения стандартных действий ОПК-1.2 Демонстрирует навыки использования основных понятий, концепций, фактов, принципов математики, информатики, естественных наук для решения	**Знать:** постановки задач математического анализа; функции одной и нескольких переменных (пределы, непрерывность, производные и дифференциалы, исследование функций с помощью производных, интегральное исчисление); функциональные

	практических задач, связанных с применением математических и (или) естественных наук	последовательности и ряды; ряды Фурье; **Уметь:** вычислять пределы элементарных функций одной и нескольких переменных; находить производные элементарных функций одной и нескольких переменных; находить экстремумы функций; вычислять элементарные интегралы; применять интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач; исследовать ряды на сходимость; разложить функцию в ряд Фурье; **Владеть:** навыками решения практических задач математического анализа.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 16 зач. ед., 576 акад. час.

№ п/п	**Темы (разделы) дисциплины, их содержание**	**Семестр**	**Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)**						**Формы текущего контроля успеваемости** **Форма промежуточной аттестации (по семестрам)**
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Аксиоматика множества действительных чисел	1	2	2		1		3	

2.	Числовые последовательности. Предел последовательности	1	12	12		3		7	К.р. тема №1-2 коллоквиум
3.	Предел функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке.	1	13	13		2		7	К.р. Темы №2-3
4	Производные и дифференциалы	1	13	13		3		7	К.р. тема№4
5	Исследование функции с помощью производных.	1	11	11		2		7	
						2	34		Экзамен
	Всего за 1 семестр		**51**	**51**		**13**	**34**	**31**	**Экзамен**
6.	Функции многих переменных	2	7	7		2		5	Коллоквиум К.р. тема №6
7.	Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл.	2	15	15		2		6	К.р. тема №7
8.	Интегральное исчисление функции одной переменной. Интеграл Римана..	2	15	15		1		6	К.р. темы №7-8
9.	Числовые ряды.	2	6	6		1		5	
10.	Функциональные ряды	2	4	4		2		5	
11	Степенные ряды	2	4	4		2		5	
						2	34		Экзамен
	Всего за 2 семестр		**51**	**51**		**12**	**34**	**32**	**Экзамен**
12.	Функциональные последовательности и ряды	3	8	14		2		17	Опрос по теории
13.	Ряды Фурье.	3	9	12		1		16	К.р.. темы 12-13
14.	Интегралы, зависящие от параметра	3	5	8		2		16	
15.	Кратные интегралы	3	7	10		1		17	К.р. темы 14-15
16.	Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля	3	7	10		1		17	К.р. тема 16

						2	34		Экзамен
	Всего за 3 семестр		**36**	**54**		**9**	**34**	**83**	**Экзамен**
	Всего		**138**	**156**		**34**	**102**	**146**	

Содержание разделов дисциплины: Раздел 1. Аксиоматика множества действительных чисел

Аксиоматическое определение действительного числа. Понятие сечения. Упорядочение множества действительных чисел. Свойство плотности. Основная теорема Дедекинда. Арифметические действия над действительными числами. Абсолютные величины. Представление десятичного числа бесконечной десятичной дробью. Существование корня n-степени из действительного числа. Границы числовых множеств. Теорема о существование точной верхней и нижней границ. Архимедово свойство действительных чисел.

Раздел 2 Числовые последовательности. Предел последовательности

Числовые последовательности. Определение предела последовательности, примеры. Теорема о единственности предела. Свойства сходящихся последовательностей. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства. Монотонные последовательности. Теорема о существовании предела монотонной последовательности. Число е. Теоремы об арифметических операциях над сходящимися последовательностями. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Частичные последовательности и частичные пределы. Теорема Больцано-Вейерштрасса (лемма Кантора).

Раздел 3. Функции одной переменной и их пределы. **Непрерывность функции в точке и на промежутке**

Функции одной переменной. Общее определение предела функции в точке и определение на языке последовательностей. Односторонние пределы, предел на бесконечности, бесконечный предел. Первый и второй замечательные пределы. Следствия. Бесконечно малые функции. Сравнение бесконечно малых. Теорема о существовании предела монотонной функции. Критерий Коши существования предела функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке. Арифметические операции над непрерывными функциями. Непрерывность сложной функции. Непрерывность и разрывы монотонной функции. Непрерывность обратной функции. Свойства непрерывных функций. Теоремы Вейерштрасса. Теоремы Больцано- Коши. Понятие равномерной непрерывности. Теорема Кантора.

Раздел 4. Производные и дифференциалы

Дифференцируемость функции. Определение производной функции в точке. Геометрический и физический смысл производной. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Производные элементарных функций. Дифференцирование показательно-степенных выражений. Определение дифференциала функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы о среднем. Формула Тейлора. Разложение функции по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Другие формы остаточного члена формулы Тейлора. Примеры.

Раздел 5. Исследование функции с помощью производных

Исследование функции с помощью производных. Условие монотонности функции. Условие строгой монотонности функции. Экстремумы функции, определения, необходимые и достаточные условия. Наибольшие и наименьшие значения функции. Выпуклые и вогнутые функции. Определения. Необходимые и достаточные условия выпуклости функции. Точки перегиба. Асимптоты. Построение графика функции. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя. Приближенное решение уравнений. Кривые на плоскости. Параметрическое дифференцирование.

Раздел 6. Функции многих переменных

Линейное нормированное пространство. Определение, примеры. Эквивалентность норм в пространстве R^n. Сходимость последовательностей в R^n. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества. Функции многих переменных. Определения, примеры. Предел функции. Повторные пределы. Непрерывные функции нескольких переменных. Теоремы Вейерштрасса. Равномерная непрерывность. Непрерывность сложной функции. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Частные производные. Геометрическая иллюстрация для случая функции двух переменных. Производная сложной функции, Производная по направлению. Градиент. Полный дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теорема о смешанных производных. Формула Тейлора. Экстремумы функции нескольких переменных. Определение. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума

Раздел 7. Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл

Понятие первообразной и неопределенного интеграла. Основные свойства первообразной и неопределенного интеграла. Таблица основных интегралов. Метод замены переменной. Примеры. Метод интегрирования по частям. Примеры. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей. Теорема о разложении дроби в сумму простейших дробей. Определений коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование выражений, содержащих радикалы. Интеграл от дифференциального бинома. Подстановки Эйлера. Примеры.

Интегрирование выражений, содержащих рациональные функции от $sinx\ ;\ cosx$. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Раздел 8. Интегральное исчисление функции одной переменной. Интеграл Римана

Определенный интеграл Римана, определение, необходимое условие интегрируемости. Интегральные суммы Дарбу. определение, свойства. Критерий интегрируемости. Основные классы интегрируемых функций. Свойства интегрируемых функций. Свойства определенного интеграла. Оценки интегралов. Интеграл с переменным верхним пределом. Теоремы о непрерывности и дифференцируемости. Формула Ньютона - Лейбница. Формула замены переменной в определенном интеграле. Метод интегрирования по частям. Применение определенного интеграла. Задача вычисления площади. Задача определения объема тела вращения. Вычисление длины кривой. Приближенное вычисление определенного интеграла. Несобственные интегралы с бесконечными пределами. Определение. Свойства. Основной критерий сходимости (критерий Коши). Сходимость интегралов в случае положительных функций (теоремы сравнения). Признак Абеля – Дирихле. Несобственные интегралы от неограниченных функций. Определение. Примеры.

Раздел 9. Числовые ряды

Сходимость числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости числового ряда. Интегральный признак сходимости числового ряда. Теоремы сравнения. Признаки Коши, Даламбера сходимости числового ряда. Признак Дирихле сходимости числового ряда. Признак Лейбница сходимости числового ряда. Оценка остатка ряда Лейбница.

Раздел 10. Функциональные ряды.

Начальные понятия и определения.

Раздел 11. Степенные ряды

Понятие степенного ряда. Теорема Абеля. Интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда. Вычисление радиуса сходимости. Формула Коши-Адамара. Теорема о почленном интегрировании и дифференцировании степенного ряда. Ряд Тейлора Основные разложения в ряд Тейлора.

Раздел 12. Функциональные последовательности и ряды

Понятие функционального ряда, сходимость. Соотношение между сходимостью рядов и последовательностей. Основные нормы. Пространство С[а,в]. Основные виды сходимости рядов и последовательностей непрерывных функций. Соотношение между равномерной сходимостью и другими видами. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности непрерывных функций. Признак Вейрштрасса равномерной сходимости функционального ряда. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании функциональных рядов.

Раздел 13. Ряды Фурье

Скалярное произведение в линейных пространствах. Ортогональность. Линейная независимость ортогональных систем. Тригонометрическая система - пример системы ортогональных функций. Свойство минимальности коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Коэффициенты Фурье по тригонометрической системе. Ряд Фурье. Теорема о поточечной сходимости ряда Фурье. Ядро Дирихле. Свойства коэффициентов Фурье четных-нечетных функций.

Теорема Фейера. Равномерное приближение периодических непрерывных функций тригонометрическими многочленами и равномерное приближение непрерывных функций алгебраическими многочленами. Теорема о полноте тригонометрической системы в классе интегрируемых функций.

Раздел 14. Интегралы, зависящие от параметра

Понятие интеграла, зависящего от параметра. Свойства (теоремы о непрерывности, дифференцируемости, о повторном интегрировании). Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра. Дифференцируемость и интегрируемость интеграла по параметру. Эйлеровы интегралы. Определение и свойства. Связь между гамма - и бета - функциями.

Раздел 15. Кратные интегралы

Множества, измеримые по Жордану. Критерий измеримости. Свойства измеримых множеств. Многомерный интеграл Римана. Интегрируемость непрерывных функций. Свойства кратных интегралов. Сведение кратного интеграла к повторному. Теорема о замене переменных в двойном интеграле. Сферические и цилиндрические координаты в R^3.

Раздел 16. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Поверхностные интегралы. Элементы теории поля

Криволинейный интеграл первого рода. Его свойства и вычисление. Криволинейный интеграл второго рода. Его свойства, связь с криволинейным интегралом первого рода и вычисление. Формула Грина. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Площадь поверхности. Поверхностные интегралы. Их свойства. Формула Стокса. Формула Гаусса - Остроградского. Элементы теории векторного поля.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Формы преподавания математического анализа достаточно традиционны.

Это *лекции*, как наиболее эффективный по времени путь передачи материала большой группе обучаемых. Как правило, студенты записывают в свои конспекты излагаемый на доске материал. Составление конспекта лекций и дальнейшая работа с ним при подготовке к занятиям выступает как значительная часть процесса обучения.

Практические занятия проводятся в академических группах под руководством преподавателя. Основной целью является формирование у студентов понимания теоретического материала, изложенного на лекции, через решение упражнений и задач. Здесь преподавание строится на разумном для каждой темы сочетании коллективной работы группы с самостоятельной индивидуальной работой студентов.

Домашние задания в основном состоят из примеров, аналогичных решаемым на практических занятиях. Основная цель домашних заданий – закрепление пройденного материала.

Групповые консультации проводятся перед контрольными мероприятиями (контрольные работы, зачетные работы, экзамены) для большой группы студентов с целью систематизации знаний и устранению имеющихся сложностей с пониманием материала общего характера.

Индивидуальные консультации проводятся регулярно для желающих с целью устранения имеющихся у студентов проблем с материалом частного характера.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, и т.д. при выполнении студентом домашних заданий. Практические занятия строятся следующим образом:

1. Формулировка целей занятия, основных вопросов, которые должны быть рассмотрены.
2. Решение нескольких типовых задач у доски.
3. Самостоятельное решение задач.
4. Разбор ошибок.

По результатам самостоятельного решения задач и по проверке подготовки студента к практическому занятию (письменный опрос по теории и проверка домашнего задания) студент получает оценку. По материалам темы проводится контрольная работа.

Для оценивания работы студента используется балльно-рейтинговая система. Учет индивидуальных достижений за время обучения представляется очень важной формой работы со студентами. На Google Диск для группы студентов мы создаем папку. В нее сразу помещается план работы на семестр, программа к экзамену (в которой указана программа-минимум, вопросы с доказательством, дополнительные вопросы из списка самостоятельной работы), вопросы к коллоквиуму и таблица в формате Excel, в которой ведется учет по контрольным мероприятиям каждой темы (контрольная работа, опрос по теории и т.д.). Определенная сумма баллов за семестр дает право сдавать экзамен (допуск к экзамену) и получения зачета по практике. Сумма баллов, полученных студентом на экзамене, добавляется к семестровой сумме, и делается перевод в обычную пятибалльную шкалу оценок. Таким образом, экзаменационная отметка во многом определяется оценками, полученными студентом в течение семестра. Это заставляет студента работать в течение всего семестра. Выполнение заданий, связанных с простым воспроизведением лекционного материала+ работа в семестре, позволяющая перейти пороговый рубеж усвоения дает возможность получения удовлетворительной оценки. Решение усложненных задач на основе приобретенных знаний, умений и навыков, с их применением в нетипичных ситуациях позволяет студенту получить хорошую или отличную оценку.

Экзамен проводится в письменной форме, способствующей выставлению более объективной отметке по сравнению с устной формой.

Для каждой академической группы составляется комплект вопросов, равномерно покрывающих весь материал курса. Примерные комплекты вопросов приведены в приложении. Для каждого вопроса, в зависимости от его уровня сложности, определяется количество очков (обычно от одного до четырех) и время на подготовку ответа (обычно от пяти до двадцати минут). Сам экзамен проводится в большой – потоковой – аудитории, в которой студенты всей академической группы распределяются равноудаленно. Предлагается вопрос, указывается количество очков и время на подготовку ответа. Преподаватель убеждается, что вопрос всем понятен. Начинается отсчет времени, сразу после его завершения собираются ответы, записанные на отдельных листах. Далее следует второй вопрос и т.д.

Студенты имеют возможность оспорить результат проверки каждого ответа, обычно на это уходит 30 – 40 минут. Далее подсчитывается количество очков, набранных каждым экзаменуемым, и выставляется оценка по правилу:

«отлично», если студент набрал 2/3 от максимально возможной суммы,

«хорошо», если набрано не менее половины этой суммы и

«удовлетворительно» за треть суммы.

Описанная модель экзамена обладает очевидными достоинствами. Все студенты во время экзамена работают в одинаковых условиях, отвечают на одни и те же вопросы; большое число вопросов позволяет адекватно оценить уровень подготовки; практически в течение всего экзамена активно участвуют в процессе; объективность оценки знаний каждого студента не подвергается сомнению.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса используются: для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами

OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232

LibreOffice (свободное)

издательская система LaTeX;

для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next")

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины

а) основная:

1. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 1. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 703с
2. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 2. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 720с
3. Кудрявцев, Л. Д., Курс математического анализа : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. В 3 т. Т. 3. - 6-е изд., перераб. и доп., М., Юрайт, 2014, 351с

б) дополнительная:

1. Бондаренко, В. А., Математический анализ. Предел и непрерывность [Электронный ресурс] : текст лекций / В. А. Бондаренко, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2003, 74chttp://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20030272.pdf

2. Математический анализ [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / М. В. Ануфриенко, В. А. Бондаренко, А. В. Зафиевский, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2010, 137c http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100355.pdf

3. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.1. - 7-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 607с
4. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учебник для вузов. В 3 т. Т.1. - 8-е изд., М., Физматлит, 2003, 679с
5. Шилов, Г. Е., Математический анализ : функции одного переменного : учеб. пособие для ун-тов. Ч.1, М., Наука, 1969, 588с
6. Шилов, Г. Е., Математический анализ : функции одного переменного : учеб. пособие для ун-тов. Ч.2, М., Наука, 1969, 528
7. Рудин, У., Основы математического анализа : пер. с англ. / У. Рудин. - 2-е изд., стереотип., М., Мир, 1976, 319с.
8. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.2. - 7-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 800с.
9. Фихтенгольц, Г. М., Курс дифференциального и интегрального исчисления : учеб. пособие для ун-тов и пед. ин-тов. Т.3. - 5-е изд., стереотип., М., Наука, 1970, 656с
10. Бондаренко, В. А., Методические указания по подготовке к экзамену по математическому анализу / В. А. Бондаренко, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2001, 15с.
11. Демидович, Б. П., Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие для вузов / Б. П. Демидович, М., Астрель, 2005, 558с.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).
2. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru).
3. Электронная библиотека издательства «Лань» (https://e.lanbook.com/)

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

— учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
— учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
— учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
— учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
— помещения для самостоятельной работы;
— помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Специальные помещения укомплектованы средствами обучения, служащими для представления учебной информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

д-р физ.-мат.наук, профессор Бондаренко В.А.,

к.ф.-м.н., доцент Шабаршина Г.В.

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины «Математический анализ»

Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

Задания для самостоятельной работы

1 семестр

Вариант контрольной работы по теме: «Метод математической индукции. Графики. Числовые последовательности. Предел последовательности**»**

1. Доказать, используя метод математической индукции:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

2. Построить график функции методом преобразования: $y=\arcsin|2x+1|$.

Ответ: Выполнить последовательность преобразований графика $y=arcsinx$.

а) Преобразование модуль в аргументе.

б) Сжатие с коэффициентом 2 вдоль оси ОХ

в) Сдвиг влево вдоль оси ОХ на 0,5

3. Построить график сложной функции: $y=e^{\frac{1}{x-2}}$

Ответ: Выполнить композицию функций $y=e^x$ и $y=\frac{1}{x-2}$ методом нахождения промежутков постоянства монотонности.

4. Построить график функции в полярной системе координат: $r=\left[\frac{\phi}{\pi}\right]$.

Ответ: При $\varphi>0$. График строится в полярной системе координат с помощью таблицы

5. Построить график функции, заданной параметрически:

$$\{x=t^2,\ y=\sqrt{1-t^4}.$$

Ответ: При $|t|\le 1$. График строится в декартовой системе координат с помощью таблицы.

6. Доказать (по определению), что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}=0$.

Ответ: $n_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right]+1$.

7. Определить значение выражения: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n+1}-n\right)$.

Ответ: -1.

8. Определить значение выражения: $\lim$

$\underline{2\,n+1}$.

$_{n\to\infty}\ n\cdot 3^{n}$

Ответ: 0.

9. Вычислить предел последовательности $x_n = \sqrt[n]{n2 + 2n}$.

Ответ: 2.

10. Найти ¿ x_n, $\inf x_n$, $\lim_{n\to\infty}$ ¿ x_n¿, $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ ¿ x_n ¿, если $x_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}$.

Ответ: ¿ $x_n = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\inf x_n = \frac{-\sqrt{3}}{2}$; $\lim_{n\to\infty}$ ¿ $x_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ¿; $\underline{\lim}_{n\to\infty}$ ¿ $x_n = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ ¿.

$x_n = \frac{1}{n} + \sin\frac{\pi n}{3}$.

Показатели и критерии, используемые при выставлении оценки за контрольную работу:

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1	ОПК-1: Знать принцип математической индукции; Уметь строить доказательство на основе метода математической индукции: Владеть навыками доказательства математических фактов на основе метода математической индукции.	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2 ---5	Знать свойства основных элементарных функций; основные элементарные преобразования графиков; определения сложной функции; функции, заданной параметрически и в полярных координатах: Уметь строить графики основных элементарных функций; Владеть навыками изображения графика по известным свойствам функции.	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

6---10	Знать определения, понятия теории пределов последовательностей; Уметь вычислять пределы	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом

	последовательностей; Владеть навыками преобразования формул для вычисления пределов.	верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 10 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:
- менее 5 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 5 до 7 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 7 до 9 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 9 баллов — оценка «отлично».

Вариант контрольной работы по теме: «Предел функции. Непрерывность функции в точке и на промежутке».

1. Написать определение предела на языке окрестностей и последовательностей $f(x)=2-0$.

2. Найти предел : $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+5x}-x\right)$. **Ответ:** $\frac{5}{2}$.

3. Найти предел : $\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x+tg^2 x}{xsinx}$. **Ответ:** 3.

4. Найти предел : $\lim_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{1-cosx}}$. **Ответ:** e^2.

5. Найти предел: $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$. **Ответ:** $\frac{2}{3}$.

6. Определить порядок бесконечно малой величины $f(x)=\frac{\ln(1+2x)}{\sqrt{x}}$ при $x\to0$

Ответ: $\frac{1}{2}$

7. Выделить главную часть функции. $f(x)=\frac{sinx}{x^4}$ при $x\to0$

Ответ: $\frac{1}{x^3}$

8. Верно ли утверждение $arctg^3 x=o(x)$ при $x\to0$.

P

Ответ: Верно.

9. При каких значениях параметра α функция непрерывна в точке 0.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin\left(|x|^{\alpha}\right)}{x}, & при\ x\neq 0\\ 0, & при\ x=0\end{cases}$$

Ответ: $\alpha>1$.

1	Знать основное определение предела функции в точке и не бесконечности; Уметь переформулировать определение.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2---5	Знать замечательные пределы; Уметь вычислить предел функции; Владеть навыками преобразования формул, задающих функцию.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
6---8	Знать определение бесконечно малой, понятие порядка, сравнение бесконечно малых функций; Уметь определить порядок бесконечно малой, выделить главную часть;	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
9	Знать определение непрерывной в точке функции; Уметь вычислить	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом

	односторонние пределы;	верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 9 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:
- менее 4.5 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 4.5 до 6 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 6 до 8 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 8 баллов — оценка «отлично».

Вариант контрольной работы по теме: «Производные и дифференциалы».
Найти производную:

1. $f(x)=x\cdot\sin\sqrt{x}$ **Ответ:** $f'(x)=\sin\sqrt{x}-\frac{\sqrt{x}}{2}\cos\sqrt{x}$

2. $f(x)=\frac{1}{\sqrt[4]{1+e^{\cos 2x}}}$ **Ответ:** $f'(x)=\frac{1}{2}\left(1+e^{\cos 2x}\right)^{-\frac{5}{4}}\cdot e^{\cos 2x}\cdot\sin 2x$

3. $f(x)=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}$ **Ответ:** $f'(x)=\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{\sin x}}\left(\frac{\frac{2x}{1+x^2}\cdot\sin x-\cos x\cdot\ln\left(1+x^2\right)}{\sin^2 x}\right)$

4. Построить график функции $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$

Ответ: Локальный минимум при x=0. Точки перегиба при x=1 и x=-1. Асимптот нет

Вычислить пределы с помощью правила Лопиталя.

5. $\frac{\pi e^{3x}-2arcctgx}{x}$ **Ответ:** $3\pi+2.$

6. $\left(2^{\frac{1}{\,}}+\cos x\right)^{x-\frac{1}{2}\pi^2\,9}$ **Ответ:** $e^{\frac{-3\sqrt{3}}{4\pi}}$

7. Найти наибольшее значение функции $f(x)=x^4-2x^2$ *на отрезке* $[0;2]$

Ответ: 8

8) Составить формулу Тейлора $f(x)=\frac{1}{x}$ в окрестности точки $x_0=3$, $n=3$, вычисляя коэффициенты с помощью производных.

Ответ: $\frac{1}{x}=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}\;\frac{1}{27}(x-3)^2+\frac{1}{\;}\;{}^{3}\;{}^{3}$

P

$(x-3) -$ 162 $(x-3)$
$+\, o\big(($
$x-3)\big)$

P

9) Составить формулу Тейлора $f(x)=\sin 2x$ в окрестности точки $x_0=\frac{\pi}{4}$, $n=3$, используя разложение Маклорена.

Ответ: $\sin 2x = 1-2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2+0\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3$

10) Вычислить предел, используя формулу Тейлора $\dfrac{\dfrac{e^x-\cos 4}{x-sinx}}{\ln(1+2x^2)}$

Ответ: $\frac{17}{4}$

1---3	Знать формулы дифференцирования: таблицу производных; Уметь вычислять производные; Владеть навыками решения стандартных задач.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
4	Знать план исследования функции; Уметь провести исследование функции и построить график по результатам этого исследования; Владеть навыками решения задач исследования функции на монотонность, экстремумы, выпуклость.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
5---6	Знать правила Лопиталя; Уметь применять правила для вычисления пределов.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения;

		0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
7	Знать алгоритм исследования функции на наибольшее/наименьшее значение; Уметь выполнить необходимые действия; Владеть навыками решения экстремальных задач.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
8---10	Знать общий вид формулы Тейлора; пять стандартных разложений; Уметь написать формулу Тейлора заданного порядка для конкретной функции непосредственно и используя стандартные разложения; применить формулу для вычисления пределов.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 10 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:
- менее 5 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 5 до 7 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 7 до 9 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 9 баллов — оценка «отлично».

Коллоквиум

Предел и непрерывность функции. Определения. Сформулируйте определение:

1. неограниченной на множестве X функции;
2. монотонной на промежутке функции;
3. Записать определения для всевозможных комбинаций:

P

$f(x)$ □ y_0 x □ x_0

P

$f(x) \to -\infty$ при $x \to x_0-0$

$f(x) \to +\infty$ при $x \to x_0+0$

$f(x) \to \infty$ при $x \to -\infty$, $x \to +\infty$, $x \to \infty$.

4. Записать определения функции, непрерывной в точке по Коши и по Гейне;

Основные теоремы (без доказательства).

1. Сформулируйте теорему о пределе суммы, разности, произведения и частного двух функций;
2. Сформулируйте теорему о первом замечательном пределе;
3. Сформулируйте теорему о втором замечательном пределе;
4. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции;
5. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса для функций, непрерывных на отрезке.
6. Сформулируйте теоремы Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.

2 семестр

Контрольная работа по теме: «Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл».

1) $\int \frac{x+5}{x(x+2)}dx$ 2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$ 3) $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[4]{3x+5}}{x}dx$ 5) $\int (2x+3)\cos 3x\,dx$

6) $\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+5)^2}dx$ 7) $\int \frac{dx}{(2x+3)^3}$

8) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x+5}$

9) $\int e^x \cdot \cos 2x\,dx$

Ответы: 1) $F(x)=\frac{5}{2}\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|x+2|+c$

2) $F(x)=\frac{5}{2}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+c$

3) $F(x)=e^{\sqrt{2x-1}}+c$

4) $F(x)=t-2\left(\ln\frac{\sqrt[4]{5}-t}{\sqrt[4]{5}+t}-\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)+\sqrt{5}$

Р

arctg t $\sqrt[4]{5}$ $) + c$, где $t = \sqrt[4]{3x+5}$

5) $F(x) = \left(\frac{2x}{3} + 1\right)\sin 3x + \frac{2}{9}\cos 3x + c$

P

6) $F(x) = -\frac{1}{x^2+2x+5} + c$

7) $F(x) = -\frac{3}{2(2x+3)^2} + c$

8) $F(x) = -\frac{1}{2\,ctg\frac{x}{2}+1} + c$

9) $F(x) = \frac{e^x}{5}(2\sin 2x + \cos 2x) + c$

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1	ОПК-1: Знать таблицу основных интегралов; Уметь разложить рациональную дробь в сумму простейших дробей, уметь интегрировать простейшие рациональные дроби.	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
2	ОПК-1: Знать таблицу основных интегралов; Уметь преобразовывать подинтегральное выражение, содержащее квадратный трехчлен; владеть навыком выполнения замены переменной; Уметь разложить рациональную дробь в сумму простейших дробей, уметь интегрировать простейшие рациональные дроби.	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
3 ---4	ОПК-1: Знать таблицу основных интегралов; Владеть навыком выполнения замены	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая

	переменной; Уметь разложить рациональную дробь в сумму простейших дробей, уметь интегрировать простейшие рациональные дроби.	смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
5	ОПК-1: Знать метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла; Владеть навыками применения метода интегрирования по частям для неопределенного интеграла	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
6---7	ОПК-1: Знать метод внесения под знак дифференциала; Владеть навыками преобразования подинтегрального выражения для вычисления интегралов.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
8	ОПК-1: Знать метод замены переменной для вычисления неопределенного интеграла; универсальную тригонометрическую подстановку; Владеть навыками применения метода замены переменной для вычисления интегралов.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»;

		1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
9	ОПК-1: Знать метод интегрирования по частям для неопределенного интеграла; Владеть навыками применения метода интегрирования по частям для неопределенного интеграла	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Максимальное суммарное количество баллов по ОПК-1 – 9 баллов

Набранное количество баллов соответствует оценке за контрольную работу:
- менее 5 баллов — оценка «неудовлетворительно»,
- от 5 до 6 баллов — оценка «удовлетворительно»,
- от 6 до 8 баллов — оценка «хорошо»,
- не менее 8 баллов — оценка «отлично».

Контрольная работа по теме: «Интегральное исчисление функции одной переменной. Интеграл Римана. Приложения определённого интеграла. Несобственные интегралы.

1. Найти интеграл: $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$ **Ответ:** 2 - ln2
2. Найти интеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+\cos x}$ **Ответ:** $\frac{1}{\sqrt{2}}\, arctg \frac{1}{\sqrt{2}}$.
3. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y=\sin x$ и $y=\frac{1}{2}$, $x\in[0;\pi]$, $y\geq\frac{1}{2}$.

   Изобразить в декартовой системе координат. **Ответ:** $\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$
4. Вычислить длину кривой $r(\varphi)=1-\varphi$ при $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Изобразить в полярной системе координат.

   Ответ: $\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}+(\pi-1)\sqrt{\pi^2-2\pi+2}+\ln\frac{1+\sqrt{2}}{1-\pi+\sqrt{\pi^2-2\pi+2}}\right)$
5. Вычислить объём, получаемый при вращении криволинейной трапеции, ограниченной графиками функции $x=y^2$, $x=9$, $y=0$.

   Ответ: $\frac{81\pi}{2}$

6. Вычислить несобственные интегралы с помощью предела. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+1}$

   Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \ln(4\sqrt{3}-7)$

7. $\int_0^2 \frac{xdx}{\sqrt[3]{4-x^2}}$ **Ответ**: $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$.

8. Исследовать на сходимость несобственные интегралы $\int_1^{+\infty} \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{x^2-1}}$

   Ответ: Интеграл сходится по признаку Дирихле.

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1-2	ОПК-1: Знать метод интегрирования по частям, метод замены переменной в определенном интеграле; Уметь применять метод замены переменной в определенном интеграле, уметь проверить условия применимости теоремы о замене переменной в определенном интеграле.	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
3---5	ОПК-1: Знать геометрический смысл определенного интеграла, формулы вычисления площадей, объемов и длин кривых с помощью определенного интеграла; Уметь вычислить площади, объемы и длины кривых с помощью определенного интеграла; .	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
6---7	ОПК-1: Знать определение несобственного интеграла; Уметь вычислить несобственный интеграл по	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая

	определению.	смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
8	ОПК-1: Знать понятие абсолютной и условной сходимости несобственного интеграла, формулировки признаков сходимости несобственного интеграла; Владеть навыками исследования интеграла на сходимость.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Контрольная работа по теме: «Функции многих переменных. Числовые ряды.»

1. Найти и изобразить в декартовой системе координат область определения функции $z=\sqrt{\sin\pi\left(x^2+y^2\right)}$.
2. Найти линии уровня функции и изобразить их в декартовой плоскости $z=y\left(x^2+1\right)$.
3. Исследовать двойные пределы, найти их значения или доказать, что предел не существует $\frac{\sqrt[3]{8+2x^2y}-2}{\sin\left(x^2y\right)}$. **Ответ:** $\frac{1}{8}$
4. $\frac{x-4}{5y+x^2}$. **Ответ:** предел не существует.
5. Найти частные производные первого порядка $z=\ln tg\frac{x}{y}$.

   Ответ: $z'_x=\frac{2}{y\cdot\sin\frac{2x}{y}}$. $z'_y=\frac{-2x}{y^2\cdot\sin\frac{2x}{y}}$

6. Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ функции, заданной неявно $e^z-xyz=0$. Задаёт ли данное уравнение функцию $z=f(x,y)$ в окрестности точки $x=1$, $y=e$?

   Ответ: $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{yz}{}$ $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{xz}{}$. Не задаёт.

P

$\partial x \quad e^z - xy \qquad \partial y \quad e^z - xy$

P

7. Исследовать ряды на сходимость: $\sum_{n=1}^{\infty} \square \frac{n+2^{-n}}{n^2 \quad -n}$. **Ответ:** Расходится по признаку сравнения с гармоническим рядом.
8. $\sum_{n=1}^{\infty} \square ¿¿$. **Ответ:** Сходится по признаку Лейбница.

Номер задачи	Критерии	Шкала оценивания
1---2	ОПК-1: Знать свойства основных элементарных функций; Уметь решить уравнения и неравенства, задающие область определения, уметь изобразить на плоскости множество решений. Знать определение линии уровня; Уметь изобразить на плоскости множество кривых – линий уровня.	0 баллов – Задание не выполнено; 0.3 балла – Задание выполнено частично, имеет ошибки, осуществлена попытка решения на основе правильных методов и идей решения; 0.5 балла – Задание выполнено не полностью, с существенными ошибками, но подход к решению, идея решения, метод правильные; 0.7 балла – Задание выполнено полностью и правильно, но решение содержит некоторые неточности и несущественные ошибки; допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – Задание выполнено полностью и абсолютно правильно ; все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
3---4	ОПК-1: Знать определение двойного предела, повторных пределов, пределов по направлению; Уметь вычислить пределы, используя сведение к замечательным пределам, переход к полярной системе координат. Уметь доказать отсутствие предела, используя предел по направлению.	0 баллов – полностью не верно подсчитано число всех возможных и(или) благоприятных исходов; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
5---6	ОПК-1: Знать определения дифференцируемости функции двух переменных, частных производных первого и высших порядков; Уметь вычислить частные производные.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная

		ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.
7---8	ОПК-1: Знать понятие абсолютной и условной сходимости числового ряда, формулировки признаков сходимости числовых рядов; Владеть навыками исследования ряда на сходимость.	0 баллов – выбран неверный метод решения или допущена существенная смысловая ошибка; 0.3 балла – ход решения в целом верный, но имеется небольшая смысловая ошибка (например, потерян простой множитель или слагаемое); 0.5 балла – решена ровно половина задачи или ответ верный, но отсутствует существенная часть решения; 0.7 балла – допущена незначительная ошибка или «опечатка»; 1 балл – все существенные детали в решении присутствуют, дан верный ответ.

Коллоквиум

1. Сформулируйте определение неограниченной последовательности точек пространства R^m .
2. Сформулируйте определение “по Коши” предела функции $u(M)$ в точке..
3. Сформулируйте определение “по Гейне” предела функции $u(M)$ при $M \to \infty$.
4. Сформулируйте определение дифференцируемой функции f(x,y) в точке $M(x_0,y_0)$. Геометрический смысл.
5. Сформулируйте теоремы о необходимых и достаточных условиях дифференцируемости функции f(x,y) в точке $M(x_0 , y_0)$.
6. Пусть функция f непрерывна. Доказать, что множество D точек пространства R^n , для которых $\{ f(x_1 ,x_2 ,\dots x_n)>0\}$ открыто. (Можно считать, что D множество на плоскости: D= $\{ f(x,y)>0 \}$)
7. Доказать, что если числовые последовательности x_n и y_n являются фундаментальными, то последовательность точек (x_n , y_n) является фундаментальной.

3 семестр

Типовой вариант контрольной работы по теме: «Функциональные последовательности и ряды. Ряды Фурье».

1. Вычислить предельную функцию функциональной последовательности $f_n(x)=\frac{nx^2+x}{\sqrt{n^2+1}}$. **Ответ:** $f(x)=x^2$.

2. Исследовать характер сходимости (равномерность) функциональных последовательностей: а) $f_n(x)=\frac{\sin nx}{n}$ **Ответ:** сходится равномерно к 0 при

Р

всех x. b) $f_n(x) = x \cdot arctg \frac{n}{x}$. **Ответ:** сходится неравномерно на любом неограниченном промежутке.

3. Исследовать на равномерную сходимость на $(-\infty,+\infty)$ функциональный ряд $\sum_{n}^{\infty} \frac{n+\sin x}{n^3+\cos^3 x}$. **Ответ:** сходится равномерно по признаку Вейерштрасса.
4. Найти область сходимости степенного ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} ¿$. **Ответ:** $x \in \left(\frac{-1}{2};\frac{1}{2}\right)$
5. Найти область сходимости функционального ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{\sqrt{n4+1}}$. **Ответ:** $x \in 1$.
6. Разложить функцию в ряд Тейлора, используя метод почленного дифференцирования $f(x)=\frac{1}{x^2}$ $x_0=3$. **Ответ:** $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^{n+2}} \cdot (x-3)^n$ при $x \in (0;6)$.
7. Разложить функцию в степенной ряд, используя ряд Маклорена степенной функции $f(x)=\sqrt{x}$ $x_0=1$.
Ответ: $1+\frac{x-1}{2}+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-3)!!}{n!\,2^n}(x-1)^n$.
8. Суммировать степенной и числовой ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+2)^{2n}}{3^n}$ **Ответ**: $3\cdot\left(\frac{x+2}{x^2+4x+1}\right)^2$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}{}^{n}$ **Ответ**: ln 2
9. Разложить функцию $y=sign\sin 2x$ в ряд Фурье в интервале $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.
Ответ: $\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(4n+2)x}{2n+1}$

Критерии оценивания

Каждое задание оценивается отдельно.

Шкала оценивания решения задачи:

Баллы	Критерии
0 баллов	Полное отсутствие решения
0,3 балла	Задача решена менее чем на половину, или допущены содержательные ошибки в алгоритме решения
0,5 балла	Задача решена не полностью, но более чем на половину, или допущены вычислительные ошибки, повлиявшие на ход решения задачи
0,7 балла	Задача решена, но допущены незначительные вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения задачи
1балл	Задача решена верно

Баллы суммируется по всей контрольной работе и переводятся в оценку по следующей шкале:

Баллы	**Оценка**
Менее 5 баллов	«Неудовлетворительно»
5 – 7 баллов	«Удовлетворительно»
7-8 баллов	«Хорошо»
Более 8 баллов	«Отлично»

Типовой вариант контрольной работы по теме: «Интегралы, зависящие от параметра. Кратные интегралы».

1) Вычислить предельную функцию ИЗП $\int_0^1 \frac{xdx}{1+\alpha^2 x^2}$

Ответ: $I(\alpha)=\{$

Найти область сходимости НИЗП.

2) $\int_1^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x}+1\cdot(1+x\alpha)}$ **Ответ:** $\alpha > \frac{3}{2}$ 3) $\int_0^1 \frac{\sin^3 xdx}{x^{2\alpha}\cdot(1+x\alpha)}$ **Ответ:** $\alpha \in 2$

4) Продифференцировать по правилу Лейбница $\int_1^{2\alpha} \frac{\sin(\alpha x^3)}{x} dx$ **Ответ:**

$$\frac{3\sin 8\alpha^4 - \cos 8\alpha^4 + \cos\alpha}{3\alpha}$$

5) Вычислить интеграл сведением к $\beta-функции$ $\int_2^4 \sqrt[4]{(x-2)(4-x)^7}\,dx$ $\frac{7\pi}{8\sqrt{2}}$

Ответ:

6) Вычислить $\iint_{\Omega} ydxdy$, где Ω – область, ограниченная кривыми $y=x^2$, $y=0$, $x=-1$.

Ответ: $-\frac{1}{10}$

7) Вычислить двойной интеграл по области в полярных координатах. Сделать рисунок. $\iint_{y\le x} 1\le x^2+y^2\le 2$. **Ответ:** 0

8) Вычислить интеграл $\iiint_V x^2\,dxdydz$, где V – четверть шара: $x^2+y^2+z^2=1$ $(y, z \ge 0)$.

Ответ: $-\frac{2}{15}$

Критерии оценивания

Каждое задание оценивается отдельно.

Шкала оценивания решения задачи:

Баллы	**Критерии**
0 баллов	Полное отсутствие решения
0,3 балла	Задача решена менее чем на половину, или допущены содержательные ошибки в алгоритме решения
0,5 балла	Задача решена не полностью, но более чем на половину, или допущены вычислительные ошибки, повлиявшие на ход решения задачи
0,7 балла	Задача решена, но допущены незначительные вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения задачи

1балл	Задача решена верно

Баллы суммируется по всей контрольной работе и переводятся в оценку по следующей шкале:

Баллы	Оценка
Менее 5 баллов	«Неудовлетворительно»
5 – 7 баллов	«Удовлетворительно»
7-8 баллов	«Хорошо»
Более 8 баллов	«Отлично»

Типовой вариант контрольной работы по теме: «Криволинейные интегралы первого и второго рода».

1) *Вычислить* $\int ydl$ по дуге АВ: $y^2=2x$ $x\in[0;2]$, $y>0$ **Ответ:** $\frac{5\sqrt{5}}{3}$

2) Вычислить $\int \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+5}}$ по отрезку, соединяющему точки (0,0) и (1,2) **Ответ:** $\ln(1+\sqrt{2})$

3) Вычислить $\int \sqrt{x}\,dx+\sqrt{y}\,dy$ по участку параболы $y=\sqrt{x}$ $x\in[0;1]$ **Ответ:** 2.

4) Проверить условие независимости и вычислить интеграл по звеньям ломаной $\int_{(0;1)}^{(2;2)}(3x^2-2y)\,dx-2x\,dy$. **Ответ:**0.

5) Восстановить функцию методом криволинейного интегрирования, проверить условие независимости. $du(x,y)=(xy\cdot\cos xy+\sin xy)\,dx+(x^2\cdot\cos xy)\,dy$. **Ответ:** $U(x,y)=x\cdot\sin xy+c$

6) Вычислить криволинейный интеграл непосредственно и с помощью формулы Грина: $\oint_{C^{+}} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, P(x,y)= $-x^2y$, Q(x,y)= xy^2, C: окружность $x^2+y^2=R^2$. **Ответ:** $\frac{\pi R^4}{2}$

Критерии оценивания

Каждое задание оценивается отдельно.

Шкала оценивания решения задачи:

Баллы	Критерии
0 баллов	Полное отсутствие решения
0,3 балла	Задача решена менее чем на половину, или допущены содержательные ошибки в алгоритме решения
0,5 балла	Задача решена не полностью, но более чем на половину, или допущены

	вычислительные ошибки, повлиявшие на ход решения задачи
0,7 балла	Задача решена, но допущены

	незначительные вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения задачи
1балл	Задача решена верно

Баллы суммируется по всей контрольной работе и переводятся в оценку по следующей шкале:

Баллы	**Оценка**
Менее 3 баллов	«Неудовлетворительно»
3---4, 7 баллов	«Удовлетворительно»
4,7---5,5 баллов	«Хорошо»
5,5---6 баллов	«Отлично»

Опрос по теории

1. а) Сформулируйте определение поточечной сходимости функциональной последовательности $fn(x)$ на множестве X.

б) Сформулируйте определение равномерной сходимости функциональной последовательности $fn(x)$ на множестве X.

2. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенного ряда.
3. Сформулируйте теорему о минимальном свойстве коэффициентов Фурье.
4. Запишите любой (на Ваш выбор) признак равномерной сходимости функционального ряда.

Показатели и критерии оценивания опросов по теории (в том числе и коллоквиум)

Показатели	Критерии	4-балльная шкала (уровень освоения)
Наличие требуемых определений, формул, теорем и т.д.; глубина и прочность усвоения программного материала; полнота, последовательность, грамотность и логичность ответов при видоизменении задания;	● Студент свободно справляется с поставленными задачами, знает материал; ● Показывает глубокое и прочное усвоение программного материала; ● Демонстрирует полные, последовательные, грамотные и логически излагаемые ответы при видоизменении задания;	Отлично (повышенный уровень)
	Студент на вопросы дает в целом верные ответы; Грамотно излагает материал без существенных неточностей в ответе на вопрос; Демонстрирует последовательные, логически излагаемые ответы с небольшими неточностями при видоизменении задания;	Хорошо (базовый уровень)

	Студентом задание понято правильно, в целом ориентируется в тематике учебного курса, но испытывает проблемы с раскрытием конкретных вопросов; основные элементы материала усвоены, однако при ответе допускаются неточности и возможны недостаточно правильные формулировки;	Удовлетворительно (пороговый уровень)
	Студент на вопросы дает неправильные ответы, демонстрирует незнание даже основных элементов материала.	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)

Вопросы для подготовки к экзамену за первый семестр
Аксиомы множества действительных чисел. Точная верхняя грань.
Теорема о точной нижней грани.
Принцип Архимеда
Числовая последовательность, предел.
Теоремы об ограниченности сходящейся последовательности и о единственности предела
Теоремы о предельном переходе в неравенствах.
Теорема Вейерштрасса о монотонных последовательностях.
Число «е».
Бесконечно малые последовательности, свойства
Арифметические операции со сходящимися последовательностями.
Критерий Коши сходимости последовательности.
Подпоследовательность. Частичный предел. Теорема Больцано-Вейерштрасса
Теоремы о верхнем и нижнем пределах.
Бесконечно большие последовательности.
Предельная точка множества, два определения, эквивалентность.
Определения по Коши и по Гейне предела функции в точке, теорема об эквивалентности.
Арифметические операции и предел функции.
Критерий Коши существования предела функции.
Расширение понятия предела функции, односторонние пределы.
Первый замечательный предел.
Второй замечательный предел. Следствия.
Пределы монотонных функций.
Непрерывность функции в точке. Арифметические операции и непрерывность. Непрерывность сложной функции.
Первая теорема Вейерштрасса Вторая теорема Вейерштрасса Теорема Больцано-Коши.
Равномерная непрерывность. Теорема Кантора
Непрерывность и точки разрыва монотонных функций.
Обратная функция. Теорема о существовании и непрерывности.
Элементарные функции. Теорема о непрерывности.
Сравнение бесконечно малых.
Р

Дифференцируемость функции в точке. Производная. Дифференциал.
Графический смысл дифференцируемости. Касательная к графику, уравнение.
Связь «дифференцируемость - непрерывность».
Правила дифференцирования. Таблица производных.
Старшие производные и дифференциалы. Формула Лейбница
Точки возрастания, убывания, экстремума Теорема Ферма
Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши.
Правило Лопиталя.
Формула Тейлора-Пеано.
Формула Тейлора-Лагранжа
Основные разложения.
Условия монотонности.
Условия экстремума
Выпуклые функции, условия выпуклости. Точки перегиба.
Асимптоты.
Построение графиков функций.
Параметрически заданные кривые и функции. Построение кривых.
Приближенное решение уравнений.
Вопросы для подготовки к экзамену за второй семестр
Первообразная, неопределенный интеграл. Простейшие свойства.
Интегрирование подстановкой и по частям.
Интегрирование рациональных функций.
Интегрирование иррациональных функций.
Интегрируемость функции по Риману: основные свойства.
Ограниченность интегрируемой по Риману функции.
Суммы Дарбу, свойства.
Критерий интегрируемости по Риману.
Свойства интегрируемых функций и определенного интеграла.
Оценки определенного интеграла, теоремы о среднем.
Классы интегрируемых функций.
Интеграл с переменным верхним пределом, свойства.
Формула Ньютона – Лейбница.
Замена переменной и интегрирование по частям для определенного интеграла.
Приложения определенного интеграла. Длина кривой.
Формулы приближенного вычисления определенного интеграла.
Понятие несобственного интеграла, основные варианты. Сходимость. Критерий Коши.
Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла.
Интегралы от неотрицательных функций. Теоремы сравнения.
Признак Абеля – Дирихле сходимости несобственного интеграла.
Понятие числового ряда, сходимость, сумма ряда.
Простейшие свойства числовых рядов. Критерий Коши.
Абсолютная и условная сходимость ряда.
Положительные ряды. Теоремы сравнения.
Интегральный признак Коши – Маклорена. Признаки Даламбера, Коши, Раабе.
Признак Абеля – Дирихле.
Сочетательное свойство числового ряда.
Перестановка числового ряда. Теоремы Коши и Римана.
Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус и интервал сходимости.
Ряд Тейлора. Основные разложения.
Формула Валлиса. Формула Стирлинга.

Бесконечные произведения.

Пространство R^m , линейность, скалярное произведение, неравенство Шварца, норма.
Последовательности в R^m, сходимость, критерий Коши, теорема Больцано – Вейерштрасса.
Множества в R^m, основные примеры.
Классификация точек. Открытые и замкнутые множества. Компактные множества.
Функция нескольких переменных, основные понятия.
Предел в точке, свойства. Непрерывность.
Теоремы Вейерштрасса и Кантора о непрерывных на компактах функциях.
Дифференцируемость в точке. Частные производные. Достаточные условия дифференцируемости. Непрерывная дифференцируемость. Дифференциал.
Геометрический смысл дифференцируемости, касательная плоскость.
Дифференцируемость сложной функции. Инвариантность формы дифференциала. Производная по направлению, градиент, свойства.
Старшие производные, теорема о смешанных производных.
Старшие дифференциалы, определение, вычисление.
Формула Тейлора.
Точки экстремума, теорема Ферма. Условия второго порядка.
Теорема об обратной функции.
Теорема о неявной функции.

Вопросы для подготовки к экзамену за 3 семестр

Функциональные последовательности. Сходимость в точке, на множестве, равномерно, в среднем квадратичном.
Критерий Коши равномерной сходимости.
Равномерная сходимость и непрерывность.
Равномерная сходимость и интегрирование.
Равномерная сходимость и дифференцирование.
Функциональные ряды Варианты сходимости.
Признаки равномерной сходимости функциональных рядов.
Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
Степенные ряды. Теорема Абеля.
Радиус сходимости. Формула Коши-Адамара.
Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.
Ряд Тейлора.
Основные разложения в степенные ряды
Тригонометрическая система. Свойства. Ряд Фурье.
Евклидово пространство. Основной пример. Ортонормированные системы Минимальное свойство коэффициентов Фурье.
Неравенство Бесселя. Следствие.
Преобразование частичных сумм ряда Фурье. Ядра Дирихле, свойства
Теорема локализации.
Теорема о сходимости ряда Фурье для кусочно - дифференцируемой функции.
Ядра Фейера, свойства. Теорема Фейера.
Теорема Вейерштрасса.
Полнота тригонометрической системы. Равенство Парсеваля.
Интегралы с параметром. Теоремы о непрерывности.
Дифференцирование интеграла по параметру.
Теорема о повторном интегрировании.
Несобственные интегралы с параметром. Основные понятия.
Признаки равномерной сходимости интеграла.
Связь интегралов с функциональными последовательностями.
Теоремы о непрерывности, дифференцировании и повторном интегрировании. Г-функция и В-функция, свойства
Мера Жордана - схема определения.
Критерий измеримости.

Аддитивность меры Жордана.
Теорема о мере графика непрерывной функции.
Примеры измеримых и неизмеримых множеств. Кратные интегралы; определение, свойства.
Сведение кратного интегрирования к повторному.
Замена переменных в кратных интегралах. Примеры.
Кривые на плоскости н в пространстве. Основные понятия и факты,
Криволинейные интегралы 1-го типа. Свойства
Криволинейные интегралы 2-го типа Свойства
Формула Грина
Независимость криволинейного интеграла от пути.
Поверхности, способы задания. Нормаль, касательная плоскость. Площадь поверхности.
Поверхностные интегралы 1 -го типа Свойства. Поверхностные интегралы 2-го типа Свойства. Элементы теории поля.

Тесты для самопроверки при подготовке к экзамену.

Проверка сформированности компетенции ОПК-1

Вопросы по 1 семестру

Вопрос 1. Найти предел последовательности $x_n = \frac{5n - 6n^2}{\sqrt{2n^4+1}}$

Вопрос 2. Вычислить предел $\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$

Вопрос 3. Указать эквивалентную бесконечно малую величину для 1- cos2x при $x \to 0$

Вопрос 4. Вычислить предел $\left(1 + \frac{2}{x}\right)^{3x-1}$

Вопрос 5. Производная функции $y = e2x - \ln 2$ в точке $x_0 = \ln 3$ равна

1)	2)	3)	4)	5)
18	17,5	9	8,5	6

Вопрос 6. Касательная к графику функции $y = x^2$ параллельна прямой $y = 2x - 5$при значении x=

1)	2)	3)	4)	5)
-1	2	-2	5	1

Вопрос 7. Уравнение касательной к графику функции $y = 3x^2 - 27x + 30$ в точке, где касательная параллельна прямой $y = -3x - 1$ имеет вид

1)	2)	3)	4)	5)
$y=6x$	$y=-3$	$y=-3x$	$y=-3x$	$y=3$

Вопрос 8. Найти число точек экстремума функции $y=(x-1)^2(x-3)^2$

Вопрос 9. Найти абсциссу точки перегиба функции $y=4\arcsin 4\sqrt{x}$

Вопрос 10. Пусть производная имеет вид $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2)(x^2-4)$. Найдите число точек экстремума.

Вопрос 11. Упорядочите функции $\ln 100\, x$, ex, $e\ln^{2}\overline{x}$, $10\sqrt{0}\, x$, $e^{\sqrt{x}}$, $\ln(lnx)$, $x100$ по скорости роста при $x \to +\infty$

Ответы

1	$\frac{-3}{\sqrt{2}}$
2	2,5
3	x^2
4	e^6
5	1)
6	1)
7	3)
8	3
9	Нет перегиба
10	4
11	$\ln(lnx) < \ln 100\, x \in {}^{10}\sqrt{0}\, x \in x100 \in e\ln x \in e\sqrt{x} \in ex$

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл. Набранное количество баллов не менее 10 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 8-9 баллов – на продвинутом уровне, 6-7 баллов – на пороговом уровне, менее 5 баллов – ниже порогового уровня.

Вопросы по 2 семестру

1. Какая из данных функций является первообразной для функции $y=2x^3–3x^2$?
а) $3x^2–6x$; б) $0,5x^4–x^3+5$; в) $x^4–x^3$; г) таких нет

2. Какая из данных функций является первообразной для функции
$y=\sin 2x$? а) $\frac{-1}{2}\cos 2x$; б) $–\cos^2 x$; в) $\sin^2 x$; г) $–\sin^2 x$

3. Для функции $y=–1–2x^2$ найдите первообразную, график которой проходит через точку M(–3; 12)
а) $y= –x– \frac{2}{3}x^3 –2$; б) $y= –x– \frac{2}{3}x^3 –9$; в) $y= –x– \frac{2}{3}x^3 +7$; г) свой ответ

4. Известно, что F_1, F_2, F_3– первообразные для $f(x)=4x^3–3x^2$ на R, графики которых проходят через точки M(–1; 2), N(1; 4), K(2; 5) соответственно. Перечислите, в каком порядке (сверху вниз) графики этих функций пересекают ось ординат?

а) F_1, F_2 ,F_3; б) F_1, F_3, F_2; в) F_2, F_1, F_3; г) свой ответ

5. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)=12t+4$. Найдите закон движения точки, если в момент времени t=1с пройденный путь составил 12 м.

а) $s(t)=6t^2+4t+2$; б) $s(t)=3t^2+4t$; в) $s(t)=6t^2+2t–2$; г) свой ответ

6. Какое расстояние пройдет материальная точка (см. задание 5) за первые 3 секунды своего движения?

а) 68 м; б) 60 м; в) 39 м; г) свой ответ

7. Найдите наименьшее значение первообразной функции y=2x+4, проходящей через точку (2; 8)

а) –8; б) –4; в) –6; г) свой ответ

8. Найдите первообразную функцию для функции $f(x) = -tg^2x$

а)-x + ctgx + C ; б) 1/3tg3x + C в) -x - tgx + C г) x - tgx + C

9. Исследовать сходимость рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+10}{n^3}$; $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\frac{1}{n^3}$

а) оба сходятся ; б) оба расходятся; в) первый сходится, второй расходится; г) первый расходится, второй сходится.

10. Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$

а) $(-\infty;\infty)$; б) $(-1;1)$; в) $[-1;1]$; г) $[2;4]$

11. $z=x\sin(xy)$. Укажите верное равенство

а) $\frac{\partial z}{\partial x}=x\cos(xy)$; б) $\frac{\partial z}{\partial y}=y\cos(xy)$; в) $\frac{\partial z}{\partial x}=\sin(xy)+xy\cos(xy)$;

г) $\frac{\partial z}{\partial x}=(xy+1)\cos(xy)$

12. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\,tgx}{\cos^2 x}dx$

а) 2; б) 1/2; в) не существует; г) свой ответ

13. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками $y=x^2–2x+2$; $y=x$

а) 1/3; б) 1/6; в) 1/9; г) 2/3

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
б)	а)	б)	в)	а)	г)	а)	г)	г)	г)	в)	г)	б)

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл. Набранное количество баллов не менее 12 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 10-11 баллов – на продвинутом уровне, 8-9 баллов – на пороговом уровне, менее 7 баллов – ниже порогового уровня

Вопросы по 3 семестру

1	В двойном интеграле $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$ перейти к повторному интегралу $\int\limits_{□}^{□} dx \int\limits_{□}^{□} f(x,y)\,dy$, если граница задана уравнениями y=2x, x+y=3, y=0.	1) $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^2 f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-x} f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_{2x}^{3-x} dx\int\limits_0^2 f(x,y)\,dy$; 4) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{\frac{y}{2}} f(x,y)\,dy + \int\limits_1^3 dx \int\limits_0^{3-y} f(x,y)\,dy$
2	В интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dx$ поменять пределы интегрирования	1) $\int\limits_0^{\sqrt{2}} dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$; 2) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^y f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)\,dy$; 3) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^x f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$; 4) $\int\limits_x^1 dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy + \int\limits_1^{\sqrt{2-x^2}} dx\int\limits_0^1 f(x,y)\,dy$
3	Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$, если область интегрирования задана как $D=\{(x,y): 0\le x\le 1, 0\le y\le 2\}$.	1) $\pi-2$; 2) $-\frac{\pi}{16}$; 3) $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$; 4) 2; 5) $\ln\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}}$; 6) $\frac{\pi}{12}$; 7) $(e-1)^2$; 8) ; 9) $8\ln 2-\frac{14}{3}$; 10) 1;
4	Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z=x^2+y^2,\ x=0,\ y=0,\ z=0,\ x$	1) 22π; 2) 16; 3) 27; 4) 45; 5) $\frac{1}{6}$; 6) 403; 7) $\frac{16}{3}$; 8) $\frac{25}{3}$; ; 9) $\frac{48}{5}$; 10) $\frac{81}{5}$; $\sqrt{6}$;
5	Площадь плоской фигуры вычисляется по формуле :	1 $S=\iint f(x,y)\,dxdy$ 2) $S=\iint f(x)\,dx$ 3) $S=\iint \rho(x,y)\,dxdy$ 4) S= $\iint\limits_{D} dxdy$ 5) S= ∬ f(x, y, z)dxdydz
6	На каком отрезке функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6n-7}$ сходится равномерно?	1) [-2, -1] 2) [0, 1] 3) [1, 3/2] 4) [-1, 1]
7	Если f(x) = x4 -1, то коэффициент a_5 разложения данной функции в ряд Тейлора $\sum\limits_{□} a_n (x-1)^n$ равен	1) 0,25 2) 3 3) 0 4) 1

Ответы:

1	2	3	4	5	6	7
2)	3)	10)	5)	4)	2)	3)

Каждый правильный ответ оценивается в 1 балл. Набранное количество баллов 7 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 6 баллов – на продвинутом уровне, 4-5 баллов – на пороговом уровне, менее 4 баллов – ниже порогового уровня.

Типовые варианты экзаменационной работы за 1 семестр

Тема 1. Числовые множества и последовательности

1. Сформулируйте со всеми необходимыми определениями аксиому о существовании точной верхней грани для числового множества.
2. Сформулируйте теорему о вложенных отрезках.
3. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.
4. Доказать, что если у последовательности $\{x_n\}$ нет конечных частичных пределов, то $|x_n| \to \infty$.

Тема 2. Предел и непрерывность функции.

5. Сформулируйте отрицание к определению предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ по Коши.
6. Сформулируйте и докажите первую теорему Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.
7. Докажите, что функция Дирихле$D(x) = \{$ разрывна в каждой точке.
8. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и не принимает на нем нулевого значения. Докажите, что существует m 0 такое, что для всех x из отрезка $[a, b]$ $|f(x)| \geq m$.

Тема 3. Производные и дифференциалы функции.

9. Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.
10. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке.
11. Сформулируйте определение выпуклой на промежутке функции. Сформулируйте теорему о достаточном условии выпуклости дифференцируемой функции.
12. Сформулируйте понятие точки устранимого разрыва функции $f(x)$; доопределите функцию $f(x) = \frac{\ln(2x-3) - \ln 5}{x-4}$ по непрерывности в точке устранимого разрыва и вычислите, используя определение, первую производную в этой точке.
13. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, дифференцируема на $(0,1)$, $f(0) = 4$, $f(1) = 2$, $f'(x)$ 2. Приведите обоснованное доказательство, что $f(x)$ – линейная функция.

	Тема 1. Числовые множества и последовательности		балл
1	Приведены формулировки определения ограниченного сверху множества; аксиомы о существовании точной верхней грани для числового множества.	0.5 0.5	1балл
2	Приведены формулировки		

	системы вложенных промежутков; теоремы Вейерштрасса; теоремы о вложенных отрезках.	0.5 0.5 0.5	1.5 балла
3	Приведены формулировки определения фундаментальной последовательности; сходящейся последовательности; проведено доказательство факта, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.	0.5 0.5 До 1 балла	2 балла
4	Приведены формулировки определения подпоследовательности и частичного предела; сходящейся последовательности; проведено доказательство методом от противного, что если у последовательности $\{x_n\}$ нет конечных частичных пределов, то $\|x_n\| \to \infty$.	0.5 До 1,5 балла	2 балла
	Тема 2. Предел и непрерывность функции.		
5	Приведены формулировки определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ по Коши; построено отрицание к определению предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ по Коши.	0.5 0.5	1 балл
6	Приведена формулировка определения непрерывной функции и первой теоремы Больцано-Коши для функции, непрерывной на отрезке; приведено доказательство первой теоремы Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.	0.5 До 1,5 балла	2 балла
7	Приведена формулировка определения непрерывной в точке функции; проведено доказательство разрыности функции Дирихле в каждой точке	0.5 До 1 балла	1.5 балла
8	Проведено доказательство факта сохранения знака функции на промежутке; Доказано, что существует m 0 такое, что для всех x из отрезка $[a, b]$ $\|f(x)\| \geq m$.	1 1	2 балла
	Тема 3. Производные и дифференциалы функции.		
9	Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.	0.5	0.5

			балла
10	Приведена формулировка теоремы о достаточном условии локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке; приведено доказательство теоремы.	0.5 До 1 балла	1.5 балла
11	Приведена формулировка определения выпуклой на промежутке функции; Сформулирована теорема о достаточном условии выпуклости дифференцируемой функции.	0.5 0.5	1 балл
12	Приведена формулировка определения точки устранимого разрыва функции $f(x)$; вычислен $f(x)$ обосновано доопределена функция по непрерывности в точке устранимого разрыва; вычислена по определению первая производная в точке x=4.	0.5 1 0.5 До 1 балла	3 балла
13	Проведена проверка факта, что линейная функция удовлетворяет требованиям; Доказано, что любая другая функция с такими свойствами совпадает с линейной.	0.5 До 1 балла	1.5 балла

Максимальное количество баллов - 20.5

Для выставления оценки за экзамен используется следующая формула:

Число экзаменационных баллов х 2 + баллы за семестр = 41+ =

Типовой вариант экзаменационной работы за 2 семестр

Тема Неопределенный интеграл, интеграл Римана.

1. Сформулировать определение первообразной.
2. Пусть F (x) – одна из первообразных функции $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$, причем F $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ =1. Найдите F $\left(\frac{3\pi}{4}\right)$.
3. Сформулируйте теорему о необходимом и достаточном условии интегрируемости функции $f(x)$ на сегменте $[a,b]$.
4. Пусть функция f интегрируема на отрезке [a, b]. Докажите, что функция $|f|$

P

интегрируема на отрезке [a, b]. Верно ли обратное утверждение?

Тема Определенный интеграл Римана. Несобственные интегралы

5. Сформулировать и доказать формулу Ньютона-Лейбница.

6. Найти $\frac{\lim\limits_{x \to 0} \int^{1} arcsint\, dt}{x^2}$.

7. Сформулировать определение несобственного интеграла от неограниченной функции.
8. Сформулировать и доказать первый признак сравнения для несобственных интегралов от неограниченных на промежутке функций, т.е. для интегралов 2 рода.

Тема Числовые ряды.

9. Сформулировать и доказать признак Дирихле сходимости числового ряда.
10. Если ряд $\sum a_n$ сходится и $\frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{a_n}=1$, то можно ли утверждать, что ряд $\sum b_n$ сходится?
11. Можно ли переставить слагаемые числового ряда $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$, чтобы сумма полученного ряда равнялась 10?

Тема Функции многих переменных

12. Пусть функция f непрерывна. Доказать, что множество D точек пространства R^n, для которых $\{ f(x_1, x_2, \ldots x_n) > 0\}$ открыто. (Можно считать, что D множество на плоскости: D= $\{ f(x, y) > 0 \}$)
13. Доказать, что если числовые последовательности x_n и y_n являются фундаментальными, то последовательность точек (x_n, y_n) является фундаментальной.
14. Записать определение дифференцируемости функции двух переменных. Привести геометрическую иллюстрацию понятия дифференцируемости для случая функции двух переменных.

	Тема 1. Числовые множества и последовательности		балл
1	Приведены формулировки определения ограниченного сверху множества; аксиомы о существовании точной верхней грани для числового множества.	 0.5 0.5	1балл
2	Приведены формулировки системы вложенных промежутков; теоремы Вейерштрасса; теоремы о вложенных отрезках.	 0.5 0.5 0.5	1.5 балла

3	Приведены формулировки определения фундаментальной последовательности; сходящейся последовательности; проведено доказательство факта, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.	0.5 0.5 До 1 балла	2 балла
4	Приведены формулировки определения подпоследовательности и частичного предела; сходящейся последовательности; проведено доказательство методом от противного, что если у последовательности $\{x_n\}$ нет конечных частичных пределов, то $\|x_n\| \to \infty$.	0.5 До 1,5 балла	2 балла
	Тема 2. Предел и непрерывность функции.		
5	Приведены формулировки определения предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ по Коши; построено отрицание к определению предела функции $f(x)$ при $x \to -\infty$ по Коши.	0.5 0.5	1 балл
6	Приведена формулировка определения непрерывной функции и первой теоремы Больцано-Коши для функции, непрерывной на отрезке; приведено доказательство первой теоремы Больцано-Коши для функций, непрерывных на отрезке.	0.5 До 1,5 балла	2 балла
7	Приведена формулировка определения непрерывной в точке функции; проведено доказательство разрыности функции Дирихле в каждой точке	0.5 До 1 балла	1.5 балла
8	Проведено доказательство факта сохранения знака функции на промежутке; Доказано, что существует m 0 такое, что для всех x из отрезка $[a, b]$ $\|f(x)\| \geq m$.	1 1	2 балла
	Тема 3. Производные и дифференциалы функции.		
9	Сформулируйте теорему о производной частного двух функций.	0.5	0.5 балла
10	Приведена формулировка теоремы о достаточном условии локального экстремума дважды дифференцируемой функции в данной точке;	0.5	1.5 балла

	приведено доказательство теоремы.	До 1 балла	
11	Приведена формулировка определения выпуклой на промежутке функции; Сформулирована теорема о достаточном условии выпуклости дифференцируемой функции.	0.5 0.5	1 балл
12	Приведена формулировка определения точки устранимого разрыва функции $f(x)$; вычислен $f(x)$ обосновано доопределена функция по непрерывности в точке устранимого разрыва; вычислена по определению первая производная в точке x=4.	0.5 1 0.5 До 1 балла	3 балла
13	Проведена проверка факта, что линейная функция удовлетворяет требованиям; Доказано, что любая другая функция с такими свойствами совпадает с линейной.	0.5 До 1 балла	1.5 балла

Типовой вариант экзаменационной работы за 3 семестр

Блок 1

1. Если числовая последовательность α_n сходится, а функциональная последовательность $f_n(x)$ сходится равномерно на множестве X к ограниченной функции f(x), то произведение этих последовательностей сходится равномерно на X .
2. Сформулировать и доказать теорему о равномерной сходимости и непрерывности для функционального ряда.
3. Найти область E существования суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^{\frac{7}{3}}}$ и исследовать ее на дифференцируемость.
4. Вычислить $\int_{-\pi}^{-1} \left(\sum_{n}^{\infty} nenx \right) dx$, сформулировав необходимые теоремы.

Блок 2

5. Сформулировать и доказать теорему о дифференцируемости интеграла, зависящего от параметра.
6. Разложить $f(x) = (x^2 + 1) \cos^2(\pi x)$ в степенной ряд в окрестности $x_0 = -1$. Найти интервал сходимости полученного ряда.
7. Сформулировать и доказать теорему Фейера. Сформулировать следствия из нее.

8. Написать в общем виде ряд Фурье функции по тригонометрической системе с формулами для коэффициентов. Найти коэффициент a_2 ряда Фурье функции $f(x)=2-x,\ x\in¿$

Блок 3

9. Привести пример функции двух переменных, которая непрерывна и ограничена на заданном ограниченном множестве, но не достигает на этом множестве своей точной верхней/нижней грани. Приведите необходимые формулировки и обоснования.
10. Сформулировать теорему о замене переменных для двойного интеграла. Перейти к полярным координатам в двойном интеграле $\iint_D f(x,y)\,dxdy$, где область D определяется неравенствами:
0y2x, x 2, $x^2+y^2\geq 1$.
11. Записать формулу Грина и условия ее применимости.
12. Пусть функции P(x, y) и Q(x, y) непрерывны в области G. Если для любых двух фиксированных точек A и B ∈ G криволинейный интеграл $\int Pdx+Qdy$ не зависит от пути интегрирования, то существует функция u(x, y), такая, что du(x, y) = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.

13. Пусть l(t) – длина кривой на плоскости, заданной уравнением $y=\frac{x^2}{2}$, $0\leq x\leq t$. Найти $\frac{l(t)}{t^2}$

Критерии оценивания

Показатели	Критерии	4-балльная шкала (уровень освоения)
ОПК-1 **Знать:** понятие функционального ряда; равномерной сходимости; понятие степенного ряда, ряда Фурье; условия представления функции степенным рядом и рядом Фурье; понятия кратных и криволинейных интегралов; их физический и геометрический смысл. **Уметь:** – находить область сходимости ф.р.; находить сумму ряда, используя дифференцирование и интегрирование рядов; уметь раскладывать функцию в ряд Тейлора; 2l-периодическую, четную, нечетную, на конечном промежутке - в ряд Фурье; вычислять двойные, тройные интегралы. **Владеть:** – математическим аппаратом	Полностью раскрыто содержание вопросов, решены задачи, Определение понятий и терминов четкое, доказательства обоснованы; Корректно использованы термины и понятия; Студент аргументировано дает ответы, решает задачи, свободно, логично и последовательно излагает материал.	Отлично (повышенный уровень)
	Усвоено и раскрыто основное содержание учебного материала; Определение понятий достаточно четкое, однако в доказательствах есть небольшие пропуски и незначительные ошибки; Допущены небольшие ошибки и неточности в использовании терминов и понятий; Студент достаточно аргументировано дает ответы, решает задачи, достаточно свободно, логично и последовательно отвечает на вопросы, однако ответы содержат	Хорошо (базовый уровень)

	небольшие неточности.	
	Усвоено основное содержание учебного материала, однако изложение фрагментарное; Определение понятий недостаточно четкое, в доказательствах есть пропуски и ошибки; Допущены ошибки и неточности в использовании терминов и понятий; Студент демонстрирует недостаточное умение давать аргументированные ответы и приводить примеры, недостаточно свободно, логично и последовательно отвечает на вопросы.	Удовлетворительно (пороговый уровень)
математического анализа; – навыками использования аппарата математического анализа при решении конкретных задач.	Ответ неверный, не раскрыто основное содержание программного материала; Допущены грубые ошибки в формулировках и в доказательствах ; Допущены грубые ошибки в использовании терминов и понятий; Студент демонстрирует непонимание поставленного задания, задание не выполнено полностью или выполнено с грубыми ошибками.	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

Продвинутый уровень - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

Высокий уровень - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

о Код компе-тенции	Форма контроля	Этапы форми-рования (№ темы (раздела)	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Общепрофессиональные компетенции						
ОПК-1	Контрольные работы, Задания для домашней работы по темам № 1-16 Зачет Экзамен .	1 – 16	**Знать:** постановки задач математического анализа; функции одной и нескольких переменных (пределы, непрерывность, производные и дифференциалы, исследование функций с помощью производных, интегральное исчисление); функциональные последовательности и ряды; ряды Фурье; **Уметь:** вычислять пределы элементарных функций одной и нескольких переменных; находить производные элементарных функций одной и нескольких переменных; находить экстремумы функций;	1.Воспроизведение основных определений и формулировок теорем курса. Умение корректно использовать математическую символику. 2. Умение решать задачи, требующие применения в элементарных задачах стандартных приемов. 3. вычисление пределов элементарных функций одной переменной непосредственно, замечательных пределов и их следствий, правила Лопиталя; 4. Умение применять известные алгоритмы и технические	1. Воспроизведение основных теорем курса. Умение провести основную часть доказательства утверждений и корректно использовать математическую символику . 2. Понимание сути методов решения задач, которые не являются типичными, но или знакомы студентам или отличаются от известных лишь в небольшой степени, умение определить тип задачи, возможные методы ее решения. 3.Умение вычислять пределы последовательностей, находить пределы функций непосредственно, с помощью основных эквивалентностей, правила Лопиталя и формулы	1. Воспроизведение основных теорем курса. Выполнение в полном объеме всех выкладок, обоснование рассуждений в процессе их вывода. Умение выделять главные смысловые аспекты в доказательствах. 2 Понимание сути теоретических положений и выводов, сути методов решения задач, умение самостоятельно провести рассуждения при решении задач, для решения которых требуются размышления и самостоятельная разработка алгоритма действий. 3. Умение применить теоретические знания для вычисления пределов, исследования функции на непрерывность, умение классифицировать точки разрыва. 4. Умение вычислить производные функции, заданной

			вычислять элементарные интегралы; применять интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач; исследовать ряды на сходимость; разложить функцию в ряд Фурье; **Владеть:** навыками решения практических задач математического анализа.	навыки: знание таблицы производных и правил дифференцирования, умение находить производные элементарных функций одной переменной и частные производные фмп. 5. Умение находить экстремумы функций и строить графики элементарных функций. 6. Знание таблицы интегралов и основных методов интегрирования, умение вычислить интегралы в элементарных случаях. 7. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических задач. 8Умение разложить функцию в степенной ряд, пользуясь стандартными разложениями 9. Умение вычислить коэффициенты ряда Фурье в элементарных случаях. 10. Нахождение двойных интегралов, расстановка пределов для элементарных областей, переход к полярной системе	Тейлора; находить точки разрыва функции и определять их тип; 4. Владение техникой дифференцирования функций одной переменной, умение вычислить частные производные и дифференциалы высших порядков функций многих переменных. 5. Умение исследовать функции с помощью производных и построить их графики. 6. Знание основных методов интегрирования, умение вычислить интегралы, требующие применения комбинации нескольких приемов. 7. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач 8. Владение техникой исследования функциональных рядов на сходимость. 9. Умение разложить функцию в степенной ряд и ряд Фурье, знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные и тригонометрические ряды для приближенных	явно и параметрически, умение вычислять производные и дифференциалы высших порядков. 5. Умение применять методы дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков. Умение применить теоретические знания для решения практических задач, связанных с приближенными вычислениями и решением оптимизационных задач 6.Знание основных методов интегрирования, умение вычислить интегралы, требующие применения комбинации нескольких приемов. 7. Умение применить интегральное исчисление к решению геометрических и физических задач Владение техникой исследования функциональных рядов на сходимость. 8. Умение разложить функцию в степенной ряд и ряд Фурье, знание условий существования разложений. Применение разложения функций в степенные и тригонометрические ряды для приближенных вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения. 9. Знание свойств интегралов, зависящих от параметра. Умение исследовать несобственные интегралы, зависящие от параметра на сходимость. Умение оценить возможность их применения для решения

				координат. 11.Вычисление криволинейных интегралов 1 и 2 типов в элементарных случаях. 12. Решение задач с использованием физического и геометрического смысла кратных и криволинейных интегралов.	вычислений и для решения задач, имеющих физические приложения. 10. Знание свойств интегралов, зависящих от параметра. Умение исследовать несобственные интегралы, зависящие от параметра на сходимость. Умение применить их для решения конкретных задач. 11. Владение техникой вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов и применением кратных, криволинейных и поверхностных интегралов для решения задач с физическим и геометрическим содержанием.	конкретных задач. 10. Владение техникой вычисления кратных, криволинейных и поверхностных интегралов и применением кратных, криволинейных и поверхностных интегралов для решения задач с физическим и геометрическим содержанием.

Р

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями¸ умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Информатика и программирование»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине « Математический анализ» являются лекции . В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращая внимание на формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, на последовательность выводов, использование при доказательстве тех или иных фактов. Можно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать различного рода пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал лекции, а также вопросы с целью уяснения теоретических выводов. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам. Практические занятия проводятся для выработки навыков решения практических задач и лучшего усвоения учебного материала. В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не непонятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их. Преподаватель может выборочно проверить записи с самостоятельно решенными задачами. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. В ходе подготовки к практическому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При подготовке к лекциям, занятиям, коллоквиуму, экзамену необходимо делать записи. Записи помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику. Вообще, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом дифференциального и интегрального исчисления и теории рядов, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ и коллоквиумов. В конце каждого семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет по практической части курса и экзамен.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Математический анализ» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала, высокой степенью абстракции, большим объемом курса. На первом курсе все осложняется неумением первокурсника самостоятельно получать информацию из книг и конспектов. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

Для самостоятельной работы рекомендуется использовать учебную литературу из списка.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее

востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.

4. Электронная библиотека издательства «Лань» (https://e.lanbook.com/) Представленная электронно-библиотечная система (ЭБС) — это ресурс, включающий в себя как электронные версии книг ведущих издательств учебной и научной литературы (в том числе университетских издательств), так и электронные версии периодических изданий по различным областям знаний.

Особое внимание уделяется контенту, представленному на платформе ЭБС. Благодаря тщательному отбору пользователям доступна качественная учебная литература, которая является неотъемлемой частью образовательных процессов во многих учебных заведениях.

Цель создания ресурса — обеспечение высших и средних профессиональных учебных заведений, научно-исследовательских организаций, научных и универсальных библиотек доступом к научной, учебной литературе и научной периодике по максимальному количеству профильных направлений, поэтому ассортимент электронно-библиотечной системы постоянно расширяется.