

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра дискретного анализа

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета ИВТ

 Д.Ю. Чалый

« 23 » мая 2023 г.

Рабочая программа дисциплины
«Элементы действительного анализа»

Направление подготовки
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Искусственный интеллект»

Квалификация выпускника
Бакалавр

Форма обучения
очная

Программа рассмотрена на
заседании кафедры
от 11 апреля 2023 г.,
протокол № 4

Программа одобрена НМК
факультета ИВТ
протокол № 6 от
28 апреля 2023 г.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью освоения дисциплины «Элементы действительного анализа» является использование методов и приемов действительного анализа для решения прикладных задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы бакалавриата (магистратуры, специалитета)

Дисциплина «Элементы действительного анализа» относится к модулю «Действительный и комплексный анализ». Изучение дисциплины «Элементы действительного анализа» направлено на освоение студентами основных понятий теории кратных, криволинейных и поверхностных интегралов, методов вычисления и приложений этих типов интегралов; основных понятий векторного анализа или теории поля (скалярных и векторных полей).

Для успешного освоения данной дисциплины студент должен владеть знаниями, умениями и навыками, сформированными курсами алгебры и геометрии и математического анализа высшей школы. Дисциплина осваивается в третьем семестре.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы бакалавриата (магистратуры, специалитета)

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Универсальные компетенции		
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.	ИОПК 2.1 Осуществляет выбор и адаптацию математических методов и систем программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач.	Знать: понятие комплексного числа, модуль и аргумент, главное значение аргумента, сумма, произведение, частное комплексных чисел, степень; различные формы записи комплексного числа: показательная, алгебраическая, тригонометрическая; понятие функции комплексного переменного, действительная, мнимая части; предел функции в точке, непрерывность, производная, условия Коши-Римана, аналитическая функция, гармоническая функция, геометрический смысл модуля и аргумента производной, конформное отображение; основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства; понятие интеграла по комплексной переменной, свойства интеграла, интегральная теорема Коши, интегральная формула Коши; степенные

		<p>ряды, ряды Тейлора, ряды Лорана; особые точки, понятие вычета.</p> <p>Уметь: изображать на плоскости комплексные числа, строить сумму, разность комплексных чисел; переводить комплексное число из алгебраической формы в тригонометрическую и показательную и наоборот; находить действительную и мнимую часть функции, проверять выполнение условий Коши-Римана, восстанавливать действительную (мнимую) часть по мнимой (действительной) части, вычислять производную в точке; находить значение интеграла по контуру; уметь применять теорему Коши и формулу Коши; представить аналитическую в соответствующей области функцию рядом Тейлора и Лорана; находить особые точки и вычислять вычеты функций и применять их для вычисления контурных и несобственных интегралов.</p> <p>Владеть: навыками решения практических задач теории функций комплексного переменного.</p>
--	--	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единиц, 144 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Векторный анализ. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы.	3	14	20	0	0	0	50	
	В том числе с применением ЭО							64	
2	Теория поля.	3	10	16	0	0	0	34	
	В том числе с применением ЭО							44	
	ИТОГО		24	36	0	0	0	108	зачет

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Векторный анализ. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы..

Кратные интегралы. Определение кратного интеграла (двойного и тройного). Свойства кратных интегралов. Теорема существования. Сведение кратного интеграла к повторному. Замена переменных. Приложения кратных интегралов.

Криволинейные интегралы. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Их свойства и вычисление. Приложения. Теорема Грина.

Поверхностные интегралы. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Их свойства и вычисление. Приложения. Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса.

Раздел 2. Теория поля.

Скалярное поле. Скалярное поле: линии и поверхности уровня, производная по направлению, градиент. Векторное поле.

Векторное поле. векторные линии, поток поля через поверхность, дивергенция, ротор, циркуляция векторного поля вдоль кривой, Теоремы Гаусса-Остроградского и Стокса. Дифференциальные операции второго порядка. Специальные виды векторных полей.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Формы преподавания комплексного анализа, который завершает курс математического анализа, достаточно традиционны.

Это *лекции и практические занятия*. Практические занятия, в зависимости от цели, подразделяются на занятия, на которых изучается новый материал, занятия закрепления материала, повторения пройденного за некоторый промежуток времени, контрольные занятия.

По темам, имеющим фундаментальный характер, проводятся занятия коррекции.

Групповые консультации проводятся перед контрольными мероприятиями (контрольные работы, зачетные работы, экзамены) для большой группы студентов с целью систематизации знаний и устранению имеющихся сложностей с пониманием материала общего характера.

Индивидуальные консультации проводятся регулярно для желающих с целью устранения имеющихся у студентов проблем с материалом частного характера.

Самостоятельная работа реализуется:

1. Непосредственно в процессе аудиторных занятий.
2. В контакте с преподавателем вне рамок расписания - на консультациях по учебным вопросам, при ликвидации задолженностей, при выполнении индивидуальных заданий и т.д.
3. В библиотеке, дома, и т.д. при выполнении студентом учебных задач.

Перенос активности студентов на работу во внеаудиторное время связан с рядом трудностей, основная из которых - это неготовность к самостоятельному труду большинства студентов, особенно младших курсов. Поэтому на практических занятиях по комплексному анализу преподаватель старается приучить студента работать самостоятельно, отводя для этого около половины времени на самостоятельное решение задач.

Поэтому достижения студентов в течение семестра учитываются при подведении итогов.

На Google Диск для группы студентов мы создаем таблицу в формате Excel, в которой ведется учет по контрольным мероприятиям каждой темы (контрольная работа, опросы по теории и т.д.). Определенная сумма баллов за семестр дает право сдавать экзамен (допуск к экзамену). Сумма баллов, полученных студентом на экзамене, добавляется к семестровой сумме, и делается перевод в обычную пятибалльную шкалу оценок. Таким образом, экзаменационная отметка во многом определяется оценками, полученными студентом в течение семестра. Это заставляет студента работать в течение всего семестра. Выполнение заданий, связанных с простым воспроизведением лекционного материала + работа в семестре, позволяющая перейти пороговый рубеж усвоения, дает возможность получения удовлетворительной оценки. Решение усложненных задач на основе приобретенных знаний, умений и

навыков с их применением в нетипичных ситуациях, позволяет студенту получить хорошую или отличную оценку.

Экзамен проводится в письменной форме, способствующей выставлению более объективной отметке по сравнению с устной формой.

Для каждой академической группы составляется комплект вопросов, равномерно покрывающих весь материал курса. Примерные комплекты вопросов приведены в приложении.

Описанная система оценивания обладает очевидными достоинствами. Все студенты поставлены в одинаковые условия, причем на экзамене им предлагается большое число одних и тех же для данной группы вопросов. Это позволяет адекватно оценить уровень подготовки каждого студента, и объективность оценки знаний каждого студента не подвергается сомнению.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

1. ОС семейства Microsoft Windows
2. Libre Office
3. Microsoft Office 365(онлайн)

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

1. MozillaFirefox

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления В 3-х тт.: учебник для вузов: в 3 томах / Г. М. Фихтенгольц. — 13-е изд., стер. — Санкт-Петербург: Лань, 2022 — Том 3 — 2022. — 656 с. — ISBN 978-5-507-44238-6. — Текст: электронный //

Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/221270>

2. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа: учебное пособие / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. — 16-е изд. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 736 с. — ISBN 978-5-

8114-0499-5. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/210707>.

б) дополнительная литература

1. Кытманов А.М. Математический анализ: учебное пособие для бакалавров / Кытманов

- А.М., Лейнартас Е.К., Лукин В.Н. и др. ; под общ.ред. А.М. Кытманова. - Москва: Юрайт, 2014. - 607 с. + Предметный указатель. - (Бакалавр. Базовый курс). - Библиогр.: с.601. - ISBN 978-5-9916-2808-2. 2. Баврин, И.И. Высшая математика. Учебник для ВТУЗов [текст] / И.И. Баврин, В.Л. Матросов. – М.: ВЛАДОС, 2004 г.
3. Берман, Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие.- 22 изд., перераб. [текст] / Г.Н. Берман.– СПб: Профессия, 2003-2006 г.
4. Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа: учебник для вузов / Кудрявцев Л.Д. - Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. - 735 с.: ил. + Указатель. - ISBN 5-02013950-5.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека «Университетская библиотека online». URL: <http://biblioclub.ru/>
2. Информационная система «Единое окно доступа к образовательным ресурсам». URL: <http://window.edu.ru/>
3. Образовательный портал Череповецкого государственного университета. URL: <https://edu.chsu.ru/>
4. Образовательная платформа Открытый МФТИ, онлайн курсы: Кратные интегралы и теория поля. URL: <https://mipt.ru/education/chair/mathematics/process/praktikum-KiTP.php>

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Элементы действительного анализа»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости

Тематика индивидуальных заданий

1. Индивидуальное задание по теме «Двойной интеграл».

1. Изменить порядок интегрирования: $\int_0^1 dy \int_0^y f(x, y) dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx$

2. Индивидуальное задание по теме «Приложение кратных, криволинейных и поверхностных интегралов»

1. Найти массу пластинки $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \leq 1, y \geq 0$, если плотность $p(x, y) = yx^2$.

2. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $T = \begin{cases} z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \\ z = \sqrt{\frac{x^2 + y}{255}} \end{cases}$.

3. Найти работу силы $\vec{F} = (x^2 + 2y)\vec{i} + (y^2 + 2x)\vec{j}$ при перемещении точки вдоль линии $y = 2 - \frac{x^2}{8}$, от точки M(-4, 0) до точки N(0, 2).

4. Найти массу кривой l: $x = 2t + 3, y = 1 + t, 0 \leq t \leq 2$, если плотность $p(x, y) = -x + 3yx^2$.

5. Найти массу поверхности $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 10$

6. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $x = 4y - y^2, x + y = 6$

Тематика проверочных работ

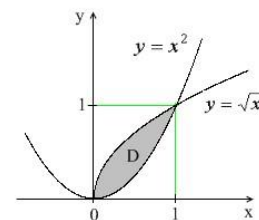
1. Проверочная работа по теме «Двойной интеграл».

1. Перейти к повторному интегралу, поменять пределы интегрирования, вычислить (один из них) $\int \int_D (x + y) dx dy$, где $D = \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y = 3 \end{cases}$

2. Область интегрирования D изображена на рисунке. Тогда двойному интегралу $\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$ соответствует повторный интеграл: а)

$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y) dy$ б) $\int_0^{x^2} dx \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ в) $\int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^{x^2} f(x, y) dy$ г)

$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$



2. Проверочная работа по теме «Скалярное поле».

1. Найти линии уровня скалярного поля $u = 2x^2 + y^2$, схематически построить.
2. Найти поверхности уровня скалярного поля $u = x + y + 3z$, схематически построить.
3. Найти производную функции в заданной точке M в направлении вектора \overline{MA} и наибольшую скорость возрастания поля в этой точке. $u = xy^2 + 4xz$, $M(3, -3, 1)$, $A(-3, 4, 2)$.
4. Найти градиент функции $u = u(x, y, z)$ в точке M : $u = x + yz - \sqrt{xy}$, $M(2, 2, 6)$

Тематика контрольных работ

1. Контрольная работа № 1 по теме «Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы»
Примерный вариант

1. Вычислить интеграл

$$\int \int_D \sqrt{x^2 + y} dx dy,$$

$$T\{x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$$

2. Вычислить интеграл

$$\int \int_T \int 15(x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$:= \{x = 0, x + y = 1, y = 0, z = x + y, z = 0\}$$

3. Вычислить объем тела,

$$\text{ограниченного поверхностями } x^2 + y^2 = 4, z = 0, z = 10$$

4. Вычислить $\int_l (xy) dS$; $l: y=x+1$, от точки $A(1,2)$ до точки $B(3,4)$.

5. Вычислить интеграл

$$\int_l (x^2 dy + y^2 dx); l=AB : y = x + 1, A(1, 2), B(3, 4)$$

6. Вычислить (двумя способами)

поверхностный интеграл

$$\iint_{\sigma} 9\pi x dy dz + dx dz - 3x dx dy, \text{ где}$$

поверхность =

$$\begin{cases} \frac{x}{3} + y + z = 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0 \end{cases}, \text{ нижняя}$$

сторона

2. Контрольная работа № 2 по теме «Векторное поле»

Примерный вариант

1. Вычислить дивергенцию градиента скалярного поля $u = \frac{x^2 + y^2}{z + 1}$

2. Вычислить ротор векторного поля $\vec{a}(P) = x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + x y z^2 \vec{k}$

3. Вычислить поток вектора $\vec{a} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ через всю поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ в

направлении внешней нормали.

4. Найти циркуляцию векторного поля $\vec{a} = y^2 \vec{i} - x^2 \vec{j} + z^2 \vec{k}$ по контуру $ABCA$,

получаемому при пересечении параболоида $x^2 + z^2 = 1$ — ус координатными плоскостями.

5. Проверить соленоидальность поля $\vec{a}(P) = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y}} \vec{i} + \frac{y}{z} \vec{j} - \frac{z \cdot \ln z}{y+1} \vec{k}$

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

№ п./п.	Вопросы к зачету:
1	Определение кратного интеграла. Определение двойного интеграла. Геометрический и физический смысл двойного интеграла.
2	Теорема существования двойного интеграла. Свойства двойных интегралов.
3	Вычисление двойных интегралов. Сведение двойного интеграла к повторному.
4	Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.
5	Приложения двойного интеграла.
6	Определение тройного интеграла. Геометрический и физический смысл тройного интеграла.
7	Вычисление тройных интегралов. Сведение тройного интеграла к повторному.
8	Замена переменных в тройном интеграле. Переход к сферическим и цилиндрическим координатам.
9	Приложения тройного интеграла.
10	Криволинейные интегралы первого рода. Их свойства и вычисление.
11	Криволинейные интегралы второго рода. Их свойства и вычисление.
12	Связь криволинейных интегралов. Приложения криволинейных интегралов.
13	Теорема Грина.
14	Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
15	Поверхностный интеграл первого рода. Свойства и вычисление.
16	Поверхностный интеграл второго рода. Свойства и вычисление.
17	Формулы Гаусса- Остроградского и Стокса.
18	Приложения поверхностных интегралов.
19	Скалярное поле. Линии и поверхности уровня.
20	Производная по направлению.
21	Градиент.
22	Векторное поле. Векторные линии.
23	Поток векторного поля.
24	Дивергенция векторного поля. Свойства дивергенции.
25	Теорема Гаусса – Остроградского.
26	Циркуляция векторного поля.
27	Ротор векторного поля и теорема Стокса.
28	Оператор Гамильтона.
29	Дифференциальные операции второго порядка.
30	Специальные виды векторных полей: соленоидальное.
31	Специальные виды векторных полей: потенциальное. Вычисление потенциала.
32	Специальные виды векторных полей: гармоническое или лапласово поле.

Шкала оценивания компетенций:

Оценка в 100-балльной шкале	Оценка в 5-ти балльной шкале	Уровень сформированности компетенций
0-54 баллов	неудовлетворительно (не зачтено)	недостаточный
55-69 баллов	удовлетворительно (зачтено)	базовый
70-85 баллов	хорошо (зачтено)	повышенный
86-100 баллов	отлично (зачтено)	

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Элементы действительного анализа»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Комплексный анализ» являются лекции. В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала, обращая внимание на формулировки, раскрывающие содержание тех или иных понятий, на последовательность выводов, использование при доказательстве тех или иных фактов. Можно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать различного рода пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал лекции, а также вопросы с целью уяснения теоретических выводов. По большому числу тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам. Практические занятия проводятся для выработки навыков решения практических задач и лучшего усвоения учебного материала. В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не понятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их. Преподаватель может выборочно проверить записи с самостоятельно решенными задачами. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического анализа. В ходе подготовки к практическому занятию необходимо прочитать конспект лекции, изучить основную литературу, ознакомиться с дополнительной литературой. При подготовке к лекциям, занятиям, коллоквиуму, экзамену необходимо делать записи. Записи помогают понять построение изучаемого материала, выделить основные положения, проследить их логику. Вообще, большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом аналитических функций, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольных работ. В конце изучения дисциплины студенты сдают допуск к экзамену по практической части курса и экзамен.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу:

1. Сидоров, Ю. В., Лекции по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие для студентов вузов / Ю. В. Сидоров, М. В. Федорюк, М. И. Шабунин, М., Наука, 1976, 407с
2. Невский, М. В., Элементы теории функций комплексного переменного [Электронный ресурс] : учеб. пособие для студентов, обучающихся по специальности Компьютерная безопасность / М. В. Невский; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2014, 105с
3. Краснов, М. Л., Функции комплексного переменного : операционное исчисление. Теория устойчивости : учеб. пособие для вузов / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко, М., Наука, 1971, 255с

4. Леонтьева, Т. А., Задачи по теории функций комплексного переменного : учеб. пособие / Т. А. Леонтьева, В. С. Панферов, В. С. Серов, М., , 1991, 255с
5. Зафиевская, Л. А., Ряды и интегралы в комплексной плоскости : метод. указания / Л. А. Зафиевская, Г. В. Шабаршина ; Яросл. гос. ун-т. Ч. 2, Ярославль, ЯрГУ, 2004, 18с
6. Кашинцева О.А., Сенатова И.А. Математика. Теория поля. Методические рекомендации по изучению курса: Учеб.- методическое пособие. – г. Череповец: ГОУ ВПО ЧГУ. – 2010 г. – 68 с.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).
2. Электронная библиотека издательства «Лань» – это ресурс, содержащий электронные версии книг ведущих издательств учебной, научной литературы и периодических изданий по различным областям знаний. ЭБС издательства «Лань» предоставляет доступ к коллекциям: Математика – издательство «Лань»; Информатика – издательство «Лань».
3. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.
4. Электронная картотека «Книгообеспеченность»(http://www.lib.uni Yar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.