

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Теория графов**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 26 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Теория графов" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний и умений в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом специальности "10.05.01-Компьютерная безопасность" (уровень специалитета), содействует фундаментализации образования, развитию логического и алгоритмического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения.

Цель дисциплины - формирование у студентов способности применять основные методы теории графов при решении задач в их будущей профессиональной деятельности (научно-исследовательской, проектной, контрольно-аналитической), а также формирование на основе этой способности необходимых общекультурных и профессиональных компетенций.

Задачи дисциплины - дать обучаемым необходимые знания по основным разделам теории графов; формирование у студентов математической культуры, знакомство с аппаратом теории графов и основными алгоритмами на графах.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к обязательной части образовательной программы и является элективной дисциплиной.

Теория графов – важнейший математический инструмент, широко используемый в химии, генетике, исследовании операций, лингвистике, проектировании и кодировании. Знания и практические навыки, полученные из курса Теория графов, используются обучаемыми при изучении естественно-научных дисциплин, а также при разработке курсовых и дипломных работ, в научно-исследовательской работе.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
<b>ОПК 2.1</b> Способен разрабатывать алгоритмы, реализующие современные математические методы защиты информации	<b>И-ОПК -2.1.1</b> Применяет знание фундаментальных разделов математики для разработки методов защиты информации <b>И-ОПК-2.1.4</b> Знает способы эффективной реализации алгоритмов	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- основные понятия теории графов;</li><li>- основные операции на графах);</li><li>- свойства и типы графов;</li><li>- метрики на графах;</li><li>- классические оптимизационные задачи на графах.</li></ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- анализировать конкретные прикладные задачи на предмет возможности применения теории графов для их решения;</li><li>- строить графические модели задач и явлений практического характера по специальности;</li><li>- применять стандартные графические модели к решению прикладных задач;</li></ul> <b>Владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- навыками научного исследования с приме-</li></ul>

		нением графических методов; - опытом работы с реферативной, справочной, периодической и монографической литературой с целью получения новых знаний по теории графов; - навыками использования библиотек прикладных программ для решения прикладных графических задач с использованием компьютера - алгоритмами решений задач на графах.
--	--	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетные единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1.	Вводная лекция. Начальные понятия	3	2	4				2	Решение задач, устный опрос
2	Связность	3	2	4		1		2	Решение задач, устный опрос
3.	Деревья	3	2	4		1		2	Решение задач, устный опрос
4.	Независимые множества, клики, доминирующие множества	3	2	4		1		2	Решение задач, устный опрос
5.	Планарность Плоские и планарные графы	3	2	4		1		2	Решение задач, устный опрос
6.	Обходы	3	2	4		1		2	Решение задач, устный опрос
7.	Раскраски	3	2	4				2	Самостоятельная работа
8.	Сети, разрезы, потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона.	3	2	4				2	Решение задач, устный опрос
							0,3	2,7	зачет
	Всего		16	32		5	0,3	18,7	

#### Содержание разделов дисциплины:

##### Тема 1. Вводная лекция. Начальные понятия

- 1.1. Основные определения
- 1.2. Операции над графами

- 1.3. Степени вершин графа
- 1.4. Матрица смежности и матрица инцидентности

## **Тема 2. Связность**

- 2.1. Маршруты и связность
- 2.2. Вершинная связность и реберная связность
- 2.3. Двусвязные графы
- 2.4. Поиск маршрута наименьшего веса. Алгоритм Дийкстра

## **Тема 3. Деревья**

- 3.1. Определение дерева
- 3.2. Остов минимального веса Алгоритмы Краскал и Прима

## **Тема 4. Независимые множества, клики, доминирующие множества**

- 4.1. Независимые множества
- 4.2. Шенноновская емкость графов
- 4.3. Задача Рамсея. Функция неплотности
- 4.4. Доминирование и покрытия
- 4.5. Паросочетания
- 4.6. Паросочетания в двудольном графе
- 4.7. Паросочетания и покрытия
- 4.8. Наибольшие паросочетания и задача о назначениях

## **Тема 5. Планарность. Плоские и планарные графы**

## **Тема 6. Обходы**

- 6.1. Эйлеровы графы
- 6.2. Гамильтоновы графы

## **Тема 7. Раскраски**

- 7.1. Правильная раскраска. Критерий двудольности графа
- 7.2. Оценки хроматического числа
- 7.3. Раскраска ребер
- 7.4. Раскраска планарных графов
- 7.5. Проблема четырех красок

## **Тема 8. Сети, разрезы, потоки в сетях. Теорема Форда-Фалкерсона.**

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

#### **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

#### **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

#### **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

##### **а) основная литература:**

1. В. Л. Дольников, О. П. Якимова Основные алгоритмы на графах: текст лекций - Ярославль, ЯрГУ, 2011 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20110210.pdf>
2. М. А. Башкин, О. П. Якимова Дискретная математика. Ч. 2: сборник задач для студентов. – Ярославль, ЯрГУ, 2013. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20120208.pdf>
3. В. Г. Дурнев, М. А. Башкин, О. П. Якимова Элементы дискретной математики: учеб. пособие. Ч. 2 - Ярославль, ЯрГУ, 2007 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20070280.pdf>

##### **б) дополнительная литература:**

1. В. А. Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич Лекции по теории графов: учеб. пособие для вузов - М., ЛИБРОКОМ; URSS, 2013
2. Д. П. Ильюто, В. О. Мантуров, И. М. Никонов Комбинаторная топология и теория графов в задачах и упражнениях: учеб. пособие для студентов высших учебных заведений - Ярославль, ЯрГУ, 2013 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130236.pdf>
3. Дольников В. Л., Полякова О. П. Теория графов. Алгоритмы на графах: учебное пособие - Ярославль, ЯрГУ 2003. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20030281.pdf>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор:**

доцент кафедры КБ и ММОИ, к. ф.-м. н.,

Якимова О. П.

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Теория графов»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности**

**Задачи для домашней и самостоятельной работы приведены в сборнике**

Башкин М. А. Дискретная математика / М. А. Башкин, О. П. Якимова; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова, Науч.-метод. совет ун-та. Ч. 2: сборник задач для студентов, обучающихся по направлению Математика и компьютерные науки, специальности Компьютерная безопасность. - Б.м.: Б.и., 2013. - 75 с.

**Примеры задач для самостоятельной работы (И-ОПК 2.1\_1)**

1. Из полного 100-вершинного графа удалили 98 ребер. Доказать, что он остался связным.
2. В графе 100 вершин, причем степень любой из них не меньше 50. Доказать, что граф связан.
3. В стране любые два города соединены дорогой с односторонним движением. Доказать, что существует город, из которого можно проехать в любой другой не более чем по двум дорогам.
4. Связный граф  $G$  остается связным при удалении любых 18 вершин (вместе со всеми инцидентными ребрами). Назовем разрезом любое множество из 19 вершин, при удалении которых граф теряет связность, а куском любую компоненту связности, которая образуется при удалении разреза. Известно, что любой кусок, содержащий менее 10 вершин, не содержится ни в каком разрезе. Докажите, что никакой кусок не содержится внутри разреза.
5. В связном графе между любыми двумя вершинами есть маршрут из не более чем трех ребер, а степень каждой вершины не более, чем 4. Докажите, что в графе не более 53-х вершин.
6. Какое минимальное количество ребер нужно удалить из полного графа с 15 вершинами, чтобы он перестал быть связным?
7. Докажите, что граф, в котором любые две вершины соединены ровно одной простой цепью, является деревом.
8. Докажите, что в дереве любые две вершины соединены ровно одной простой цепью.
9. Докажите, что в любом связном графе можно удалить вершину вместе со всеми инцидентными ребрами так, чтобы он остался связным.
10. У царя Гвидона было три сына, из его потомков 100 имело по три сына, а остальные умерли бездетными. Сколько потомков у Гвидона?
11. В стране 100 городов, некоторые из которых соединены авиалиниями. Известно, что от любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Докажите, что можно побывать в каждом городе, совершив не более а) 198 перелетов; б) 196 перелетов.
12. В графе все вершины имеют степень 3. Докажите, что в нем есть цикл.
13. Приведите пример графа, в котором наименьшее доминирующее множество не является независимым.
14. Верно ли, что любое паросочетание графа содержится в наибольшем паросочетании?
15. Пусть  $G$  --- граф без изолированных вершин. Докажите, что  $G$  содержит такое доминирующее множество  $D$ , что  $VG \setminus D$  также доминирующее.
16. Граф шахматного ферзя имеет 64 клетки шахматной доски в качестве множества вершин, и две его вершины смежны тогда и только тогда, когда они соединены ходом ферзя,;

аналогично определяются графы трех других фигур: коня, слона и ладьи. Найти наименьшее доминирующее множество для каждого из этих четырех графов.

17. Минимаксные задачи на графах.

18. Доказать, что в любом графе, имеющем не менее двух вершин, найдутся две вершины с одинаковыми степенями.

19. Какое максимальное число точек сочленения может иметь граф на  $n$  вершинах

20. Доказать, что диаметр графа, дополнительного к несвязному графу, не больше 2.

21. Является ли дерево двудольным графом? Какие полные двудольные графы являются деревьями?

22. Доказать, что граф  $G$  связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения вершин  $VG = V_1 \cup V_2$ ,  $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ,  $V_1 \neq \emptyset$ ,  $V_2 \neq \emptyset$ , в графе  $G$  найдется ребро, соединяющее некоторые две вершины  $x \in V_1$  и  $y \in V_2$ .

23. Сколько компонент связности в лесу с 76 вершинами и 53 ребрами? Какое минимальное и максимальное число висячих вершин может иметь такой лес?

### **Оценивание результатов решения самостоятельной работы**

Решение самостоятельных работ осуществляется с целью проверки уровня знаний, умений, владений, понимания студентом основных методов и законов изучаемой теории при решении конкретных практических задач, умения применять на практике полученных знаний.

каждая задача оценивается в 3 балла:

3 - студент логически правильно решил поставленную задачу, верно применяя теоретические знания;

2 – в решении задачи содержатся описки или погрешности, что может привести к неверному ответу при верной, в целом, логической последовательности рассуждений; либо верное решение недостаточно обосновано;

1 – задача не решена, но имеется существенное продвижение в ее решении; может быть решена часть задачи; может быть изложен верный алгоритм решения задачи с неудачной попыткой его применения;

0 – решение задачи неверное либо отсутствует.

Оценка за решение контрольной или самостоятельной работы выставляется по сумме набранных за каждую задачу баллов :

менее 55% от максимально возможного количества баллов - неудовлетворительно,

55-69% от максимально возможного количества баллов - удовлетворительно,

70-84% от максимально возможного количества баллов - хорошо,

85-100% от максимально возможного количества баллов – отлично.

Приведенные выше пороговые значения процентных диапазонов могут изменяться в зависимости от сложности работы, количества предложенных задач, общей итоговой картины решения работы по учебной группе и других факторов.

## **2. Вопросы к зачету (И-ОПК 2.1.1, И-ОПК 2.1.4):**

1. Основные определения. Операции над графами
2. Степени вершин графа
3. Представление графа в памяти компьютера
4. Маршруты и связность
5. Вершинная связность и реберная связность
6. Двусвязные графы
7. Определение дерева
8. Остов минимального веса
9. Независимые множества. Шенноновская емкость графов
10. Задача Рамсея. Функция неплотности



11. Доминирование и покрытия
12. Паросочетания. Паросочетания в двудольном графе
13. Наибольшие паросочетания и задача о назначениях
14. Плоские и планарные графы
15. Эйлеровы графы
16. Гамильтоновы графы
17. Правильная раскраска. Оценки хроматического числа
18. Раскраска ребер
19. Раскраска планарных графов. Проблема четырех красок
20. Алгоритмы на графах.

### Тестовые задания для самоконтроля при подготовке к зачету

1. Оценить значение диаметра графа, дополнительного к несвязному графу
2. Как связаны степени вершин графа  $\deg v_i$  и число его ребер  $m$ , если число вершин равно  $n$ ?
3. Существует ли граф, имеющий не менее двух вершин, у которого все степени вершин различны?
4. Какое максимальное число ребер может иметь несвязный граф на  $n$  вершинах?
5. Верно ли, что графы, имеющие одинаковое количество вершин каждой степени, изоморфны?
6. Является ли дерево двудольным графом?
7. Какие полные двудольные графы являются деревьями?
8. Какое минимальное число висячих вершин в дереве с числом всех вершин, не менее 2?
9. Как связаны число вершин  $n$  и число его ребер  $m$  в дереве?
10. Сколько компонент связности в лесу с 76 вершинами и 53 ребрами?
11. Сколько центральных вершин имеет дерево?
12. Сколько точек сочленения (разделяющих вершин) может иметь дерево на  $n$  вершинах?
13. Сколько мостов может иметь дерево на  $n$  вершинах?
14. Сколько существует различных деревьев на  $n$  помеченных вершинах?
15. Каково хроматическое число дерева, содержащего не менее 2-х вершин?
16. Каково хроматическое число полного графа на  $n$  вершинах?
17. Радиус графа равен  $r$ . Каким может быть его диаметр  $D$ ?
18. Если эйлеров цикл графа является простым, то каковы степени вершин данного графа?
19. Является ли дерево, имеющее не менее 2 вершин, гамильтоновым графом?
20. Является ли полный граф, имеющий не менее 3 вершин, гамильтоновым графом?
21. Формула Эйлера для графа с числом вершин  $n$ , числом ребер  $m$  и числом граней  $f$ .
22. Какие из графов:  $K_3$ ,  $K_4$ ,  $K_5$ ,  $K_6$ ,  $K_{2,3}$ ,  $K_{2,4}$ ,  $K_{3,3}$ ,  $K_{4,4}$  — являются планарными?

### Ответы на тестовые задания

1.  $\sum_{i=1, \dots, n} \deg v_i = 2m$
2. (не больше 2.)
3. нет
4.  $C_{n-1}^2$
5. нет
6. да
7.  $K_{1,1}$  и  $K_{1,2}$
8. 2
9.  $m=n-1$
10. 23
11. 1 или 2.
12. от 1 до  $n-1$

13.  $n-1$
14.  $n^{n-2}$
15. 2
16.  $n$
17.  $r \leq D \leq 2r$
18. все степени вершин равны 2
19. нет
20. да
21.  $n-m+f=2$
22.  $K_3, K_4, K_{2,3}, K_{2,4}$

### 3. Правила выставления оценки

Для данной дисциплины в соответствии с учебным планом выставляется оценка: «зачтено», «незачтено».

Оценка «зачтено» выставляется студенту, выполнившему самостоятельную работу на оценку не менее «удовлетворительно» и проявившему на мероприятии промежуточной аттестации умения и навыки, соответствующие уровню, не ниже порогового. Студент знает:

- основные понятия теории графов;
- основные операции на графах;
- свойства и типы графов;
- метрики на графах;
- классические оптимизационные задачи на графах.

Студент может делать ошибки, но должен их исправлять самостоятельно после дополнительных (наводящих) вопросов преподавателя.

Оценка «не зачтено» выставляется студенту, проявившему на мероприятии промежуточной аттестации умения и навыки, соответствующие уровню, ниже порогового:

- Студент не может выполнить постановку задачи, не может провести сравнительный анализ данной задачи с другими, не может определить метод ее решения и провести даже простейший анализ полученного результата.
- Студент не может провести самостоятельно даже базовые вычисления с использованием математического аппарата, не может пояснить даже выполненные на практических занятиях вычисления и (или) логику решения.

Оценка «не зачтено» выставляется также студенту, получившему на зачете задание, но отказавшемуся отвечать.

**Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала являются лекции. По большому числу тем предусмотрены домашние задания для закрепления лекционного материала путем применения его к конкретным задачам.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения материала в течение обучения при сдаче самостоятельных работ преподаватель задает вопросы позволяющие выяснить понимание материала. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра студенты сдают зачет.