

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра теоретической физики

УТВЕРЖДАЮ

Декан физического факультета

(подпись) И.С. Огнев

21 мая 2024 года

Рабочая программа дисциплины
«Методы математической физики»

Направление подготовки
03.03.03 Радиофизика

Направленность (профиль)
«Технологии беспроводной связи»

Форма обучения
очная

Программа одобрена
на заседании кафедры
от «29» апреля 2024 года, протокол № 7

Программа одобрена НМК
физического факультета
протокол № 5 от «30» апреля 2024 года.

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Методы математической физики» являются основные типы уравнений в частных производных, возникающих в физических задачах, включая нелинейные уравнения в частных производных, а также основные типы специальных функций математической физики и их свойства, основы метода конечных разностей. Данный курс вырабатывает у студентов навыки построения математических моделей физических явлений и решения (аналитического и численного) получающихся при этом математических задач.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Методы математической физики» относится к обязательной части Блока 1 и входит в Модуль Математика в качестве элективной дисциплины.

Для освоения данной дисциплиной студенты должны владеть аппаратом математического анализа, линейной алгебры, дифференциального исчисления, уметь решать основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Полученные в курсе «Методы математической физики» знания необходимы для углубления математического образования и изучения последующих дисциплин модуля «Теоретическая физика».

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Общепрофессиональные компетенции		
ОПК-1 Способен применять базовые знания в области физико-математических и (или) естественных наук в сфере своей профессиональной деятельности.	ИД-ОПК-1.2 Способен применять физические законы и математические методы для решения задач теоретического и прикладного характера.	Знать <ul style="list-style-type: none"> - основные методы решения уравнений в частных производных; фундаментальные решения уравнений эллиптического типа; - основы анализа нелинейных уравнений в частных производных, основные типы специальных функций математической физики и их свойства, основы метода конечных разностей. Уметь <ul style="list-style-type: none"> - анализировать образование разрывов в решениях квазилинейных уравнений.
	ИД-ОПК-1.3 Демонстрирует навыки использования знаний физики и математики при решении практических задач.	Уметь: <ul style="list-style-type: none"> - решать уравнения гиперболического и параболического типов методом разделения переменных; - производить разложение функции по полному набору ортонормированных функций. Владеть навыками <ul style="list-style-type: none"> - применения метода разделения переменных в уравнениях в частных производных; - применения аналитических методов решения уравнений в частных производных к описанию процессов распространения волн, теплопроводности, диффузии; - решения простейших квазилинейных уравнений методом характеристик, применения метода конечных разностей для численного решения уравнений в частных производных при описании процессов распространения волн, теплопроводности, диффузии.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам) Формы ЭО и ДОТ (при наличии)
			Контактная работа					самостоятельная работа	
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания		
1	Введение.	4	2						
2	Уравнения гиперболического типа	4	6	10		1		3	Задания для самостоятельной работы, Самостоятельная работа № 1, Контрольная работа № 1
3	Уравнения параболического типа	4	6	8				3	Задания для самостоятельной работы, Самостоятельная работа № 2, Контрольная работа № 1
4	Уравнения эллиптического типа	4	6	8				3	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа № 2
5	Нелинейные уравнения математической физики	4	4	4		1		2	Задания для самостоятельной работы, Контрольная работа № 2
6	Специальные функции математической физики	4	8	4		1		4	Задания для самостоятельной работы
7	Метод конечных разностей для решения уравнений в частных производных	4	4					2	Задания для самостоятельной работы
						1	0,3	18,7	Зачет
	Всего за 4 семестр 108 часов		34	34		4	0,3	35,7	
	Всего 108 часов		34	34		4	0,3	35,7	

Содержание разделов дисциплины:

1. Введение.

- 1.1. Введение. Основные типы уравнений в частных производных математической физики.

2. Уравнения гиперболического типа.

- 2.1. Уравнения малых поперечных колебаний струны, мембраны. Уравнение продольных колебаний стержня.
- 2.2. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
- 2.3. Метод разделения переменных в уравнениях гиперболического типа. Случаи неоднородного уравнения, неоднородных граничных условий.

3. Уравнения параболического типа.

- 3.1. Одномерное уравнение теплопроводности. Уравнение диффузии. Постановка краевых задач для параболических уравнений.
- 3.2. Метод разделения переменных в уравнениях параболического типа. Функция мгновенного точечного источника.

4. Уравнения эллиптического типа.

- 4.1. Уравнение Лапласа. Формулы Грина. Свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи для уравнения Лапласа.
- 4.2. Функция источника для уравнения Лапласа.
- 4.3. Основные задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца. Функция точечного источника для уравнения Гельмгольца.

5. Нелинейные уравнения математической физики.

- 5.1. Системы квазилинейных уравнений. Характеристики систем квазилинейных уравнений, образование разрывов в решении.
- 5.2. Уравнение Кортевега – де Фриса. Солитонные решения.

6. Специальные функции.

- 6.1. Разделение переменных в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя.
- 6.2. Разделение переменных в сферических координатах. Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра. Сферические функции.
- 6.3. Общее уравнение для специальных функций.
- 6.4. Полиномы Чебышёва – Эрмита и Чебышёва – Лагерра.

7. Метод конечных разностей.

- 7.1. Сетки и сеточные функции. Аппроксимация дифференциальных операторов. Разностная задача. Устойчивость, сходимость и разрешимость разностных схем.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя.

Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются следующие технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

Электронный учебный курс «Методы математической физики» в LMS Электронный университет Moodle ЯрГУ, в котором:

- представлены задания для самостоятельной работы обучающихся по темам дисциплины;
- осуществляется проведение отдельных мероприятий текущего контроля успеваемости студентов;
- представлены видеозаписи лекций по отдельным темам дисциплины;
- представлены правила прохождения промежуточной аттестации по дисциплине;
- представлен список учебной литературы, рекомендуемой для освоения дисциплины;
- представлена информация о форме и времени проведения консультаций по дисциплине в режиме онлайн;
- посредством форума осуществляется синхронное и (или) асинхронное взаимодействие между обучающимися и преподавателем в рамках изучения дисциплины.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»
http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Кузнецов, А. В. Методы математической физики : учеб. пособие для вузов. Ярославль, ЯрГУ, 2004.
<http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20041705.pdf>

б) дополнительная литература

1. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике: учеб. пособие для вузов. М., Физматлит, 2004.
http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=311964&cat_cd=YARSU
2. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики : учебник для вузов. М., МГУ, Наука, 2004.
http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=313224&cat_cd=YARSU
3. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики : учебник для вузов. М., Физматлит, 2004.
http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_card.php?rec_id=312049&cat_cd=YARSU

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Профессор кафедры
теоретической физики, д.ф.-м.н.

А.В. Кузнецов

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины
«Методы математической физики»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущего контроля успеваемости
и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

Задания для самостоятельной работы
*(данные задания выполняются студентом самостоятельно
и преподавателем в обязательном порядке не проверяются)*

Самостоятельная работа № 1
*(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1_2, индикатор ИД-ОПК-1_3 в
части умений формулировать и решать задачу разделения переменных в уравнении
гиперболического типа.)*

Примеры заданий:

С помощью метода разделения переменных решить краевые задачи.

1. Струна $0 \leq x \leq l$ с жестко закрепленными концами до момента $t = 0$ находилась в состоянии равновесия под действием поперечной силы $F_0 = \text{const}$, приложенной к точке x_0 струны перпендикулярно к невозмущенному положению струны. В начальный момент времени $t = 0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Найти колебания струны при $t > 0$.
2. Стержень с жестко закрепленным концом $x = 0$ находится в состоянии равновесия под действием продольной силы $F_0 = \text{const}$, приложенной к концу $x = l$. В момент $t = 0$ действие силы F_0 мгновенно прекращается. Найти колебания стержня, если начальные скорости равны нулю.
3. Упругий стержень $0 \leq x \leq l$ расположен вертикально и верхним концом ($x = 0$) жестко прикреплен к свободно падающему лифту, который, достигнув скорости v_0 , мгновенно останавливается. Найти продольные колебания стержня.

Самостоятельная работа № 2
*(проверка сформированности ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1_2, индикатор ИД-ОПК-1_3 в части
умений формулировать и решать задачу разделения переменных в уравнении параболического
типа.)*

Примеры заданий:

С помощью метода разделения переменных решить краевые задачи.

1. Найти концентрацию газа в цилиндре $0 \leq x \leq l$ с непроницаемой боковой поверхностью, если конец $x=l$ открыт, конец $x=0$ закрыт полупроницаемой перегородкой (поток газа через нее пропорционален разности концентраций), причем концентрация этого газа в атмосфере равна $U_l = \text{const}$. Начальная концентрация газа в цилиндре является произвольной функцией, а давление и температура воздуха равны атмосферным.
2. Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$ с теплоизолированной боковой поверхностью, если на конце $x=0$ происходит конвективный теплообмен с внешней средой, имеющей

температуру $U_l = \text{const}$, а на конец $x=l$ подается извне постоянный тепловой поток q_2 . Начальная температура является произвольной функцией.

3. Найти концентрацию газа в цилиндре $0 \leq x \leq l$ с полупроницаемой боковой поверхностью (поток газа через нее пропорционален разности концентраций), если концентрация этого газа в атмосфере равна $U_0 = \text{const}$, а оба конца закрыты непроницаемыми перегородками. Начальная концентрация этого газа в цилиндре равна нулю, а давление и температура воздуха равны атмосферным.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация проводится в виде контрольных работ № 1 и 2, при выполнении которых проверяется сформированность ОПК-1, индикатор ИД-ОПК-1_2, индикатор ИД-ОПК-1_3, в части умений формулировать и решать задачи по разделению переменных в уравнениях гиперболического, параболического и эллиптического типов, по решению квазилинейных уравнений методом характеристик.

Промежуточная аттестация считается положительной по результатам контрольных работ № 1 и 2 при условии набора по итогам выполнения студентом каждой из них не менее 4 баллов.

Правила выставления оценки по результатам контрольной работы:

Оценка по результатам контрольной работы определяется в баллах по следующему принципу: правильно выполненное задание оценивается в максимальное количество баллов, указанное по данному заданию в варианте.

Каждое из заданий может быть оценено половиной заявленных по нему баллов, в случае, когда при его выполнении правильно сформулированы начальные и граничные условия, правильно записаны уравнения процессов, но имеются ошибки в численных расчетах.

Полностью неправильно выполненное задание - 0 баллов.

Примеры заданий:

Контрольная работа № 1

1. Найти колебания струны с жестко закрепленными концами в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости. В момент $t = 0$ струна возбуждается ударом жесткого плоского молоточка, передающего ей скорость v_0 на отрезке $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$. Начальные смещения равны нулю.
2. Найти температуру стержня $0 \leq x \leq l$, через боковую поверхность которого происходит конвективный теплообмен по закону Ньютона с внешней средой, имеющей температуру $U_0 = \text{const}$, оба конца стержня теплоизолированы, а начальная температура равна нулю.

Контрольная работа № 2

1. Найти решение первой краевой задачи для уравнения Лапласа внутри круга радиуса a при граничном условии $U|_{\rho=a} = A (\sin 5 \varphi + \cos 3 \varphi)$.
2. Найти методом характеристик решение уравнения $2u_t - u u_x = 0$ при условии $u|_{t=0} = 3 - x$. Найти значение функции u при $t = 1, x = 1.5$.

3. Список теоретических вопросов для проведения итоговой аттестации

1. Уравнение малых поперечных колебаний струны.
 2. Уравнение колебаний мембраны.
 3. Уравнение продольных колебаний стержня.
 4. Метод распространяющихся волн. Формула Даламбера.
 5. Метод разделения переменных в уравнениях гиперболического типа.
 6. Метод разделения переменных в неоднородном гиперболическом уравнении; при неоднородных граничных условиях.
 7. Одномерное уравнение теплопроводности.
 8. Уравнение диффузии.
 9. Постановка краевых задач для параболических уравнений.
 10. Метод разделения переменных в уравнениях параболического типа. Функция мгновенного точечного источника.
 11. Уравнение Лапласа.
 12. Первая, вторая и основная интегральная формулы Грина.
 13. Свойства гармонических функций. Единственность и устойчивость первой краевой задачи для уравнения Лапласа.
 14. Функция источника для уравнения Лапласа.
 15. Основные задачи, приводящие к уравнению Гельмгольца. Постановка внутренних краевых задач для уравнения Гельмгольца.
 16. Системы квазилинейных уравнений.
 17. Уравнение Кортевега–де Фриса. Солитонные решения.
 18. Разделение переменных в цилиндрических координатах. Уравнение Бесселя. Функции Бесселя.
 19. Разделение переменных в сферических координатах. Уравнение Лежандра. Полиномы Лежандра.
 20. Общее уравнение для специальных функций.
 21. Полиномы Чебышёва–Эрмита и Чебышёва–Лагерра.
 22. Сетки и сеточные функции. Аппроксимация дифференциальных операторов.
- Разностная задача для уравнения теплопроводности

Порядок проведения итоговой аттестации в форме зачёта.

Зачёт проводится в форме беседы по теоретическим вопросам из приложенного списка и решения задач из контрольных работ № 1 и № 2.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Методы математической физики»

Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Методы математической физики» являются лекции. В основе дисциплины лежит особый математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с аппаратом математической физики.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математической физики. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом математической физики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде самостоятельных работ (в аудитории) и двух контрольных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце изучения дисциплины студенты сдают зачёт в форме беседы по теоретическим вопросам из приложенного списка и решения задач из контрольных работ № 1 и № 2.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Методы математической физики» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без регулярных занятий в течение семестра сдать зачёт по итогам изучения дисциплины студенту едва ли возможно.