


**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерных сетей

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета ИВТ  
 Д.Ю. Чалый  
« 23 » мая 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
«Непрерывные математические модели»

**Направление подготовки**  
01.04.02 Прикладная математика и информатика

**Направленность (профиль)**  
«Математические основы искусственного интеллекта»

**Квалификация выпускника**  
Магистр

**Форма обучения**  
очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от «17» апреля 2023 г.,  
протокол № 8

Программа одобрена НМК  
факультета ИВТ  
протокол № 6 от  
«28» апреля 2023 г.

Ярославль



### 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина «Непрерывные математические модели» знакомит магистрантов с ключевыми понятиями нелинейной динамики и синергетики. Цель преподавания этой дисциплины – добиться осмысленного понимания магистрантами современных парадигм математического моделирования, проблем, актуальных для настоящего этапа ее развития. Образовательные задачи включают в себя усвоение магистрантами новейших концепций по различным отраслям применения нелинейной динамики.

### 2. Место дисциплины в структуре ОП магистратуры

Дисциплина «Непрерывные математические модели» относится к базовой части ОП магистратуры.

Образовательный процесс в рамках дисциплины «Непрерывные математические модели» опирается на подготовку обучающихся на предыдущей образовательной ступени, имеющих степень бакалавра и изучавших базовые математические курсы (т.е. получивших исходные математические знания). Непосредственно при осуществлении магистерской подготовки имеют значение следующие междисциплинарные связи представленного курса: «математический анализ», как фундамент математического образования, «дифференциальные уравнения» и «уравнения математической физики», как курсы, составляющие математическую основу данного курса. Дисциплина «Непрерывные математические модели» способствует формированию мировоззрения и развитию математического мышления, а также дальнейшему развитию навыков научно-исследовательской деятельности. Предполагаемое данным курсом освещение центральных тем, базовых понятий и системных связей современного математического моделирования закладывает основы для более детального изучения и понимания широкого круга специальных вопросов.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОП магистратуры

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих элементов компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ОП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>		
ОПК-1 Способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики.	ОПК – 1.1 Обладает фундаментальными знаниями в области математики и информатики ;  ОПК – 1.2 Осуществляет сбор и анализ материалов предметной области;	

	ОПК – 1.3 Разрабатывает и использует математические модели для решения задач в профессиональной деятельности.	своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий; Владеть навыками: – навыками методологически грамотного осмысления конкретно-научных проблем.
--	--	--

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зач. ед., 108 акад. час.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма
			Контактная работа	лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	
1	Введение	1		1				2	
2	Линейные математические модели	1		1				4	
3	Простейшие нелинейные уравнения	1		1				4	
4	Элементы теории бифуркаций	1	2	1				4	
5	Локальный анализ и грубость динамических систем	1		1				4	
6	Простейшие катастрофы	1	2	1				4	
7	Качественный анализ системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений	1		1				4	
8	Автоколебания. бифуркация Андронова - Хопфа	1		2				4	
9	Фракталы	1	2	1				4	

10	Простейшие системы с дискретным временем	1	2	2			5	
11	Динамический хаос	1		2			5	
12	Простейшие нелинейные волны	1		2			5	
13	Автоволновые процессы	1	2	2			5	
14	Стационарные диссипативные структуры	1		2			5	
15	Синергетика и концепция параметров порядка	1		2			5	
16	Нестационарные диссипативные структуры	1	2	2		2	5	
	<b>Всего за 1 семестр</b>		<b>12</b>	<b>24</b>		<b>2</b>	<b>70</b>	<b>Экзамен</b>
	<b>Всего</b>		<b>12</b>	<b>24</b>		<b>2</b>	<b>70</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

#### Тема 1. Введение

Математическое моделирование крупных прикладных задач. Решение энергетической проблемы и программа управляемого термоядерного синтеза (УТС). Возникновение Вселенной. Большой взрыв и обратные задачи. Проблема турбулентности. Сценарии перехода от ламинарных к турбулентным режимам. Технологические задачи. Обработка металлов. Вычислительный эксперимент. Модель, алгоритм, программа. Их взаимосвязь. Необходимость построения иерархии упрощенных моделей при анализе сложных задач. Возникновение междисциплинарных подходов. Кибернетика. Следующий этап – необходимость управлять на основе знания, на основе более глубокого понимания нелинейных процессов. Мягкое и жесткое моделирование. Теория диссипативных структур. Синергетика. Общие свойства открытых нелинейных диссипативных систем вдали от точки бифуркации. Парадокс Дарвина. Колебательные химические реакции. Возникновение "Nonlinear Science". Синтез различных направлений исследований. Единство мира в единстве математических моделей, возникающих в разных областях исследований.

#### Тема 2. Линейные математические модели

Цель лекции показать, что мы теряем, переходя к нелинейным моделям, какого аппарата мы лишаемся. Широкая область применимости линейных моделей. Детально разработанный математический аппарат. Его основа – *принцип суперпозиции*. Он дает возможность свести сложную задачу к набору простых. Корректность по Адамару задач математической физики. Понятие корректности разностной схемы. Решение параболических уравнений методом разделения переменных.

#### Тема 3. Простейшие нелинейные уравнения

Исторический экскурс. Анализ дифференциальных уравнений в XIX веке. Одна модель химической кинетики. Фазовое пространство, фазовая кривая и интегральная кривая. Асимптотическое поведение решений. Особые точки. Устойчивые и неустойчивые точки. I-й метод Ляпунова. Уравнение радиоактивного распада. Рост народонаселения. Закон Мальтуса. Вспомогательные линейные уравнения, отражающие поведение системы в окрестности особой точки. Программа исследований А. Пуанкаре. Качественный анализ дифференциальных уравнений. Глобальный и локальный анализ. Возникновение теории нормальных форм и топологии.

#### Тема 4. Элементы теории бифуркаций

Задача Эйлера об изгибе колонны. Достаточное условие устойчивости особой

точки. Достаточное условие неустойчивости. Поведение решений в окрестности точки бифуркации и простейшие модельные уравнения, описывающие их. Точки поворота. Надкритические и подкритические бифуркации. Бифуркация типа "обмен устойчивостью". Прогиб неидеальной колонны. Теория несовершенств. Эффект «хлопка» и его использование в технике. Резонансное возбуждение как способ управления сложными системами. Роль флуктуаций в окрестности точки бифуркации. Принцип «упорядоченности через флуктуации». Одна математическая модель социологии. Роль бифуркаций в теории эволюции.

#### **Тема 5. Локальный анализ и грубость динамических систем**

Грубость системы. Идея типичности при моделировании различных процессов. Возможность привести данную систему к эталонной. Машина катастроф и качалки. Гистерезис. Бистабильность. Кривая кратных корней. Анализ качалок и множества других моделей, в которых происходят катастрофы, сводится к изучению двухпараметрического семейства функций. Огибающие и каустики. Другие задачи теории особенностей. Связь с рядами Тейлора.

#### **Тема 6. Простейшие катастрофы**

Отображения плоскости. Простейшие катастрофы. Складка и сборка. Исследовательская программа Р. Тома, связанная с анализом катастроф. Катастрофы в прикладных задачах. Модель гения — маньяки. Задачи продолжения по параметрам. Модель тюремных бунтов. Другие математические модели психологии. Проблемы измерения. Пороговый характер процесса — важная черта нелинейных явлений. Одна экологическая система. Примеры более сложных катастроф. Приложения теории катастроф к оптике и теории рассеяния. Проблема выделения параметров порядка. Связь теории катастроф со вторым методом Ляпунова.

#### **Тема 7. Качественный анализ системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений**

Задача о колебании численности популяций. Модель типа Лотки — Вольтерра. Типы особых точек. *Фокус, центр, седло, узел*. Фазовые кривые в окрестности особых точек. "Наивное" определение *аттрактора*. Топология и динамические системы. Индекс особой точки. Теорема Пуанкаре. Примеры других топологических инвариантов. Простейшие задачи топологии. Гамильтоновы и диссипативные системы. Теорема об изменении фазового объема. Системы Морса — Смейла. Особые точки в  $n$ -мерном пространстве. Грубость динамических систем на плоскости.

#### **Тема 8. Автоколебания. бифуркация Андронова — Хопфа**

Колебательные химические реакции. Модель *брюсселятора*. Условие устойчивости предельного цикла. *Модель Ван - дер - Поля*. Возникновение теории колебаний. Возникновение предельных циклов при изменении параметров. Нормальная форма, описывающая эту бифуркацию. Плоскость Пуанкаре. Бифуркация Андронова — Хопфа в задачах гидродинамики. Течение Куэтта — Тейлора. Бифуркации предельных циклов. Рождение инвариантных торов. Бифуркация Андронова — Хопфа и проблема перехода от ламинарного течения к турбулентному. *Сценарий Хопфа — Ландау*.

#### **Тема 9. Фракталы**

Проблема измерения. Задача об измерении береговой линии Великобритании. Неограниченный рост длины при увеличении точности измерений. Построение объекта с аналогичными свойствами. Остров Коха. Канторово множество. Несчетность. Неэффективность стандартных количественных характеристик (лебеговой меры). *Хаусдорфова размерность*. Другие парадоксальные множества. Непрерывная функция, не имеющая производной (пример Вейерштрасса). Дьявольская лестница, кривая Пеано. Броуновское движение. Недифференцируемость траектории частицы. Физика атмосферы, теория фазовых переходов. Необходимость учета большого интервала масштабов.

#### **Тема 10. Простейшие системы с дискретным временем**

Простейшая модель экологии, учитывающая внутривидовой отбор - логистическое

отображение. Циклы. Устойчивые и неустойчивые циклы. Геометрическая интерпретация. Лестница Ламерея. Критерий устойчивости цикла. Бифуркация удвоения периода. Каскад бифуркаций удвоения. Универсальные постоянные Фейгенбаума. Порядок Шарковского. Сценарий возникновения хаоса.

### **Тема 11. Динамический хаос**

Типы аттракторов одномерных отображений. Инвариантная мера. Хаотические аттракторы и шумящие циклы. Прохождение частиц через вещество. Метод Монте – Карло. Моделирование процесса, связанное с его имитацией. Гипотеза С. Уолфрема о том, что имитация является единственным способом анализа большого класса нелинейных систем. Чувствительность к начальным данным. Показатели Ляпунова, характеризующие разбегание или стремление друг к другу близких траекторий. Проблема предсказуемости. Эффект бабочки. Другой сценарий возникновения хаоса. Тангенциальная бифуркация. Перемежаемость. Сценарий Помо — Манневиля. Чувствительность по отношению к параметрам. Возникновение вероятностных свойств при анализе детерминированных процессов.

### **Тема 12. Простейшие нелинейные волны**

Вывод уравнения переноса из закона сохранения вещества. Линейное уравнение переноса. Автомодельные решения. Связь с уравнениями гидродинамики. Ударные волны. Введение вязкости. *Уравнение Бюргера*. Обобщенные решения уравнения переноса. Условия на разрыве. Различные типы ударных волн. Роль вычислительного эксперимента в исследовании этих задач. Построение разностных схем для нелинейных уравнений переноса как проблема вычислительной физики.

### **Тема 13. Автоволновые процессы**

Задача о распространении гена. Моделирование эпидемии. Уравнение Колмогорова - Петровского – Пискунова. Набор автомодельных решений. Асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$ . Теоремы сравнения для нелинейных параболических уравнений. Новая роль автомодельных решений, как асимптотического описания процесса. Задача о распространении нервного импульса. Система Ходжкина – Хаксли. Проблема моделирования сердечных аритмий. Волновые процессы в коре головного мозга. Возбудимые среды. Стадии возбуждения, активности, рефрактерности. Системы типа реакция – диффузия. Спиральные волны в возбудимых средах. Многовитковые спиральные волны. Двухчастотные режимы в возбудимых средах.

### **Тема 14. Стационарные диссипативные структуры**

Проблема морфогенеза. Модель Тьюринга. Системы типа реакция – диффузия. Термодинамическая ветвь. Дестабилизирующая роль диффузии. Неустойчивость Тьюринга. Диссипативные структуры в химической кинетике. Модель брюсселятора. Применение асимптотических методов для построения профилей стационарных диссипативных структур.

### **Тема 15. Синергетика и концепция параметров порядка**

Проблема выделения параметров порядка при описании сложных систем и, в частности, при моделировании процессов в нелинейных средах. Простейшая схема выделения параметров порядка. Пример линейного уравнения теплопроводности. Типичная картина для нелинейных диссипативных систем. Самоорганизация. Подчинение короткоживущих мод долгоживущим. Адиабатическое исключение переменных. Применение метода Галеркина для построения упрощенных моделей. Ассоциативная память. Нейронные сети. Самоорганизация и выделение параметров порядка в нейронных сетях.

### **Тема 16. Нестационарные диссипативные структуры**

Нестационарные диссипативные структуры. Базовая модель – модель тепловых структур. Локализация процессов. Резонансное возбуждение. Режимы с обострением и структуры в одной задаче науковедения. Обобщения модели (системы уравнений, многомерные задачи, архитектура сложных двумерных структур), численный анализ

режимов с обострением, новые направления исследований (инвариантно - групповые методы, теоремы сравнения и т.д.).

## **5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

## **6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)**

При проведении лекционных и лабораторных занятий по курсу используется разработанный на кафедре математического моделирования и кафедре компьютерных сетей специальный программный комплекс Tracer3, предназначенный для иллюстрации и исследования систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с запаздывающим аргументом. Программа Tracer3 позволяет численно решать достаточно широкий класс систем обыкновенных дифференциальных уравнений, отображений и уравнений с запаздываниями. Условно программу можно разбить на три основные алгоритмические части: компилятор математических выражений, построитель фазовых портретов и вычислитель ляпуновских показателей.

Доступ к Гибриднему вычислительному кластеру Международной научно-исследовательской лаборатории "Дискретная и вычислительная геометрия" имени Б.Н.Делоне

Для формирования текстов материалов для промежуточной и текущей аттестации, для разработки документов, презентаций, для работы с электронными таблицами программы OfficeStd 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232, LibreOffice (свободное), издательская система LaTeX;

Для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ – Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ-NEXT" (АБИС "Буки-Next").

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов Метод квазинормальных форм. Ярослав. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. 104 с.



2. Методы качественной теории в нелинейной динамике / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. Ч. 2 (пер. с англ. В. А. Осотовой ; под науч. ред. Д. В. Тураева, А. Л. Шильникова), М., Регулярная и хаотическая динамика, 2009, 546с
3. Глызин, С. Д., Релаксационные автоколебания в нейронных системах [Электронный ресурс] : учеб.пособие для студентов, обучающихся по специальности Прикладная математика и информатика / С. Д. Глызин, А. Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2013, 219с <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20130405.pdf>

б) дополнительная литература

1. Глазков, Д. В., Уравнения динамики лазера : учеб.пособие для вузов / Д. В. Глазков, И. С. Кашенко ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2012, 127с

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Через библиотеку ЯрГУ осуществляется доступ к диссертационным исследованиям, а также зарубежным базам данных (в периоды, когда доступ предоставляется библиотеке безвозмездно их владельцами).
2. Поисковые системы представлены в виде Yandex, Google, Rambler и т.д.
3. Электронно-библиотечная система «Юрайт»( <https://urait.ru/> ).
4. Электронно-библиотечная система «Лань»( <https://e.lanbook.com/>).

## **8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

- специальные помещения:
  - учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
  - учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
  - учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
  - помещения для самостоятельной работы;
  - помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров)– списочному составу группы обучающихся.

- фонд библиотеки.
- компьютерная техника, локальная сеть факультета.
- специальный программный комплекс Tracer 3.

### **Автор(ы) :**

Старший преподаватель  
кафедры компьютерных сетей, к.ф.-м.н.

\_\_\_\_\_ С.В. Алешин

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Непрерывные математические модели»  
Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки  
знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы  
формирования компетенций**

**1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей  
аттестации**

**Темы рефератов**

Составить математические модели предлагаемых объектов и дать обзор литературы, где такая модель исследуется.

1. Объем газового пузыря, образовавшегося в результате глубинного подводного взрыва, колеблется с периодом, пропорциональным  $p^a \rho^b E^c$ . Здесь  $p$  — давление,  $\rho$  — плотность воды,  $E$  — полная энергия взрыва. Найти  $a, b, c$ .

2. Как сила, действующая на сферу, движущуюся в жидкости зависит от радиуса сферы  $r$ , скорости движения  $v$  и вязкости  $\eta$ ? Размерность вязкости —  $\text{кг}\cdot\text{м}^1\cdot\text{сек}^1$ .

3. Существует некоторая поверхность, находясь на которой частица в гравитационном поле совершает колебания с периодом, не зависящим от амплитуды. Найти уравнение этой поверхности  $s = s(y)$  где  $s$  — длина пути, на котором перемещается частица,  $y$  — координата частицы по вертикали.

4. Грузик массы  $m$  на пружинке с жесткостью  $k$  совершает колебания в жидкости. Насколько велик должен быть коэффициент вязкого трения  $\gamma$  чтобы грузик без колебаний двигался к положению равновесия?

5. Допустим, что все пространственные масштабы в Солнечной системе изменились в  $\alpha$  раз. Насколько при этом изменятся временные масштабы?

6. Можно ли покинуть пределы Солнечной системы, если межпланетный корабль движется со скоростью реактивного самолета?

7. Представим, что Земной шар — твердое тело с постоянной плотностью  $\rho$ . Допустим, что в нем сделано отверстие, проходящее через центр. В это отверстие брошен камень. Что будет происходить далее?

Исследовать модели приведенные в следующих заданиях и дать обзор литературы, где такая модель исследуется.

1. Простейшим уравнением, описывающим нелинейные колебания является уравнение Дюффинга  $\ddot{x} + \omega x + \mu x^3 = 0$ . Считая, что  $\mu < 0$ , выяснить, каков период малых колебаний. При каком значении энергии период стремится к бесконечности?

2. Как происходят колебания в системе, где возвращающая сила убывает со временем,  $\ddot{x} + \frac{x}{t^2} = 0$ ?

3. Как происходят колебания в системе, где и возвращающая сила, и коэффициент вязкого трения убывает со временем,  $\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{t} + \frac{x}{t^2} = 0$ ?

4. Какой должна быть сила, действующая на материальную точку, чтобы численное решение дифференциальных уравнений, полученное с помощью метода Эйлера, совпало с точным?

5. Считая, что  $\mu$  малый параметр в уравнении Дюффинга, выяснить, как зависят малые колебания от этого параметра.

6. Рассмотрим движение частицы в центральном поле с потенциалом  $U(r) = Ar^n$ . В каком случае частица, двигающаяся в таком поле, может упасть на центр?

7. Доказать, что при движении в центральном поле  $U = a/r$  величина  $[\mathbf{v} \times \mathbf{M}] + \frac{ar^2}{r}$

сохраняется. (Напомним, что  $M = m|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$ .)

8. Многие демографы считают, что уравнение Мальтуса

$$\dot{x} = ax$$

следует заменить другой моделью, лучше согласующейся с кривой роста народонаселения за последние 100 тысяч лет

$$\dot{x} = ax^{1+s}$$

Каково Ваше мнение об этой модели? Какова ее область применения? В чем качественное отличие моделей?

9. В реакторе началась цепная реакция, в ходе которой скорость изменения концентрации вещества  $n$  изменяется по закону  $\beta n^\gamma$ , ( $\beta > 0$ ,  $\gamma > 1$ ). В начальный момент этого вещества в реакторе нет. С течением времени вещество вводится в реактор по закону  $at^2$ . Оценить время, через которое реакция закончится, либо простейшая модель, описывающая изменение концентрации, только одного вещества станет неприемлемой?

10. Экологи построили модель, определяющую изменение численности популяции, которая описывается уравнением

$$\dot{x} = F(x).$$

Равновесная численность популяции определяется особой точкой этого уравнения  $x^*$ . В силу специальных причин оказывается, что  $\frac{\partial F(x^*)}{\partial x} = 0$ . Устойчиво ли это положение равновесия? Что будет происходить, когда численность популяции  $x$  будет близка к  $x^*$ ?

11. Упрощенной математической моделью некоторой химической реакции является уравнение

$$\dot{x} = (x - a)(x - b)(x - c)(x - d)(x - e),$$

$$x(0) = x_0 < a < b < c < d < e.$$

Как будет вести себя концентрация  $x(t)$  на больших характерных временах при различных значениях  $x_0$ ?

12. Допустим, мы решаем задачу

$$\dot{n} = n^Q, Q > 1, n(0) = n_0$$

с помощью метода Эйлера с шагом по времени  $\tau$ . Будет ли полученное численное решение согласовываться с решением исходного дифференциального уравнения? Будут ли совпадать их качественные особенности?

13. Скорость таяния снежка, внесенного в помещение, пропорциональна площади его поверхности  $S$ . Пусть один снежок, имеющий форму шара, в два раза больше по объему, чем второй. Какая часть первого снежка останется, когда первый растает полностью? Рассмотрите также более общую модель, в которой скорость таяния предполагается пропорциональной  $S^a$ . При каких показателях  $a$  процесс таяния снежка занимает конечное время?

14. В начальный момент времени ракеты А, В, С находятся в вершинах равностороннего треугольника. В течение всего времени ракета А движется к ракете В, ракета В к ракете С, ракета С к ракете А. Найти закон движения всех ракет, считая их скорости постоянными.

15. Что происходит с итерациями отображения  $x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n)$  при  $\lambda > 4$ ? Существуют ли такие начальные точки  $x$ , при которых  $0 \leq x_n \leq 1$  при всех  $n$ ?

16. Пусть известно одномерное отображение и  $n$ -й член последовательности  $x_n$ . Можно ли определить по этим данным  $x_{k-1}$ ,  $x_{k+1}$  и т.д. Всегда ли это возможно? Нужна ли для этого какая-либо дополнительная информация?

17. Какие математические модели с дискретным временем могут быть предложены для систем типа "хищник - жертва", "паразит - хозяин" для описания динамики двух видов, конкурирующих за общие ресурсы?

18. Найти приближенное решение уравнения Фейгенбаума, считая, что в  $g(x)$  входит только постоянная и квадратичный член.

19. Что является общей чертой нелинейных явлений, при математическом описании которых используют модели, порождающие фракталы?

20. Предложите символическое описание кривой Пеано. Какое наибольшее число раз эта кривая может проходить через одну точку квадрата?

21. Можно ли десять городов соединить между собой непересекающимися дорогами так, чтобы из каждого города выходило пять дорог, входящих в пять других городов?

22. В бесконечной цепочке нервных клеток каждая клетка может находиться в состоянии "покоя" или "возбуждения". "Возбужденная" в момент  $t$  клетка посылает сигнал, который в момент  $t + 1$  доходит до соседних клеток. Клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток. (Если сигналы приходят с двух сторон, то клетка не возбуждается.) Пусть в начальный момент времени возбуждена одна клетка. Сколько клеток будет возбуждено через  $t$  секунд?

23. В трапеции  $AHCD$  с основанием  $AB = a$  и  $CD = b$  проведен отрезок  $A_1B_1$ , соединяющий середины диагоналей. В трапеции  $A_1B_1CD$  проведен отрезок, соединяющий середины диагоналей и т.д. Что Вы можете сказать о последовательности длин отрезков  $\{A_nB_n\}$ ?

24. Квадратный трехчлен  $f(x) = ax^2 + bx + c$  таков, что уравнение  $f(x) = x$  не имеет вещественных корней. Доказать, что уравнение  $f(f(x)) = x$  также не имеет вещественных корней.

25. Один из простейших многоклеточных организмов — водоросль "вольвокс" представляет собой сферическую оболочку, сложенную из пятиугольных, шестиугольных и семиугольных клеток. В каждой вершине этого тела сходятся 3 клетки. Биологи заметили, что пятиугольных клеток ровно на 12 больше, чем семиугольных. Почему?

26. Население пункты  $A, B, C, D$  расположены в вершинах квадрата. Можно ли построить систему дорог, по которой из каждого населенного пункта можно было бы попасть в каждый, общая длина которой меньше суммы длин диагоналей квадрата?

27. Планета вращается вокруг звезды по круговой орбите с угловой скоростью  $\omega_1$ . Планета вращается вокруг своей оси со скоростью  $\omega_2$ . Вокруг планеты по круговой орбите вращается спутник с угловой скоростью  $\omega_3$ . В момент времени  $t = t_1$  в данном месте планеты произошло затмение звезды спутником планеты. Когда затмение произойдет в следующий раз?

28. Модельная система, описывающая начальную стадию цепной реакции имеет вид  $\dot{u} = u^{\beta_1} v^{\gamma_1}, v = u^{\gamma_2} v^{\beta_2}, u(0) = u_0, v(0) = v_0$ .

Возможны ли такие режимы, когда  $u \rightarrow \infty, v \rightarrow const$  при  $t \rightarrow t_j$ ?

29. Доказать, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом граней.

### Критерии оценки

Оценка	Критерий
зачтено	ОК-1 Обозначена проблема и обоснована её актуальность, сделан анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция; сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объём; соблюдены требования к внешнему оформлению

	ОПК-3 Реферат содержит практическую часть. Верно применены математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач по практической части темы реферата
незачтено	ОК-1 Тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы или реферат не представлен вовсе ОПК-3 Реферат не содержит практической части, либо не верно применены математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач по теме реферата

## 1.2 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

### Список заданий к зачету

1. Математическое моделирование крупных прикладных задач.
2. Мягкое и жесткое моделирование.
3. Линейные математические модели.
4. Корректность по Адамару задач математической физики. Понятие корректности разностной схемы.
5. Простейшие нелинейные уравнения.
6. Качественный анализ дифференциальных уравнений.
7. Точки поворота
8. Надкритические и подкритические бифуркации
9. Бифуркация типа "обмен устойчивостью"
10. Резонансное возбуждение как способ управления сложными системами.
11. Грубость системы.
12. Локальный анализ и грубость динамических систем.
13. Лемма Адамара.
14. Простейшие катастрофы.
15. Индекс особой точки. Теорема Пуанкаре
16. Качественный анализ системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений.
17. Автоколебания. бифуркация Андронова – Хопфа.
18. Бифуркация Андронова – Хопфа в задачах гидродинамики.
19. Фракталы.
20. Канторово множество. Несчетность.
21. Хаусдорфова размерность.
22. Простейшие системы с дискретным временем
23. Динамический хаос
24. Простейшие нелинейные волны
25. Автоволновые процессы
26. Задача о распространении нервного импульса. Система Ходжкина –Хаксли.
27. Стационарные диссипативные структуры
28. Синергетика и концепция параметров порядка
29. Нестационарные диссипативные структуры

### Критерии оценки

Зачет проводится в устной форме по билетам: студент должен ответить на два вопроса. На подготовку ответа на каждый из них отводится 20 минут. При наличии заченного реферата на усмотрение преподавателя один из вопросов может быть снят. По теме вопроса преподаватель может дать одно практическое задание (на подготовку ответа отводится дополнительные 40 минут).

На зачете не разрешается пользоваться литературой, конспектами и иными вспомогательными средствами. В случае использования студентами подобной литературы преподаватель оставляет за собой право удалить студента с зачета, выставив ему неудовлетворительную оценку.

При оценке устных ответов студентов учитываются **следующие критерии**:

- Понимание и степень усвоения теории курса; Уровень знания фактического материала в объеме программы; Правильность формулировки основных понятий и закономерностей; Знание основных процессов изучаемой предметной области, глубина и полнота раскрытия вопроса.
- Стиль изложения ответа: владение монологической речью, логичность и последовательность ответа. Владение терминологическим аппаратом и использование его при ответе
- Умение связать теорию с практическим применением.
- Умение ответить на дополнительные вопросы

Оценка **зачтено** выставляется студенту, если в каждом из пунктов выполняется одно из условий:

Ответы на вопросы :

- На вопросы даны исчерпывающие ответы, которые показывают прочные знания основных процессов изучаемой предметной области. Изложение материала должно быть логически верно.
- На вопросы даны в целом верные ответы, но с отдельными неточностями, не носящими принципиального характера.
- Ответы, свидетельствуют в основном о знании процессов изучаемой предметной области, но отличаются недостаточной глубиной и полнотой раскрытия темы.

Стиль изложения ответа:

- Ответы изложены грамотным научным языком, все термины употреблены корректно, все понятия раскрыты верно. Изложение материала должно быть логически верно.
- Не все термины употреблены правильно, присутствуют отдельные некорректные утверждения и грамматические / стилистические погрешности изложения. Возможно незначительное нарушение логики изложения материала, периодическое использование разговорной лексики.
- Умение связать теорию с практическим применением.
- Ответы показывают умение связать теорию с практическим применением и умение делать обобщения и выводы.
- Ответы не проиллюстрированы примерами в должной мере.
- Студент должен выдать хотя бы идею выполнения практического задания (если оно есть)

Умение ответить на дополнительные вопросы:

- Студент отвечает на дополнительные вопросы
- Отвечает на большую часть дополнительных вопросов.

**Оценка незачтено** выставляется студенту, если:

Ответы на вопросы :

- Ответы на вопросы отсутствуют либо не соответствуют содержанию вопросов. Ключевые для учебного курса понятия, содержащиеся в вопросах, трактуются ошибочно. Полное незнание литературы и источников по теме вопроса.  
Стиль изложения ответа:
- Полное отсутствие логики изложения материала, постоянное использование разговорной лексики.  
Умение связать теорию с практическим применением.
- Ответы показывают неумение связать теорию с практическим применением и умение делать обобщения и выводы.
- Студент не выполнил практическое задание (если оно есть)  
Умение ответить на дополнительные вопросы:
- Отсутствие ответов на большинство дополнительно заданные вопросов.

## **2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

### **2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

*Пороговый уровень* - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

*Продвинутый уровень* - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

*Высокий уровень* - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.



**2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования**

Код компетенции	Форма контроля	Этапы формирования (№ темы (раздела))	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
<b>Общекультурные компетенции</b>						
ОК-1	Зачет	1-16	<p><b>Знать:</b> – методы синтеза и анализа, применяемые в нелинейной динамике</p> <p><b>Уметь:</b> – решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления в задачах нелинейной динамики</p> <p><b>Владеть навыками:</b> – методами анализа и синтеза</p>	<p>Удовлетворительное, но не систематическое знание методов анализа и синтеза, применяемых в механике и математическом моделировании</p> <p>В целом успешное, но не систематическое владение методами анализа и синтеза</p> <p>В целом успешное, но не систематическое использование умения решать задачи, требующие навыков</p>	<p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы знание методов анализа и синтеза, применяемых в механике и математическом моделировании</p> <p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы владение методами анализа и синтеза</p> <p>В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование умения решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления</p>	<p>Отличное знание методов анализа и синтеза, применяемых в механике и математическом моделировании.</p> <p>Вполне успешное владение методами анализа и синтеза.</p> <p>Сформированное умение решать задачи, требующие навыков абстрактного мышления</p>

				абстрактного мышления		
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>						
ОПК-3	Зачет	1-16	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные понятия синергетики: понятие открытых систем, самоорганизации вдали от равновесия, нелинейности моделей современного мира; понятие диссипативных структур: мягкого и жесткого моделирования; понятие иерархии моделей;</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных технологий;</li> </ul>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные понятия синергетики: понятие открытых систем, самоорганизации вдали от равновесия, нелинейности моделей современного мира; понятие диссипативных структур: мягкого и жесткого моделирования; понятие иерархии моделей;</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий;</li> </ul>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные понятия синергетики: понятие открытых систем, самоорганизации вдали от равновесия, нелинейности моделей современного мира; понятие диссипативных структур: мягкого и жесткого моделирования; понятие иерархии моделей;</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий;</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий;</li> </ul>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– основные понятия синергетики: понятие открытых систем, самоорганизации вдали от равновесия, нелинейности моделей современного мира; понятие диссипативных структур: мягкого и жесткого моделирования; понятие иерархии моделей;</li> </ul> <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий;</li> </ul> <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– использовать приобретенные знания в своей научной и преподавательской деятельности; вести библиографическую работу с привлечением современных информационных технологий;</li> </ul>

			информационных технологий; Владеть навыками: – навыками методологически грамотного осмысления конкретно-научных проблем.	Владеть навыками: навыками методологически грамотного осмысления конкретно-научных проблем.	конкретно-научных проблем.	
--	--	--	--	--	----------------------------	--

### **3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций**

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

#### **3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;

- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### **3.2 Описание процедуры выставления оценки**

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Непрерывные математические модели»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Непрерывные математические модели» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе преподаваемой дисциплины лежит особый математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка практических навыков решения задач.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы нелинейной динамики. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

В конце первого семестра изучения дисциплины студенты сдают зачет.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Непрерывные математические модели» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет по итогам изучения дисциплины студенту практически невозможно.

### **Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов по дисциплине**

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» ([www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (\*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://window.edu.ru/library>).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

1. Личный кабинет ([http://lib.uni-yar.ac.ru/opac/bk\\_login.php](http://lib.uni-yar.ac.ru/opac/bk_login.php)) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и

метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность» ([http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_bookreq\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php)) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.