

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

**А.И. Григорьев, А.В. Климов,
С.В. Черникова, А.В. Присяжнюк**

**Параметрические
и нелинейные волны
на заряженной
поверхности жидкости**

Ярославль 2007

УДК 532.595
ББК В 253.31
Г 83

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве научного издания. План 2007 года*

Рецензенты:

кафедра прикладной математики и вычислительной техники
Ярославского государственного технического университета;
д-р. физ.-мат. наук В.А. Коромыслов

Григорьев, А.И. Параметрические и нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости / А.И. Григорьев, А.В. Климов, С.В. Черникова, А.В. Присяжнюк ; Яросл. гос. ун-т. им. П.Г. Демидова. – Ярославль: ЯрГУ, 2007. – 170 с.
ISBN 978-5-8397-0572-2

В монографии в рамках аналитического асимптотического моделирования рассмотрены нелинейные капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности идеальной и вязкой несжимаемой жидкости в плоской и цилиндрической геометриях.

Монография издана при финансовой поддержке грантов РФФИ № 03-01-00760 и № 06-01-00066-а.

УДК 532.51
ББК В 253.322я73

© Ярославский
государственный
университет, 2007
© А.И. Григорьев,
А.В. Климов,
С.В. Черникова,
А.В. Присяжнюк, 2007

ISBN 978-5-8397-0572-2

Введение

В настоящей книге авторы хотят привлечь внимание читателя к коротковолновому диапазону капиллярно-гравитационных волн на заряженной поверхности жидкости, или, иными словами, к капиллярным волнам на заряженной поверхности жидкости. Результаты проводимых ниже расчетов применимы в весьма широком спектре академических, технических и технологических приложений, связанных с электродиспергированием электропроводной и диэлектрической жидкости [1 – 9], с теорией грозового электричества [10 – 11] и, в частности, с теорией огней св. Эльма (ОСЭ) [12 – 17], жидкометаллическими источниками ионов [4 – 5], а также с микро- и наноэлектроникой [18 – 19]. Для конкретизации нижеследующих рассуждений выберем конкретное приложение, в качестве которого возьмем огни св. Эльма, и будем проводить исследование параметрически возбуждаемых и нелинейных капиллярных волн, имея в виду возможный выход полученных результатов в трактовке физического механизма возникновения этого природного феномена. Как будет показано ниже, традиционные представления, связывающие огни св. Эльма с видимой частью мощного коронного (кистевоего) разряда, верны лишь отчасти. Но ознакомимся с фактами:

1. Июнь 1956 года. Район Южных Курильских островов.

Наблюдатель капитан 3-го ранга Хомяков А.В.

"В полночь я заступил вахтенным командиром на мостике корабля. По местным стандартам погода была хорошая: ветер 2 – 3 балла, облачность низкая, кучевая, видимость хорошая. Около часу ночи на мостике как-то посветлело, хотя ночь была безлунная. Стало так светло, что можно было различать отдельные предметы на палубе. И вдруг на металлических частях вант, на оттяжках стоячего такелажа, крепящего мачты, на тросах леерного ограждения и штыревых радиоантеннах появилось свечение. Началось оно с верхних частей и быстро спустилось по всему такелажу вниз. Через 2 – 3 минуты контуры антенн и такелажа засветились безжизненным белым светом, похожим на

свет неоновых реклам. На мостике стало так светло, что можно было читать. Я запросил механика и радиста о состоянии механизмов и радиоаппаратуры. Механик доложил, что все механизмы работают нормально, электросистемы в порядке. Из радиорубки сообщили, что из-за сильных помех не удастся установить связь с берегом. Через полчаса свечение стало ослабевать и погасло. Однако радиопомехи продолжались еще несколько часов. Ни грозы, ни дождя не было, ни в тот день, ни на следующий".

2. Июнь 1958 года, ледник Центрально Туюксуйский в Заилийском Алатау. Наблюдатели Денисова Т.Я., Егорова Н.Д., Конева Н.П.

"Мы, сотрудники Института географии АН КазССР, проводили метеорологические измерения на высоте 3500 – 4000 метров по программе МГГ. 23 июня погода испортилась: сильный ветер нес снежную крупу, сверкали молнии. В ночь на 16 июня, выйдя из домика для очередных измерений, мы увидели, что на всех выступающих предметах: метеоприборах, антеннах, сосульках, на крыше домов – появились желтовато-голубоватые языки холодного пламени. Это пламя появлялось и возле пальцев поднятых рук. На осадкомерах они достигали 10 сантиметров в длину. Одна из нас решила дотронуться карандашом до пламени на крючке градиентной штанги. Но в то же время произошел разряд – наверно, в штангу ударила молния. Нас ослепило и сбilo с ног. Когда мы поднялись, пламя исчезло. Но через четверть часа вновь появилось на прежних местах".

3. Июнь 1975 года. Северный берег Каспийского моря, Глагольская коса. Наблюдатель кандидат географических наук Герштанский Н.Д.

"Мы, сотрудники Астраханской гидрометеорологической обсерватории, поздно вечером возвращались с работы к урезу моря. Уже в почти полной темноте выбрались из зарослей тростника и пошли по мелководью к моторной лодке, оставленной в двух километрах от берега. Небо было покрыто грозowymi облаками. Где-то далеко на севере вспыхивали зарницы. Неожиданно волосы у всех нас засветились ярким фосфоресцирующим светом, образуя светящиеся ореолы вокруг голов. Сила свечения то возрастала, то снижалась. Язычки холодного пламени появлялись и возле пальцев

поднятых рук. Тогда мы подняли мерный шест, и его вершина за-светилась так ярко, что можно было прочесть бирку завода изготовителя. Все это длилось минут десять. Интересно, что ниже метра над поверхностью моря свечение не возникало".

4. Приморский край. Наблюдатель Алексеев В.Н.

"В июле 1960 года я вторым помощником капитана участвовал в перегоне теплохода "Двина" из порта Проведение в порт Находка. Мы проходили Беренгово море и находились между мысом Олюторским и Командорскими островами, когда я стал свидетелем странного и таинственного явления природы. Когда в два часа ночи я заступил на вахту, небо было покрыто черно-фиолетовыми облаками. Мы шли на буксире у парохода "Е. Пугачев". Длина буксира около 300 метров. Минут через 30 после начала вахты я вдруг увидел, что контуры мачт, вант и надстроек стали как-то необычно четко видны. Да и "Е. Пугачев" стал виден отчетливо. Еще через несколько минут на всех выступающих частях судна появилось свечение. А на клотиках мачт возникли как бы светящиеся кисточки. Вскоре вся поверхность судна по ребрам надстройки, фальшборту, вантам и острые углы всех предметов покрылись светящейся голубоватой бахромой. Особых звуков и запахов я не заметил. "Е.Пугачев" наблюдался как сплошное светящееся пятно. Все это длилось часа два с половиной".

5. 1978 год, г. Астрахань. Наблюдатель Василенко И.Г.

"Мы с отцом рыбачили на Каспии, когда нас застала гроза. В самый разгар грозы на верхушке мачты нашей лодки появился яркий огонек размером с крупное яйцо. Не зная, что это такое, отец попытался столкнуть этот огонек с мачты багром. Но как только он поднял багор, на его конце появился такой же огонь. Огонь горел на верхушке мачты пока гроза не кончилась. Но когда мы вернулись домой, оказалось, что мачта не обуглилась и даже не почернела".

В этих описаниях обращает на себя внимание факт, что огни св. Эльма появляются не возле заостренных электропроводных предметов: штыков и колючек и т.п., но возле поверхностей с большими радиусами кривизны. Коронный разряд в окрестности таких тел в лабораторных условиях создать весьма сложно, а то и невозможно.

6. Наблюдатель лоцман Вентспилского порта Вожзов В.Е.

"В начале шестидесятых годов я плавал на танкере "Бату-ми" Дальневосточного морского пароходства. Однажды мы шли в южной части Охотского моря в Петропавловск-Камчатский. Был пасмурный зимний вечер. Смеркалось. Небо было закрыто тяжелой слоисто-кучевой облачностью. Ветер 3-4 балла. Температура – 2 С. Я находился в рулевой рубке, отапливаемой паровыми батареями. Неожиданно в одной из батарей у порога рубки прорвало сальник, и в открытую дверь ударила струя пара. Образовавшееся облако закрыло дверной проем. В это время в дверях появился матрос. Его силуэт отчетливо был виден сквозь облако. На верхних кончиках его ушей засветилось голубоватое пламя в форме кисточек 2-3 сантиметра высотой. Я сказал ему об этом, протянул свою руку в облако пара, и на каждом пальце засветились голубые огоньки в 1,5 сантиметра длиной. Некоторое время мы забавлялись, входя в облако и выходя из него. Свечение возникало только в облаке пара и пропадало за его пределами. Потом пар перекрыли, облако рассеялось, и свечение больше не возникало".

Это описание огней св. Эльма прямо указывает на важную роль в их возникновении капель воды. Как показывает анализ собранных описаний ОСЭ, чаще всего очевидцы наблюдают это явление в пасмурную, дождливую, туманную погоду на влажных предметах. В конце семидесятых годов в научной печати появилось сообщение о любопытных экспериментах чл.-корр. АН СССР Б.В. Войцеховского [20]. С помощью несложной установки он создал в специальной камере облако одноименно заряженных капелек воды. При внесении в это облако заземленных предметов они начинали светиться. Светились и руки людей. Эти эксперименты, вполне убедительные с научной точки зрения и легко воспроизводимые, заставили задуматься над природой огней св. Эльма. Роль капель воды в их возникновении была очевидна, что подтверждалось также многочисленными сообщениями о появлении ОСЭ на самолетах при полетах в облаках, когда поверхность самолета покрыта водяной пленкой.

7. Наблюдатель Зайцев А.Г., штурман.

"Это было летом 1952 года над центральными районами Украины. Наш самолет "ТУ-4" совершал дневной маршрутный полет.

Мы со снижением проходили не грозовую облачность. За бортом потемнело, как-будто наступили сумерки. Вдруг мы увидели, как по передней кромке крыла заплясали светло – синие языки пламени высотой сантиметров 20. Их было так много, что крыло, казалось, горело по всему ребру. Минуты через три огни исчезли также неожиданно, как и появились, хотя из облачности мы еще не вышли".

8. Наблюдатель Сиренко П.Т.

"При полете на боевое задание ночью 25 августа 1944 года в районе Кишинева на высоте около 3000 метров, обходя грозовые облака, наш экипаж наблюдал следующее явление. Передние кромки плоскостей, выступающие части моторов, стволы пулеметов, трубка "Пито" светились белым пламенем, а именно были окаймлены неширокой непрерывной полосой белого цвета. Свечение длилось 10 – 15 минут. В тот вылет всему полку была дана радиограмма, возвратиться из-за погодных условий, но наш экипаж и два других самолета ее не приняли. Были сильные радиопомехи, возможно, связанные с появлением свечения".

9. Наблюдатель Усольцев Г.И.

"Самолет шел ночью в облаках на высоте 1500 – 2000 метров над западным побережьем Сахалина. В наушниках радиостанции были слышны сильные грозовые разряды. Переводя взгляд с приборной доски на остекление кабины, я увидел языки пламени бледно-лилового цвета длиной 25 сантиметров, шириной 3 – 4 сантиметра. Колеблясь, как флажки на ветру, они не спеша двигались от середины стекла к раме кабины и, достигая ее, исчезали. Винты были обрамлены бледно-лиловыми светящимися кругами шириной около десяти сантиметров. Когда свечение погасло, не знаю, мы подходили к месту посадки".

10. Наблюдатель Матвеев Б.А.

"Я работаю пилотом гражданской авиации, летаю на "АН-24", "АН-26". ОСЭ появляются на лобовом стекле пилотской кабины и на кончиках лопастей винтов при полете в слоистых облаках на высоте 5000 – 6000 метров. Они особенно красивы и представляют собой длинные языки пламени ночью. Обычно при появлении ОСЭ ухудшается работа радиостанции. Часто ОСЭ встречаются при полетах в районе Кавказа и на северных линиях".

11. Наблюдатель Могилин С.Н., штурман.

"В сентябре 1981 года наш экипаж совершал ночной рейс на высоте 9000 метров в 150 – 200 километрах к югу от Хабаровска. Над Хабаровском и южнее стояли фронтальные грозовые облака, которые мы видели на экране своих локаторов, и по возможности обходили наиболее мощные из них. Нас умеренно "болтало". И вдруг моя кабина вся озарилась голубым сиянием. Стало светло, как в сумерках. Голубой огонь покрыл остекленный нос нашего самолета. Пилоты видели, как голубые огоньки вспыхнули еще раза два, но ненадолго".

Согласно статистическому анализу описаний очевидцев появления огей св. Эльма в естественных условиях [13 – 17] ОСЭ чаще всего возникают на открытой местности. Причем в 69% случаев наблюдения ОСЭ отмечается наличие ветра, в 40% – сильного. Интересно отметить, что языки свечения ОСЭ не колеблются на ветру, даже когда он достигает скорости 20 м/с.

Характерным для условий наблюдения ОСЭ является то, что они всегда "привязаны" к какому либо предмету: вершине мачты, кресту церкви, пальцам поднятых рук и т.п. Не всегда эти предметы являются хорошими проводниками электричества, но в том случае, когда ОСЭ появляются на изоляторах: деревянных мачтах, веслах, пальцах рук, – эти предметы обычно покрыты каплями или пленкой воды. В 72% описаний ОСЭ, которые нам удалось собрать, отмечается повышенная влажность: туман, дождь, мокрый снег. В 52% описаний поверхность предмета, на котором появились ОСЭ, покрыта каплями либо пленкой воды.

Но вернемся к тематике настоящей книги. Существует возможность того, что появление ОСЭ связано с электростатической неустойчивостью заряженной поверхности водяной пленки или капель, покрывающей предмет, возле которого появляются ОСЭ [12 – 17]. Согласно классическим представлениям [21 – 23] электростатическая неустойчивость заряженной поверхности жидкости связана с потерей устойчивости волн (бегущих или стоячих) на поверхности жидкости. Исследованию устойчивости параметрических и нелинейных волн и посвящена настоящая книга.

Глава 1. Параметрические волны

1.1 Физико-математическая модель огней св. Эльма

Многие проблемы грозового электричества, например, такие, как механизм возникновения и длительного существования шаровой молнии, механизм зарождения и особенности роста канала разряда обычной молнии, свечение воронок смерчей, электрические разряды во время землетрясений, сильных взрывов и извержений вулканов, до настоящего времени до конца не разрешены. К числу малоисследованных феноменов, связанных с грозovým электричеством, относятся и огни св. Эльма (ОСЭ). Несмотря на то, что феномен ОСЭ изучается довольно давно, единой точки зрения на механизм зажигания ОСЭ по-прежнему не существует.

1. С конца XIX века, с началом исследований электрических разрядов в атмосфере на основе чисто визуального сходства, было принято считать огни св. Эльма мощной формой коронного разряда, реализующегося в предгрозовую и грозовую погоду в окрестности высоких заостренных предметов: крестов церквей, корабельных мачт и т.п.

Подобные утверждения вошли без какого-либо обоснования в учебники физики и энциклопедические словари. И только исследования Б.В. Войцеховского [20, 24], экспериментировавшего с облаками сильно заряженных капель воды и обнаружившего свечение типа ОСЭ на произвольных предметах, вносимых в такое облако, указали на неадекватность реальному явлению столь упрощенной трактовки и на важную роль в возникновении ОСЭ заряженных водяных капель. Это обстоятельство заставило пересмотреть сложившиеся представления об ОСЭ и внимательнее отнестись к описаниям их наблюдений в естественных условиях, поскольку именно они являются основным источником информации о феномене.

Внимательное изучение 220 описаний наблюдения ОСЭ в естественных условиях, собранных авторами настоящей работы, позволило выделить три формы этого феномена, различающихся как условиями, так и физическими механизмами возникновения.

1. Свечение с характерным линейным размером порядка сантиметров, возникающее на сухих заостренных металлических предметах: колючках проволочных ограждений, штыках винтовок, антеннах, – которое естественно связать с обычным коронным разрядом с металлического острия. Описания таких явлений встречались в 10% случаев. В особых комментариях эта форма ОСЭ не нуждается и может считаться хорошо изученной в связи с исследованием коронного разряда с металлического острия.

2. Свечение, возникающее во время влажных снежных метелей и зимних гроз на произвольных предметах при эмиссии заснеженной или покрытой инеем поверхности сильно заряженных микрокристаллов снега. Такая форма ОСЭ наблюдается в 8% описаний. Характерный линейный размер свечения ~ 10 см.

3. Свечение с характерным линейным размером до метра, возникающее в грозовую погоду на произвольных предметах при повышенной влажности (когда поверхность предмета покрыта каплями или пленкой воды), связанное с неустойчивостью поверхности воды в электрическом поле. Эта форма ОСЭ встречается в 82% описаний.

Характерным для наблюдения ОСЭ является то, что они всегда "привязаны" к какому-либо предмету: вершине мачты, антенне, кресту церкви, пальцам поднятых рук и т.п. Не всегда эти предметы являются хорошими проводниками электричества, но в том случае, когда ОСЭ появляются на изоляторах: деревянных мачтах, веслах, пальцах рук – эти предметы покрыты каплями или пленкой воды. В 72% описаний ОСЭ отмечается повышенная влажность: туман, дождь, мокрый снег. В 80% описаний ОСЭ наблюдаются в темное время суток, что свидетельствует об их малой яркости.

Из вышеперечисленных форм ОСЭ наибольший интерес представляет третья, наименее изученная. Вторая форма ОСЭ в смысле физического механизма возникновения свечения пред-

ставляет частный случай третьей, суть которой сводится согласно [12 – 14] к следующему.

В сильном электрическом поле грозовых облаков водяная пленка или капли воды, появляющиеся на различных предметах, могут в соответствии с классическими представлениями об электростатических неустойчивостях заряженной поверхности жидкости [7, 9, 21 – 23] стать неустойчивыми по отношению к индуцированному заряду, и с их поверхности начнется эмиссия высокодисперсных капелек, несущих запредельные в смысле критерия устойчивости заряды. Напряженность электрического поля собственного заряда в окрестности эмитированных капелек будет превышать необходимое для зажигания коронного разряда. Коронный разряд во влажной атмосфере в окрестности большого количества весьма мелких капелек, образовавшихся при реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости, будет восприниматься как появление голубого свечения у поверхности покрытого пленкой воды предмета, т.е. как ОСЭ.

Но для начала разряда необходимо наличие в области сильного поля, в ближайшей окрестности капельки, хотя бы одного свободного электрона. Свободные же электроны в приземном слое атмосферы возникают за счет естественной радиации с достаточно малой скоростью $\sim 10 \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ и за время $\sim 10^{-8} \text{ с}$ связываются с нейтральными атомами и молекулами, образуя отрицательные ионы. В результате вероятность столкновения капельки со свободным электроном и зажигания коронного разряда в ее окрестности весьма мала.

Однако известно [25], что в достаточно сильном электрическом поле $E_+ > 70 \text{ кВ/см}$ отрицательный ион распадается на нейтральный атом и свободный электрон. Количество же отрицательных ионов в кубическом сантиметре воздуха у земной поверхности в естественных условиях $\approx 500 - 800 \text{ см}^{-3}$, и вероятность столкновения капельки с отрицательным ионом с последующим распадом иона на нейтральный атом и свободный электрон будет на много порядков больше, чем вероятность ее столкновения со свободным электроном.

Примем для определенности, что маленькая капелька радиуса $r \approx 20 \text{ мкм}$ заряжена положительно столь большим зарядом, что

для нее выполнено условие реализации неустойчивости по отношению к собственному заряду. Тогда напряженность поля собственного заряда у ее поверхности $E \approx 400$ кВ/см. Электрон, появившийся за счет распада отрицательного иона вблизи капельки на расстоянии порядка нескольких радиусов от ее центра, даст начало электронной лавине, состоящей из $\sim 10^3$ электронов и направленной к капле. При развитии электронной лавины в ее следе остается большое количество возбужденных атомов, т.е. атомов один из электронов которых в результате столкновения со свободным электроном лавины перешел в возбужденное состояние на одну из внешних орбит. Время жизни возбужденного состояния атома t_* весьма мало ($t_* \approx 10^{-8}$ с), и по истечении интервала времени $\approx t_*$ электрон с внешней орбиты возвращается на свою стационарную орбиту, испуская при этом фотон. Такой фотон, будучи поглощен другим нейтральным атомом, может привести к его ионизации, т.е. к образованию положительного иона и свободного электрона (этот процесс называется фотоионизацией). Как показывают оценочные расчеты, число вторичных электронов, которые появятся в окрестности капельки в результате действия подобного механизма на расстоянии $\sim 10^{-2}$ см от ее центра, будет $\sim 10^2$ - 10^3 . При выбранных значениях величин заряд на капельке по абсолютной величине $\sim 10^7$ зарядов электрона. Для его нейтрализации потребуется $\sim 10^4$ лавин. Но так как одновременно могут существовать $\sim 10^2$ лавин, то время существования разряда в окрестности капельки $\tau_{\#}$ на два порядка больше характерного времени развития одной лавины, которое $\sim 10^{-7}$ с, т.е. $\tau_{\#} \sim 10^{-5}$ с. Таким образом, в течение времени $\tau_{\#}$ капелька будет светиться за счет горящего в ее окрестности коронного разряда. Свечение множества капелек и воспринимается как ОСЭ.

На капельку, эмитированную неустойчивой заряженной поверхностью жидкости, со стороны внешнего электрического поля E_0 будет действовать сила, равная произведению заряда капельки q на напряженность поля E_0 : $q \cdot E_0$. Под действием этой силы капелька будет ускоренно двигаться, удаляясь от породившей ее поверхности жидкости. Характерный линейный размер ОСЭ определится расстоянием, на которое капелька улетит до завершения коронного разряда в ее окрестности. Но, чтобы найти это

расстояние, необходимо учесть, что коронный разряд зажигается у поверхности капельки не сразу, как только она образуется, а только после того, как в ближайшей окрестности капельки появится свободный электрон или отрицательный ион. Значит, для оценки характерного линейного размера ОСЭ кроме характерного времени $\tau_{\#}$ необходимо учесть и время задержки начала разряда τ_0 .

Время τ_0 определится вероятностью столкновения капельки с отрицательным ионом. Как показывают численные оценки, $\tau_0 \gg \tau_{\#}$ и характерный линейный размер области свечения ОСЭ будет порядка расстояния, которое пройдет дочерняя капля в внешнем поле E_0 до столкновения с отрицательным ионом (до зажигания коронного разряда в ее окрестности).

Время от начала движения дочерней капельки до столкновения с отрицательным ионом, т.е. время задержки начала разряда τ_0 , определится соотношением

$$\tau_0 \approx (n \cdot s \cdot v)^{-1}, \quad (1)$$

где n – концентрация отрицательных ионов, v – скорость движения капельки в момент столкновения с ионом, s – сечение столкновения капельки с ионом: $s = \pi R^2$, где R – расстояние от центра капельки, на котором согласно вышесказанному электрическое поле ее заряда q способно оторвать электрон от отрицательного иона. В (1) выражение в круглых скобках характеризует количество отрицательных ионов внутри прямого кругового цилиндра радиусом R и длиной, равной расстоянию, проходимому каплей за секунду вдоль траектории ее движения в E_0 . Обратная к $(n \cdot s \cdot v)$ величина как раз и определит время от начала движения дочерней капельки до столкновения с отрицательным ионом.

Оценим скорость движения заряженной капельки в момент ее столкновения с отрицательным ионом по формуле $v \approx a \cdot \tau_0$, подставим это соотношение в (1) и найдем

$$\tau_0 \approx (n \cdot s \cdot a)^{-1/2}.$$

Следовательно, расстояние l , на которое капелька улетает за это время, двигаясь с ускорением a , можно найти по формуле

$$l = \frac{a\tau_0^2}{2} = \frac{1}{2ns}.$$

Чтобы определить характерный линейный размер ОСЭ выразим сечение столкновения капельки с ионом s через характеристики капельки и напряженность электрического поля E_+ , в котором ион распадается на электрон и нейтральный атом.

Как уже говорилось, при атмосферном давлении отрицательный ион распадается на электрон и нейтральный атом при попадании в поле напряженностью $E_+ \geq 70 \text{ кВ/см}$. Такое поле существует вокруг дочерней капельки, несущей заряд порядка предельного в смысле критерия устойчивости, т.е. $q \approx (16\pi\sigma r^3)^{1/2}$, на расстоянии $R \leq \sqrt[4]{E_+^{-2} 8\pi\sigma r^3}$ от ее центра, и радиус сечения столкновения капельки с отрицательным ионом будет иметь вид

$$R \leq E_+^{-1} \sqrt{8\pi^3 \sigma r^3} \quad (2)$$

Теперь можно найти расстояние, которое капелька пройдет за время τ_0 :

$$l = E_+ \left(2\pi n \sqrt{8\pi\sigma r^3} \right)^{-1}. \quad (3)$$

При $r = 20 \text{ мкм}$, $n = 800 \text{ см}^{-3}$, $\sigma = 70 \text{ дин/см}$ легко получить $l \approx 20 \text{ см}$. Из (3) видно, что характерное расстояние l , которое проходит капелька до столкновения с ионом, когда появляется свободный электрон, сильно зависит от радиуса капли. Уже при $r = 10 \text{ мкм}$ получим $l \approx 60 \text{ см}$.

Из (3) видно, что характерный линейный размер свечения ОСЭ обратно пропорционален концентрации отрицательно заряженных ионов в объеме, занятом ОСЭ. Выше полученная численная оценка на максимальное значение характерного линейного размера ОСЭ $l \leq 1 \text{ м}$ справедлива лишь при $n = 800 \text{ см}^{-3}$. Естественно ожидать, что при зажигании ОСЭ в их окрестности концентрация отрицательных ионов будет увеличиваться. В са-

мом деле, согласно вышесказанному в окрестности объема, занятого ОСЭ, идут интенсивные процессы фотоионизации воздуха [25]. Образовавшиеся при этих фотоионизационных актах электроны прилипают к нейтральным атомам, образуя отрицательные ионы. В итоге их концентрация в объеме ОСЭ увеличивается, а характерный линейный размер l уменьшается $\propto n^{-1}$. Поэтому наиболее часто упоминаемые наблюдателями значения l соответствуют всего нескольким сантиметрам (в 62% описаний $l \leq 5$ см).

1.2. Действие электростатических неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца на заряженную границу двух сред

Наибольшие линейные размеры и яркость ОСЭ имеют в ветреную (штормовую) погоду. Это обстоятельство позволяет предположить, что наличие ветра создает более благоприятные условия для появления ОСЭ и что определенную роль в этом играет неустойчивость Кельвина – Гельмгольца – неустойчивость границы раздела двух несмешивающихся жидкостей, по которой проходит тангенциальный разрыв поля скоростей. В этой связи представляется целесообразным рассмотреть комбинацию задачи Тонкса – Френкеля с задачей Кельвина – Гельмгольца, например, в том виде, как они изложены в [26 – 27] соответственно, но в более общей постановке, когда скорость потока воздуха над заряженной поверхностью жидкости является произвольной функцией времени, на которую наложим лишь одно ограничение: ее квадрат должен разлагаться в ряд Фурье. Имея в виду лишь исследование критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности воды, над которой имеется параллельный границе раздела поток воздуха, ограничимся рассмотрением случая невязкой жидкости.

Вышесказанное прекрасно объясняет образование ОСЭ. Однако для образования ОСЭ необходимы очень большие напряженности электрического поля, которые в природе существовать не могут.

В связи с этим будем решать задачу об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся идеальных жидко-

стей различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с переменной во времени скоростью $U=U(t)$ параллельно заряженной с постоянной поверхностной плотностью заряда границе раздела сред.

Пусть потенциалы полей скоростей движения верхней и нижней жидкостей есть $\Psi_1(\mathbf{r},t)$ и $\Psi_2(\mathbf{r},t)$ соответственно. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных волн в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела сред, а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести, имеет вид

$$\Delta\Psi_i = 0; \quad i=1,2 \quad (1)$$

$\Delta\Psi_1 = 0$ – относится к верхней жидкости,

$\Delta\Psi_2 = 0$ – относиться к нижней жидкости.

Представим потенциал скоростей волнового движения жидкостей в виде

$$\text{верхней жидкости } \Psi_1 = \Psi_{01} + \Psi_{11}, \quad (2)$$

$$\text{нижней жидкости } \Psi_2 = \Psi_{02} + \Psi_{12}. \quad (3)$$

Подставив выражения (2), (3) в (1), получим уравнение Лапласа, разбитое на порядки малости

$$\Delta\Psi_{01} + \Delta\Psi_{11} = 0, \quad (4)$$

$$\Delta\Psi_{02} + \Delta\Psi_{12} = 0. \quad (5)$$

Решим поставленную задачу в нулевом приближении

$$\Delta\Psi_{01} = 0,$$

$$\Delta\Psi_{02} = 0.$$

Поскольку движение стационарно (зависит только от x), то

$$\frac{\partial^2 \Psi_{01}}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 \Psi_{02}}{\partial x^2} = 0;$$

$$\Psi_{01} = A_{01}x + B; \quad \Psi_{02} = A_{02}x + B.$$

Из относительности выбора потенциала следует, что

$$\Psi_{01} = A_{01}x; \quad \Psi_{02} = A_{02}x.$$

Из начальных условий имеем

$$\text{grad} \Psi_{01} = \text{grad} (A_{01}x) = U \Rightarrow A_{01} = U \Rightarrow \Psi_{01} = Ux,$$

$$\text{grad} \Psi_{02} = 0 \Rightarrow \Psi_{02} = 0; \quad A = 0.$$

Тогда

$$\Psi_1 = Ux + \Psi_{11}; \tag{6}$$

$$\Psi_2 = \Psi_{12} \tag{7}$$

Поскольку движение потенциально, то

$$\text{divgrad} \Psi = 0; \tag{8}$$

$$\Delta \Psi_{11} = 0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi_{11}}{\partial z^2} = 0. \tag{10}$$

Применим подстановку $\Psi_{11} = V(x)U(z)$, тогда выражение (10) примет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} [V(x)U(z)] + \frac{\partial^2}{\partial z^2} [V(x)U(z)] = 0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{V} \frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{1}{U} \frac{d^2 U}{dz^2} = 0, \quad (12)$$

Разбивая уравнение (12) на два уравнения и приравнявая их к нулю, найдем их решения:

$$V = C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx}; \quad U = C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}. \quad (13)$$

Тогда

$$\Psi_{11} = (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx})(C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}). \quad (14)$$

Исходя из того, что ищем решения гармонические по времени имеем

$$\begin{aligned} \Psi_{11} &= (C_1 e^{ikx} + C_2 e^{-ikx})(C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}) e^{i\omega t}; \\ \Psi_{11} &= (C_1 e^{i(kx+\omega t)} + C_2 e^{-i(kx-\omega t)})(C_3 e^{kz} + C_4 e^{-kz}). \end{aligned}$$

Из условия существования колебаний только вблизи поверхности для нижней жидкости $C_4 = 0$, для верхней жидкости $C_3 = 0$:

$$\Psi_{11} = (C_1 e^{i(kx+\omega t)} + C_2 e^{-i(kx-\omega t)}) C_3 e^{kz};$$

$$\Psi_{12} = (C_1 e^{i(kx+\omega t)} + C_2 e^{-i(kx-\omega t)}) C_4 e^{-kz}.$$

Будем рассматривать вещественную часть решения. Видим, что решение описывает распространение в противоположные стороны двух одинаковых волн. Рассмотрим одну из них:

$$\operatorname{Re} \Psi_{11} = C_2 \cos(kx - \omega t) C_3 e^{kz};$$

$$\operatorname{Re} \Psi_{12} = C_2 \cos(kx - \omega t) C_4 e^{-kz}$$

или

$$\Psi_{11} = A \cos(kx - \omega t) e^{kz}; \quad A = C_2 C_3. \quad (15)$$

$$\Psi_{12} = B \cos(kx - \omega t) e^{-kz}; \quad B = C_2 C_4. \quad (16)$$

Подставив выражения (15) в (6), (16) в (7) получим выражения потенциалов скоростей волнового движения верхней и нижней жидкости соответственно:

$$\Psi_1 = Ux + A e^{kz} \cos(kx - \omega t); \quad (17)$$

$$\Psi_2 = B e^{-kz} \cos(kx - \omega t). \quad (18)$$

Для решения поставленной задачи необходимы кинематическое и динамическое граничные условия.

Выведем кинематическое граничное условие. Смысл этого условия заключается в том, что точка, лежащая на границе раздела, никуда с этой поверхности не перемещается. В случае малых колебаний границы раздела кинематическое граничное условие может быть сведено к условию, при котором нормальная составляющая вектора скорости на поверхности раздела совпадает со скоростью перемещения этой поверхности в направлении своей нормали. Иными словами, полная производная по времени t от функции, описывающей уравнение границы раздела ($F(\mathbf{r}; t) = 0$), должна обращаться в ноль – кинематическое граничное условие:

$$\frac{dF}{dt} = 0; \quad (19)$$

$$F(\mathbf{r}; t) = z - \xi; \quad \xi = (x, t). \quad (20)$$

Подставим (20) в уравнение (19):

$$\frac{d}{dt} [z - \xi(x, t)] = 0;$$

$$\frac{d}{dt} [z - \xi(x, t)] = \frac{dz}{dt} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Тогда после несложных преобразований получим следующее выражение:

$$\frac{dz}{dt} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} - \frac{\partial \xi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Для нижней жидкости производная ($dx/dt = 0$) в силу того, что по условию задачи нижняя жидкость неподвижна, тогда

$$\frac{dz}{dt} = v_{2z} = \frac{\partial \Psi_2}{\partial z}; \quad \frac{dx}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\Psi_2}{dz} = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (21)$$

Для верхней жидкости производная ($dx/dt \neq 0$) равна скорости движения частиц верхней жидкости, тогда

$$\frac{dz}{dt} = v_{1z} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z}; \quad \frac{dx}{dt} = U,$$

$$\frac{d\Psi_1}{dz} = U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (22)$$

В силу того что разность давлений с обеих сторон жидкости не равна нулю, формула Лапласа примет вид

$$P_2 - P_1 = -\alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (23)$$

где P_2 – давление в нижней жидкости вблизи границы, P_1 – давление верхней жидкости. Запишем уравнение Навье-Стокса

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} + \mathbf{g}. \quad (24)$$

Если раскрыть по правилам векторного анализа произведение $(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}$, то уравнение (24) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - [\mathbf{v} \nabla \text{rot} \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho_1} \text{grad} P + \mathbf{g} \quad (25)$$

и, подставив в него $\mathbf{v} = \text{grad} \Psi_1$, уравнение (25) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \Psi_1 + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - [\mathbf{v} \nabla \text{rot} \mathbf{v}] = -\frac{1}{\rho_1} \text{grad} P_1 + \text{grad} (gz). \quad (26)$$

Так как движение потенциально, то $\text{rot} \mathbf{v} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} \nabla \text{rot} \mathbf{v} = 0$, и (26) преобразуется к виду:

$$\text{grad} \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 + \frac{1}{\rho_1} \text{grad} P_1 + \text{grad} (gz) = 0 \quad (27)$$

Вынесем grad за скобку, тогда

$$\begin{aligned} \text{grad} \left[\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho_1} P_1 + gz \right] &= 0, \\ \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho_1} P_1 + gz &= c + f(x). \end{aligned}$$

Пользуясь произвольностью выбора потенциала, запишем

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{\rho_1} P_1 + gz = 0,$$

откуда можно получить выражение для давления верхней жидкости:

$$P_1 = -\rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} v^2 \rho_1 - \rho_1 gz = 0, \quad (28)$$

где P_1 – давление верхней жидкости.

Давление нижней жидкости P_2 есть сумма давлений электрического поля и давления под искривленной поверхностью.

Найдем давление электрического поля, обусловленного тем, что граница раздела сред имеет поверхностную плотность заряда σ , давление электрического поля $P_{el} = -4\pi\sigma^2\xi$. Ввиду того что скорость нижней жидкости равна $v^2 = 0$, выражение (27) примет вид

$$\text{grad} \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} \text{grad} P_2 + \text{grad}(gz) = 0$$

вынося соотношение за скобку

$$\text{grad} \left[\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} P_2 + gz \right] = 0,$$

можно с помощью несложных преобразований получить выражение для давления нижней жидкости:

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \frac{1}{\rho_2} P_2 + gz = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + gz = -\frac{1}{\rho_2} P_2 \Rightarrow$$

$$P_2 = -\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} \rho_2 - \rho_2 gz - 4\pi\sigma^2\xi, \quad (29)$$

где P_2 – давление нижней жидкости.

Подставим выражения (28) и (29) в формулу Лапласа (23); т.к. $v^2 = [\text{grad} \Psi_1]^2$ есть величина второго порядка малости, то можно записать $v^2 = [v_1^2 - U^2]$ или $[(\nabla \Psi_1)^2 - U^2]$. На границе раздела $z=0$, а ξ – отклонение по z , тогда $rgz = rg\xi$. Таким образом, окончательное выражение, описывающее динамическое граничное условие, выглядит следующим образом:

$$-\rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2} [(\nabla \Psi_1)^2 - U^2] \rho_1 - \rho_1 g\xi = \rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \rho_2 g\xi + 4\pi\sigma^2\xi - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (30)$$

Зададимся теперь целью вывести дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию (в результате действия давления электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей на границе раздела сред) амплитуд фиксированных мод тепловых капиллярных волн.

Подставим в кинематическое граничное условие (21) и (22) выражения для потенциалов поля скоростей (17), (18):

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = A e^{kz} k \cos(kx - \omega t);$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial z} = -B e^{-kz} k \cos(kx - \omega t);$$

$$; \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = x \frac{\partial U}{\partial t} + A e^{kz} \omega \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -B e^{-kz} \omega \sin(kx - \omega t);$$

$$A e^{kz} k \cos(kx - \omega t) = U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad (31)$$

$$-B e^{-kz} \omega \sin(kx - \omega t) = \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (32)$$

Определим неизвестные коэффициенты A и B в выражениях (31) и (32):

$$A = \frac{U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}}{e^{kz} k \cos(kx - \omega t)}; \quad -B = \frac{\frac{\partial \xi}{\partial t}}{e^{-kz} \omega \sin(kx - \omega t)}.$$

Следовательно, выражения для потенциалов поля скоростей (17) и (18) приобретает вид

$$\Psi_1 = Ux + \frac{1}{k} \left[U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right], \quad (33)$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial t} \quad (34)$$

Учтем теперь, что возмущение границы раздела, связанное с капиллярным волновым движением, должно иметь периодический вид:

$$\xi \propto \exp(ikx). \quad (35)$$

Подставив (35) в (33), найдем

$$\Psi_1 = Ux + \frac{1}{k} \left[ikU\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right]; \quad (36)$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial t}. \quad (37)$$

где i – мнимая единица.

Подставим выражения (36) и (37) в динамическое граничное условие (30), учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = i^2 k^2 \xi; \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = x \frac{\partial U}{\partial t} + i\xi \frac{\partial U}{\partial t} + iU \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2};$$

$$(\nabla \Psi_1)^2 = -2U^2 k \xi + 2Ui \frac{\partial \xi}{\partial t},$$

и в линейном по ξ приближении запишем уравнение

$$\frac{1}{k} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} (\rho_1 + \rho_2) + 2\rho_1 U i \frac{\partial \xi}{\partial t} + \rho_1 i \xi \frac{\partial U}{\partial t} + \left[g(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 U^2 k - 4\pi\sigma^2 k + \alpha k^2 \right] \xi = 0.$$

Умножив полученное выше уравнение на $k/(\rho_1 + \rho_2)$, получим искомое дифференциальное уравнение, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн, в виде:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + 2k\rho U i \frac{\partial \xi}{\partial t} + k\rho i \frac{\partial U}{\partial t} \xi +$$

$$+ \frac{k}{(\rho_1 + \rho_2)} \left[g(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 U^2 k - 4\pi\sigma^2 k + \alpha k^2 \right] \xi = 0; \quad \rho = \frac{\rho_1}{(\rho_1 + \rho_2)}. \quad (38)$$

При $U(t) = U_0 = \text{const}$ уравнение (38) становится обыкновенным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами, описывающим временную эволюцию амплитуд капиллярных волн при реализации неустойчивости Кельвина – Гельмгольца и Тонкса – Френкеля, и имеет решение

$$\xi = \xi_0 \operatorname{Re} \left\{ \exp \left[ik\rho U_0 t + itF^{1/2}(k) \right] \right\};$$

$$F(k) \equiv F(k, \alpha, \sigma, U_0, g, \rho_1, \rho_2) \equiv \frac{k}{(\rho_1 + \rho_2)} \left[g(\rho_1 - \rho_2) - \rho_1 U^2 k - 4\pi\sigma^2 k + \alpha k^2 \right] \xi. \quad (39)$$

Критические условия наступления обеих упомянутых неустойчивостей определяются из требования прохождения функции $F(k)$ через ноль и могут быть получены путем стандартного исследования.

Для конкретизации дальнейшего исследования зададимся определенным видом зависимости скорости верхней среды от времени, принимая

$$U = U_0 + \sum_{j=1}^m U_{*j} \cos \omega_{0j} t. \quad (40)$$

Подставляя (40) в (38), получим для характеристики временной эволюции амплитуд капиллярных волн в описанной системе дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Для отыскания его решений произведем замену искомой переменной:

$$\xi = \zeta \cdot \exp[i\Phi(t)], \quad (41)$$

$$\Phi = -k\rho \left[U_0 t + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\omega_{0j}} U_{*j} \sin \omega_{0j} t \right], \quad (42)$$

$$\xi = \zeta \exp \left\{ -ik\rho \left[U_0 t + \sum_{j=1}^m \frac{1}{\omega_{0j}} U_{*j} \sin \omega_{0j} t \right] \right\}. \quad (43)$$

В итоге (38) приводится к виду

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + F(k)\zeta - D(k)\zeta \cos(\omega_{0j}t) + L(k)\zeta \cos^2(\omega_{0j}t) = 0, \quad (44)$$

$$D(k) = D(k, U_0, U_{*j}, \rho_1, \rho_2) \equiv 2k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} U_0 U_{*j}, \quad (45)$$

$$L(k) = L(k, U_{*j}, \rho_1, \rho_2) \equiv k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} U_{*j}. \quad (46)$$

Получившееся уравнение с зависящими от времени коэффициентами при произвольных, отличных от нуля, U_0 и U_{*j} является уравнением Хилла, которое в зависимости от соотношения коэффициентов F , D , L и частоты ω_{0j} может иметь либо параметрически устойчивые, либо параметрически неустойчивые, экспоненциально нарастающие со временем решения. В использованном приближении идеальной жидкости параметрическая неустойчивость реализуется при сколь угодно малой амплитуде переменной компоненты скорости U_{*j} . Для реальной жидкости раскачка параметрической неустойчивости начнется с некоторого порогового значения U_{*j} , величина которого будет зависеть от длины капиллярной волны и вязкостей сред.

В частном случае, когда $U_{*j} = U_*$, уравнение (44) можно привести к известному уравнению Матье-Хилла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta F(k) - \zeta 2k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} U_0 \sum_{j=1}^m U_{*j} \cos(\omega_{0j} t) + \\ + \zeta k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \sum_{j=1}^m U_{*j}^2 \cos^2(\omega_{0j} t) = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Воспользовавшись известным тригонометрическим тождеством

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha),$$

уравнение (47) можно переписать в более простом виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta F(k) - \zeta 2k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} U_0 \sum_{j=1}^m U_{*j} \cos(\omega_{0j} t) + \\ + \frac{1}{2} \zeta k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \sum_{j=1}^m U_{*j} + \frac{1}{2} \zeta k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_1 + \rho_2)} \sum_{j=1}^m U_{*j}^2 \cos 2(\omega_{0j} t) = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Если U_{*j} одинаково для всех частей спектра, то U_{*j} можно вынести за знак суммы. Тогда (48) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta F(k) - \zeta D(k) \sum_{j=1}^m \cos(\omega_{0j} t) + \zeta \frac{1}{2} L(k) + \zeta \frac{1}{2} L(k) \sum_{j=1}^m \cos 2(\omega_{0j} t) = 0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta [F(k) + 0,5L(k)] \left[1 - \frac{D(k)}{[F(k) + 0,5L(k)]} \sum_{j=1}^m \cos(\omega_{0j} t) + \right. \\ \left. \frac{0,5L(k)}{[F(k) + 0,5L(k)]} \sum_{j=1}^m \cos 2(\omega_{0j} t) \right] = 0. \end{aligned} \quad (49)$$

Если в уравнение (49) положить

$$\omega_{0j}t = jt; \quad \zeta = \mu; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\omega_{0j}^2}{j^2} \frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2}; \quad D(k) = L(k) \frac{U_0}{U_*};$$

$$[F(k) + 0,5L(k)] = \frac{\omega_{0j}^2}{j^2} \delta; \quad L(k) = \frac{4\varepsilon \omega_0^2}{j^2},$$

то (49) можно записать в новых обозначениях:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + \left[\delta + 2\varepsilon \sum_{j=1}^m \cos 2(jt) \right] \mu - 2\mu \sum_{j=1}^m \varepsilon \lambda \cos 2(jt) = 0; \quad (50)$$

где $\lambda = 4U_0/U_*$.

Если в уравнении (50) в выражении $2\varepsilon \sum_{j=1}^m \cos 2(jt)$ ограничить ряд первым членом, тогда уравнение (50) примет вид

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos 2t] \mu - 2\mu \sum_{j=1}^m \varepsilon \lambda_i \cos 2(jt) = 0; \quad (51)$$

ε – малый параметр, по которому проводилось разложение уравнения (51) с сохранением слагаемых вплоть до четвертого порядка малости. Параметр δ характеризует частоту капиллярных колебаний. Уравнение (51) представляет собой модифицированное уравнение Матье-Хилла и в зависимости от соотношения величин коэффициентов δ , ε , и λ может иметь либо параметрически устойчивые, либо параметрически неустойчивые, экспоненциально нарастающие со временем решения. В частном случае $U_0 = 0$ ($\lambda = 0$) уравнение (51) переходит в уравнение Матье. Границы устойчивых и неустойчивых решений на плоскости безразмерных параметров $(0\delta\varepsilon)$ являются собственными функциями уравнения (51). Даже в частном случае, когда (51) сводится к обычному уравнению Матье, эти функции не выражаются через элементарные и известны, как функции Матье: $Ce_n(\varepsilon, t)$, $Se_n(\varepsilon, t)$.

Применяя к уравнению (51) стандартную процедуру разложения по малому параметру ε , методом растянутых параметров

можно получить собственные функции уравнения (51), а также рассчитать их для каждой отдельно выбранной гармонике из суммы в последнем слагаемом (51).

Положим в уравнении (51) $m=4$, параметр λ_i , входящий в уравнение (51), – безразмерный параметр, числовое значение которого может быть положительным, отрицательным или равным нулю, параметр $\varepsilon \ll 1$.

Используя метод растянутых параметров, получим собственные значения функций $Ce_n(\varepsilon, t)$ и $Se_n(\varepsilon, t)$, определяющие переходные кривые, делящие плоскость $\delta - \varepsilon$ на области устойчивых и неустойчивых решений уравнения (51). Для этого запишем равномерно пригодное разложение в виде

$$\xi(t, \varepsilon) = \xi_0(t) + \xi_1(t)\varepsilon + \xi_2(t)\varepsilon^2 + \xi_3(t)\varepsilon^3 + \xi_4(t)\varepsilon^4 + \dots,$$

$$\delta = n^2 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \delta_3\varepsilon^3 + \delta_4\varepsilon^4 + \dots \quad (52)$$

Подставляя выражение (52) в (51) и приравнявая нулю коэффициенты при последовательных степенях ε , получаем систему дифференциальных уравнений вида:

$$\varepsilon^0: \ddot{\xi}_0 + \xi_0 n^2 = 0;$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^1: \ddot{\xi}_1 + \xi_1 n^2 = & -\xi_0 \delta_1 - 2\xi_0 \cos(2t) + 2\mu_1 \xi_0 \cos(t) + 2\mu_2 \xi_0 \cos(2t) + \\ & + 2\mu_3 \xi_0 \cos(3t) + 2\mu_4 \xi_0 \cos(4t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^2: \ddot{\xi}_2 + \xi_2 n^2 = & -\xi_0 \delta_2 - \xi_1 \delta_1 - 2\xi_1 \cos(2t) + 2\mu_1 \xi_1 \cos(t) + 2\mu_2 \xi_1 \cos(2t) + \\ & + 2\mu_3 \xi_1 \cos(3t) + 2\mu_4 \xi_1 \cos(4t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^3: \ddot{\xi}_3 + \xi_3 n^2 = & -\xi_0 \delta_3 - \xi_1 \delta_2 - \xi_2 \delta_1 - 2\xi_2 \cos(2t) + 2\mu_1 \xi_2 \cos(t) + 2\mu_2 \xi_2 \cos(2t) + \\ & + 2\mu_3 \xi_2 \cos(3t) + 2\mu_4 \xi_2 \cos(4t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^4: \quad \xi_4 + \xi_4 n^2 = & -\xi_0 \delta_4 - \xi_1 \delta_3 - \xi_2 \delta_2 - \xi_3 \delta_1 - 2\xi_3 \cos(2t) + 2\mu_1 \xi_3 \cos(t) + \\ & + 2\mu_2 \xi_3 \cos(2t) + 2\mu_3 \xi_3 \cos(3t) + 2\mu_4 \xi_3 \cos(4t). \end{aligned} \quad (53)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (53) даст искомые собственные значения функций $Ce_n(\varepsilon, t)$ и $Se_n(\varepsilon, t)$, описывающих характеристические кривые, которые являются границами областей устойчивых и неустойчивых решений уравнения (51).

Общее решение уравнения нулевого порядка в системе (53), можно записать в следующем виде:

$$\xi_0 = \cos(nt) + \sin(nt). \quad (54)$$

Из выражения (54) ясно, что функция ξ_0 является периодической с периодом π , если n четно, и с периодом 2π , если n нечетно.

Обозначим собственные значения функций $Ce_n(\varepsilon, t)$ и $Se_n(\varepsilon, t)$ соответственно a_n и b_n , тогда запишем высшие приближения в случаях $n = 0, 1$ и 2 :

$$\begin{aligned} a_0 = & \left[-\frac{1}{2} - 2\mu_1^2 + \mu_2 - \frac{\mu_2^2}{2} - \frac{\mu_3^2}{9} - \frac{\mu_4^2}{8} \right] \varepsilon^2 + \left[-3\mu_1^2 + 3\mu_1^2 \mu_2 - \frac{14\mu_1 \mu_3}{9} + \frac{14\mu_1 \mu_2 \mu_3}{9} + \right. \\ & + \frac{3\mu_4}{16} - \frac{3\mu_2 \mu_4}{8} + \frac{3\mu_2^2 \mu_4}{16} + \frac{13\mu_1 \mu_3 \mu_4}{18} \left. \right] \varepsilon^3 + \left[\frac{7}{128} - \frac{20\mu_1^2}{9} + \frac{7\mu_1^4}{2} - \frac{7\mu_2}{32} + \frac{40\mu_1^2 \mu_2}{9} + \right. \\ & + \frac{21\mu_2^2}{64} + \frac{20\mu_1^2 \mu_2^2}{9} - \frac{7\mu_2^3}{32} + \frac{7\mu_2^4}{128} - \frac{15\mu_1 \mu_3}{8} - \frac{10\mu_1^3 \mu_3}{9} + \frac{15\mu_1 \mu_2 \mu_3}{4} - \frac{15\mu_1 \mu_2^2 \mu_3}{4} - \frac{15\mu_3^2}{225} - \\ & - \frac{5\mu_1^2 \mu_3^2}{18} + \frac{104\mu_3^2 \mu_2}{225} - \frac{52\mu_2^2 \mu_3^2}{225} + \frac{7\mu_3^4}{1458} + \frac{65\mu_1^2 \mu_4}{72} - \frac{65\mu_1^2 \mu_2 \mu_4}{72} + \frac{383\mu_1 \mu_3 \mu_4}{300} - \\ & - \frac{383\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}{300} + \frac{55\mu_3^2 \mu_4}{216} - \frac{55\mu_2 \mu_3^2 \mu_4}{216} - \frac{5\mu_4^2}{144} - \frac{17\mu_1^2 \mu_4^2}{225} + \frac{5\mu_4^2 \mu_2}{72} - \frac{5\mu_2^2 \mu_4^2}{144} - \end{aligned}$$

$$\left. -\frac{25\mu_3^2\mu_4^2}{441} + \frac{7\mu_4^4}{8192} \right] \varepsilon^4; \quad (55)$$

$$\begin{aligned} a_1 = & 1 + [-1 + \mu_2] \varepsilon + \left[-\frac{1}{8} + \frac{5\mu_1^2}{3} + \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_2^2}{8} - \frac{2\mu_1\mu_3}{3} - \frac{2\mu_3^2}{5} + \frac{\mu_4}{4} - \frac{2\mu_2\mu_4}{4} - \frac{2\mu_4^2}{6} \right] \varepsilon^2 + \\ & + \left[\frac{1}{64} - \frac{121\mu_1^2}{36} - \frac{3\mu_2}{64} - \frac{121\mu_1^2\mu_2}{36} + \frac{3\mu_2^2}{64} - \frac{\mu_2^3}{64} + \frac{86\mu_1\mu_3}{45} - \frac{86\mu_1\mu_2\mu_3}{45} + \frac{16\mu_3^2}{225} - \frac{16\mu_3^2\mu_2}{225} - \right. \\ & \left. - \frac{\mu_4}{48} + \frac{7\mu_1^2\mu_4}{36} + \frac{\mu_2\mu_4}{24} - \frac{\mu_2^2\mu_4}{48} - \frac{37\mu_1\mu_3\mu_4}{90} + \frac{5\mu_3^2\mu_4}{36} + \frac{\mu_4^2}{144} - \frac{5\mu_4^2\mu_2}{144} \right] \varepsilon^3 + \\ & + \left[-\frac{1}{1536} + \frac{6233\mu_1^2}{2880} - \frac{763\mu_1^4}{216} + \frac{\mu_2}{384} - \frac{6233\mu_1^2\mu_2}{1440} - \frac{\mu_2^2}{256} + \frac{6233\mu_1^2\mu_2^2}{2880} + \frac{\mu_2^3}{384} - \frac{\mu_2^2}{1536} + \right. \\ & + \frac{4847\mu_1\mu_3}{2400} + \frac{158\mu_1^3\mu_3}{135} - \frac{4847\mu_1\mu_2\mu_3}{1200} + \frac{4847\mu_1\mu_2^2\mu_3}{2400} + \frac{41113\mu_3^2}{100800} + \frac{71\mu_1^2\mu_3^2}{150} + \\ & + \frac{41113\mu_2\mu_3^2}{50400} + \frac{41113\mu_2^2\mu_3^2}{100800} + \frac{209\mu_1\mu_3^3}{1350} + \frac{83\mu_3^4}{2000} - \frac{5\mu_4}{1152} - \frac{457\mu_4\mu_1^2}{360} + \frac{457\mu_4\mu_2\mu_1^2}{360} - \\ & - \frac{5\mu_4\mu_2^2}{384} + \frac{5\mu_4\mu_2^3}{1152} - \frac{123\mu_1\mu_3\mu_4}{70} + \frac{123\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{70} - \frac{22763\mu_4\mu_3^2}{50400} + \frac{22763\mu_4\mu_2\mu_3^2}{50400} + \\ & + \frac{25\mu_4^2}{2304} - \frac{25\mu_1^2\mu_4^2}{1008} - \frac{25\mu_2\mu_4^2}{2304} - \frac{25\mu_2^2\mu_4^2}{2520} - \frac{191\mu_1\mu_3\mu_4^2}{2520} + \frac{1499\mu_3^2\mu_4^2}{32400} - \\ & \left. - \frac{5\mu_4^3}{576} + \frac{5\mu_2\mu_4^3}{576} + \frac{11\mu_4^4}{4320} \right] \varepsilon^4; \quad (56) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_1 = & 1 + [1 - \mu_2] \varepsilon + \left[-\frac{1}{8} - \frac{\mu_1^2}{3} + \frac{\mu_2}{4} - \frac{\mu_2^2}{8} + \frac{2\mu_1\mu_3}{3} - \frac{\mu_3^2}{5} - \frac{\mu_4}{4} + \frac{\mu_2\mu_4}{4} - \frac{\mu_4^2}{6} \right] \varepsilon^2 + \\
& + \left[-\frac{1}{64} - \frac{7\mu_1^2}{36} + \frac{3\mu_2}{64} + \frac{7\mu_1^2\mu_2}{36} - \frac{3\mu_2^2}{64} + \frac{\mu_2^3}{64} + \frac{11\mu_1\mu_3}{45} - \frac{11\mu_1\mu_2\mu_3}{45} - \frac{16\mu_3^2}{225} + \frac{16\mu_3^2\mu_2}{225} - \right. \\
& \left. - \frac{\mu_4}{48} - \frac{7\mu_1^2\mu_4}{36} + \frac{\mu_2\mu_4}{24} - \frac{\mu_2^2\mu_4}{48} + \frac{29\mu_1\mu_3\mu_4}{90} - \frac{5\mu_3^2\mu_4}{36} - \frac{5\mu_4^2}{144} + \frac{5\mu_4^2\mu_2}{144} \right] \varepsilon^3 + \\
& + \left[-\frac{1}{1536} - \frac{217\mu^2}{2880} + \frac{5\mu_1^4}{384} + \frac{\mu_2}{384} + \frac{217\mu_1^2\mu_2}{1440} - \frac{\mu_2^2}{256} - \frac{217\mu_1^2\mu_2^2}{2880} + \frac{\mu_2^3}{384} - \frac{\mu_2^4}{1536} + \right. \\
& + \frac{51\mu_1\mu_2}{800} - \frac{17\mu_1^3\mu_3}{135} - \frac{51\mu_1\mu_2\mu_3}{400} + \frac{51\mu_1\mu_2^2\mu_3}{800} - \frac{179\mu_3^2}{33600} + \frac{97\mu_1^2\mu_3^2}{450} + \frac{179\mu_3^2\mu_2}{16800} - \\
& - \frac{179\mu_2^2\mu_3^2}{33600} - \frac{209\mu_1\mu_3^3}{1350} + \frac{83\mu_3^4}{2000} + \frac{5\mu_4}{1152} - \frac{41\mu_1^2\mu_4}{360} - \frac{5\mu_2\mu_4}{384} + \frac{41\mu_1^2\mu_2\mu_4}{360} + \frac{41\mu_2^2\mu_4}{384} - \\
& + \frac{5\mu_2^2\mu_4}{384} - \frac{5\mu_2^3\mu_4}{1152} + \frac{53\mu_1\mu_3\mu_4}{350} - \frac{53\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{350} - \frac{1387\mu_3^2\mu_4}{50400} + \frac{1387\mu_2\mu_3^2\mu_4}{50400} + \frac{25\mu_4^2}{2304} - \\
& - \frac{67\mu_1^2\mu_4^2}{720} - \frac{25\mu_2\mu_4^2}{1152} + \frac{25\mu_2^2\mu_4^2}{2304} + \frac{323\mu_1\mu_3^2\mu_4^2}{2520} - \frac{859\mu_3^2\mu_4^2}{32400} + \frac{5\mu_4^3}{576} - \frac{5\mu_2\mu_4^3}{576} + \\
& \left. + \frac{11\mu_4^4}{4320} \right] \varepsilon^4; \tag{57}
\end{aligned}$$

$$a_2 = 4 + [\mu_4] \varepsilon + \left[\frac{5}{12} + \frac{2\mu_1^2}{15} - \frac{5\mu_2}{6} + \frac{5\mu_2^2}{12} + \frac{2\mu_1\mu_3}{3} + \frac{2\mu_3^2}{7} - \frac{\mu_4^2}{32} \right] \varepsilon^2 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{31\mu_1^2}{90} + \frac{31\mu_1^2\mu_2}{90} - \frac{61\mu_1\mu_3}{315} + \frac{61\mu_1\mu_2\mu_3}{315} - \frac{\mu_3^2}{18} - \frac{\mu_2\mu_3^2}{18} - \frac{121\mu_4}{576} - \frac{64\mu_1^2\mu_4}{225} + \right. \\
& + \frac{121\mu_2\mu_4}{288} - \frac{121\mu_2^2\mu_4}{576} - \frac{937\mu_1\mu_3\mu_4}{2520} - \frac{64\mu_3^2\mu_4}{441} - \frac{\mu_4^3}{1034} \left. \right] \epsilon^3 + \left[-\frac{763}{13824} + \frac{58\mu_1^2}{1576} - \right. \\
& - \frac{433\mu_1^4}{13500} + \frac{763\mu_2}{3456} - \frac{116\mu_1^2\mu_2}{1575} - \frac{763\mu_2^2}{2304} + \frac{58\mu_1^2\mu_2^2}{1575} + \frac{763\mu_2^3}{3456} - \frac{763\mu_2^4}{13824} - \frac{223\mu_1\mu_3}{1440} - \\
& - \frac{361\mu_1^3\mu_3}{4725} + \frac{223\mu_1\mu_2\mu_3}{720} - \frac{223\mu_1\mu_2^2\mu_3}{1440} - \frac{746\mu_3^2}{3969} - \frac{2459\mu_1^2\mu_3^2}{12600} + \frac{1492\mu_3^2\mu_2}{3969} - \\
& - \frac{746\mu_2^2\mu_3^2}{3969} - \frac{205\mu_3^3\mu_1}{1323} - \frac{143\mu_3^4}{3430} + \frac{18299\mu_4\mu_1^2}{50400} - \frac{18299\mu_4\mu_2\mu_1^2}{50400} + \frac{53911\mu_1\mu_3\mu_4}{105840} - \\
& - \frac{53911\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{105840} + \frac{53\mu_3^2\mu_4}{280} - \frac{53\mu_2\mu_3^2\mu_4}{280} + \frac{6233\mu_4^2}{184320} + \frac{233\mu_1^2\mu_4^2}{6300} - \frac{6233\mu_2\mu_4^2}{92160} + \\
& + \frac{6233\mu_2^2\mu_4^2}{184320} + \frac{41911\mu_1\mu_4^2\mu_3}{627200} + \frac{2561\mu_3^2\mu_4^2}{97020} - \frac{\mu_4^4}{98304} \left. \right] \epsilon^4 \tag{58}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_2 = 4 + [\mu_4]\epsilon + & \left[-\frac{1}{12} + \frac{2\mu_1^2}{15} + \frac{\mu_2}{6} - \frac{\mu_2^2}{12} - \frac{2\mu_1\mu_3}{3} + \frac{2\mu_3^2}{7} - \frac{\mu_4^2}{32} \right] \epsilon^2 + \left[\frac{19\mu_1^2}{90} - \right. \\
& - \frac{19\mu_1^2\mu_2}{90} - \frac{103\mu_1\mu_3}{315} + \frac{103\mu_1\mu_2\mu_3}{315} + \frac{\mu_3^2}{18} - \frac{\mu_2\mu_3^2}{18} + \frac{7\mu_4}{576} + \frac{64\mu_1^2\mu_4}{225} - \frac{7\mu_2\mu_4}{288} + \\
& + \frac{7\mu_2^2\mu_4}{576} - \frac{937\mu_1\mu_3\mu_4}{2520} + \frac{67\mu_3^2\mu_4}{441} + \frac{\mu_4^3}{1034} \left. \right] \epsilon^3 + \left[\frac{5}{13824} + \frac{142\mu_1^2}{1576} + \frac{317\mu_1^4}{13500} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{5\mu_2}{3456} - \frac{284\mu_1^2\mu_2}{1575} + \frac{5\mu_2^2}{2304} + \frac{142\mu_1^2\mu_2^2}{1575} - \frac{5\mu_2^3}{3456} + \frac{5\mu_2^4}{13824} - \frac{19\mu_1\mu_3}{288} + \\
& + \frac{661\mu_1^3\mu_3}{4725} + \frac{19\mu_1\mu_2\mu_3}{144} - \frac{19\mu_1\mu_2^2\mu_3}{288} - \frac{22\mu_3^2}{19845} - \frac{2851\mu_1^2\mu_3^2}{12600} + \frac{44\mu_2^2\mu_3^2}{19845} - \frac{22\mu_2^2\mu_3^2}{19845} + \\
& + \frac{205\mu_1\mu_3^3}{1323} - \frac{143\mu_3^4}{3430} + \frac{739\mu_4\mu_1^2}{5600} - \frac{739\mu_4\mu_2\mu_1^2}{5600} + \frac{56461\mu_1\mu_3\mu_4}{529200} + \frac{56461\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{529200} + \\
& + \frac{121\mu_3^2\mu_4}{5040} - \frac{121\mu_2\mu_3^2\mu_4}{5040} - \frac{217\mu_4^2}{184320} + \frac{233\mu_1^2\mu_4^2}{6300} + \frac{217\mu_2\mu_4^2}{92160} - \frac{217\mu_2^2\mu_4^2}{184320} - \\
& - \frac{41911\mu_1\mu_4^2\mu_3}{627200} + \frac{2561\mu_3^2\mu_4^2}{97020} - \frac{\mu_4^4}{98304} \Big] \varepsilon^4 \tag{59}
\end{aligned}$$

Выражения (55), (56), (57), (58), (59) представляют собой общий вид функций a_n и b_n при $n=0, 1, 2$ для уравнения (51). Прямая b_0 лежит на оси значений δ и уходит в $-\infty$. Если выражение (51) сделать дискретным по j , тогда выражения (55), (56), (57), (58), (59) будут описывать собственные значения функций $Ce_n(\varepsilon, t)$ и $Se_n(\varepsilon, t)$ для уравнений вида

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos 2t] \mu - 2\mu \varepsilon \lambda_1 \cos 2t = 0, \tag{60}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2(1 - \lambda_2) \varepsilon \cos 2t] \mu = 0, \tag{61}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos 2t] \mu - 2\mu \varepsilon \lambda_3 \cos 3t = 0, \tag{62}$$

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos 2t] \mu - 2\mu \varepsilon \lambda_4 \cos 4t = 0. \tag{63}$$

Для уравнений (60), (61), (62), (63) собственные значения функций легко получить последующим приравниванием к нулю в (55), (56), (57), (58), (59) параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, не входящих в исходное уравнение. Например, для уравнения (60) собственное значение функции a_0 будет выглядеть следующим образом:

$$a_0 = \left[-\frac{1}{2} - 2\lambda_1^2 \right] \varepsilon^2 + \left[-3\lambda_1^2 \right] \varepsilon^3 + \left[\frac{7}{128} - \frac{20\lambda_1^2}{9} + \frac{7\lambda_1^4}{2} \right] \varepsilon^4. \quad (64)$$

Если в уравнении (51) параметр λ_i ($U_0 = 0$) положить равным нулю ($\mu_i = 0$), тогда оно переходит в классическое уравнение Матье:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \cos 2t] \mu = 0 \quad (65)$$

и собственные значения функций $Ce_n(\varepsilon, t)$ и $Se_n(\varepsilon, t)$ будут соответствовать собственным значениям функций Матье:

$$\begin{aligned} a_0 &= -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{7}{128}\varepsilon^4; & a_1 &= 1 + \varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 - \frac{1}{64}\varepsilon^3 + \frac{1}{1536}\varepsilon^4; \\ b_1 &= 1 - \varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{64}\varepsilon^3 - \frac{1}{1536}\varepsilon^4; & a_2 &= 4 + \frac{5}{12}\varepsilon^2 - \frac{763}{13824}\varepsilon^4; \\ b_2 &= 4 - \frac{1}{12}\varepsilon^2 + \frac{5}{13824}\varepsilon^4. \end{aligned} \quad (66)$$

На рис. 1 – 4 изображены границы, разделяющие области устойчивых и неустойчивых решений уравнения (51), рассчитанные для случая, когда отличны от нуля амплитуды только первых четырех гармоник с $U_{*j} > 0$ и когда ненулевой вклад в уравнение дает каждая из этих гармоник в отдельности. На тех же рисунках для сравнения изображены границы областей устойчивых и неустойчивых решений для классического уравнения Матье ($U_0 = 0$).

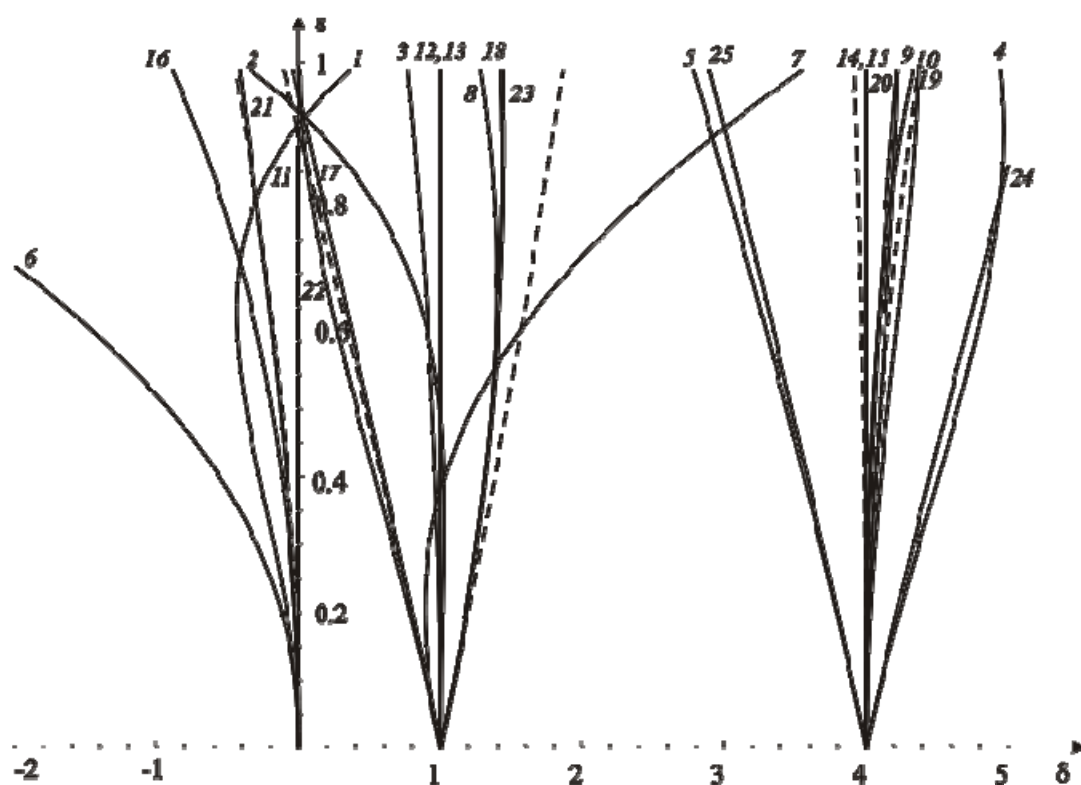


Рис. 1. Границы зон неустойчивости в плоскости параметров δ и ϵ для уравнения (52) и первых четырех гармоник переменного внешнего воздействия при $\mu=1$

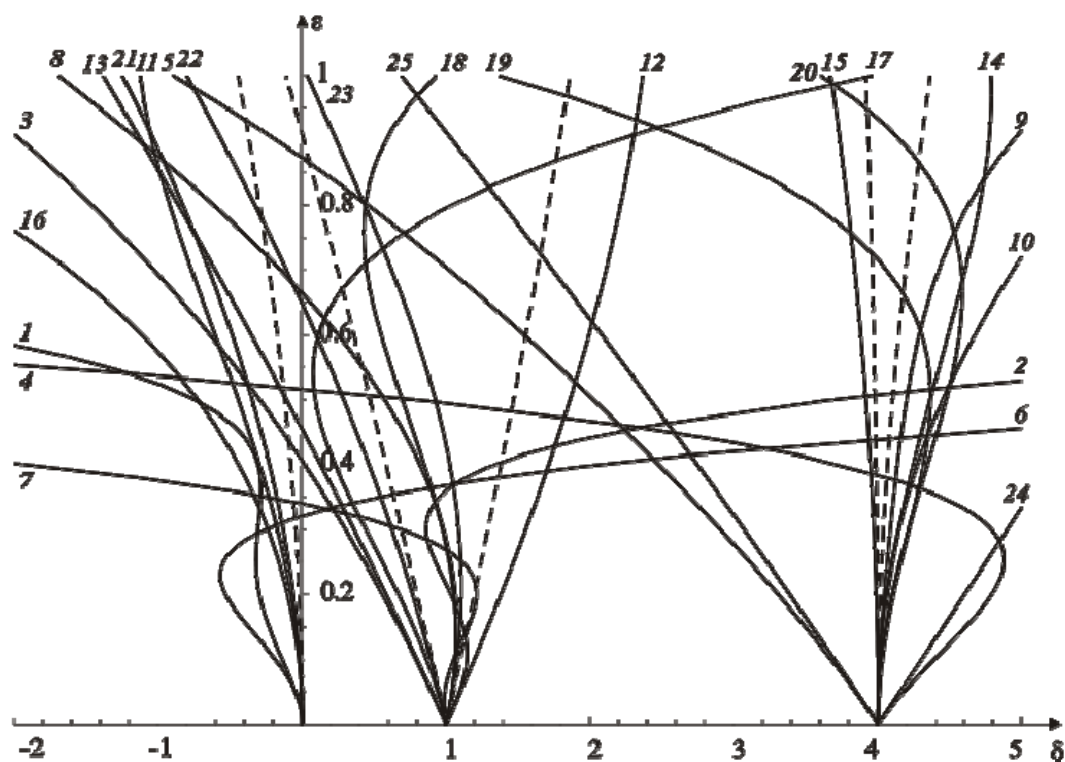


Рис. 2. Зависимости, аналогичные рис.1, при $\delta^{1/2} = 0, 1, 2$, $\mu = 3$

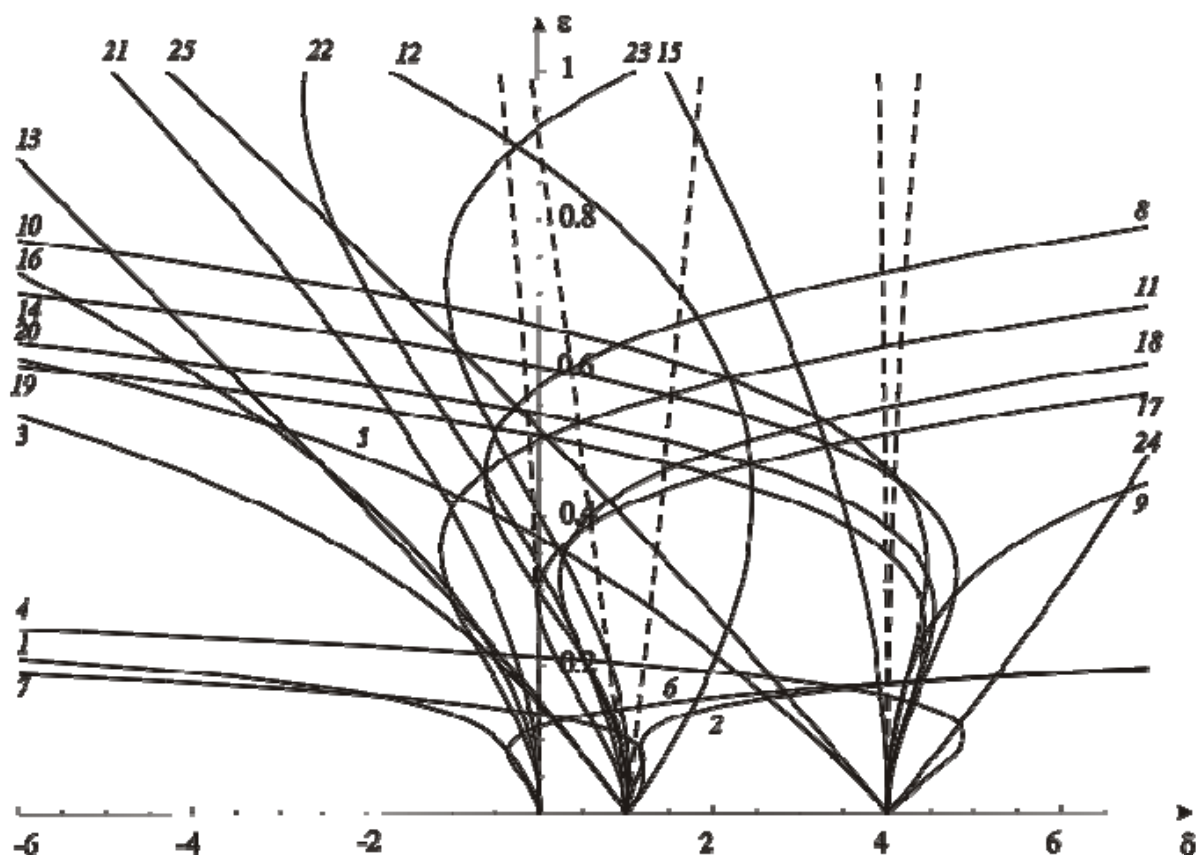


Рис. 3. Зависимости, аналогичные рис.1, 2 при $\delta^{1/2} = 0, 1, 2, \mu = 7$

Зависимости на рис. 5 аналогичны приведенным на рис.4, изображают нулевую зону неустойчивости, но в более удобном масштабе. Когда значения постоянной и переменной составляющей компонент скорости равны друг другу ($U_0 = U_{*j}$; $U_{*1} = U_{*2} = U_{*3} = U_{*4} = U_0$) области устойчивых и неустойчивых решений уравнения (51) деформируются по сравнению с соответствующими областями уравнения Матье.

Для второй гармоники ($j=2$; $U_{*2} = U_0$; $U_{*1} = U_{*3} = U_{*4} = 0$) и только для нее приведенный анализ выявил "исчезновение" областей неустойчивости при любых значениях параметров δ, ϵ . Эти области вырождаются в прямые, а уравнение (51) трансформируется в обычное уравнение гармонических колебаний:

$$\frac{\partial^2 \mu}{\partial t^2} + \mu \delta = 0 \quad (67)$$

Его решение представляется в виде

$$\mu = C_1 \cos(\sqrt{\delta} \cdot t) + C_2 \sin(\sqrt{\delta} \cdot t) \quad (68)$$

Вероятно, при равенстве скоростей наступает стабилизация неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца и Тонкса – Френкеля, что, в свою очередь, приводит к стабилизации границы раздела, расширяя области значений параметров δ и ϵ , в которой она устойчива.

На рис. 1 переходные кривые, определяющие границы устойчивых и неустойчивых решений уравнения (51), представлены следующей нумерацией:

уравнению (52) соответствуют кривые 1 – 5; кривая 1 – определяет правую границу зоны неустойчивости при $\delta^{1/2} = 0$, левая граница находится на $-\infty$; кривая 2 левую границу зоны неустойчивости при $\delta^{1/2} = 1$; кривая 3 – правую границу зоны неустойчивости при $\delta^{1/2} = 1$; кривая 4 – левую границу зоны неустойчивости при $\delta^{1/2} = 4$; кривая 5 – правую границу зоны неустойчивости при $\delta^{1/2} = 4$.

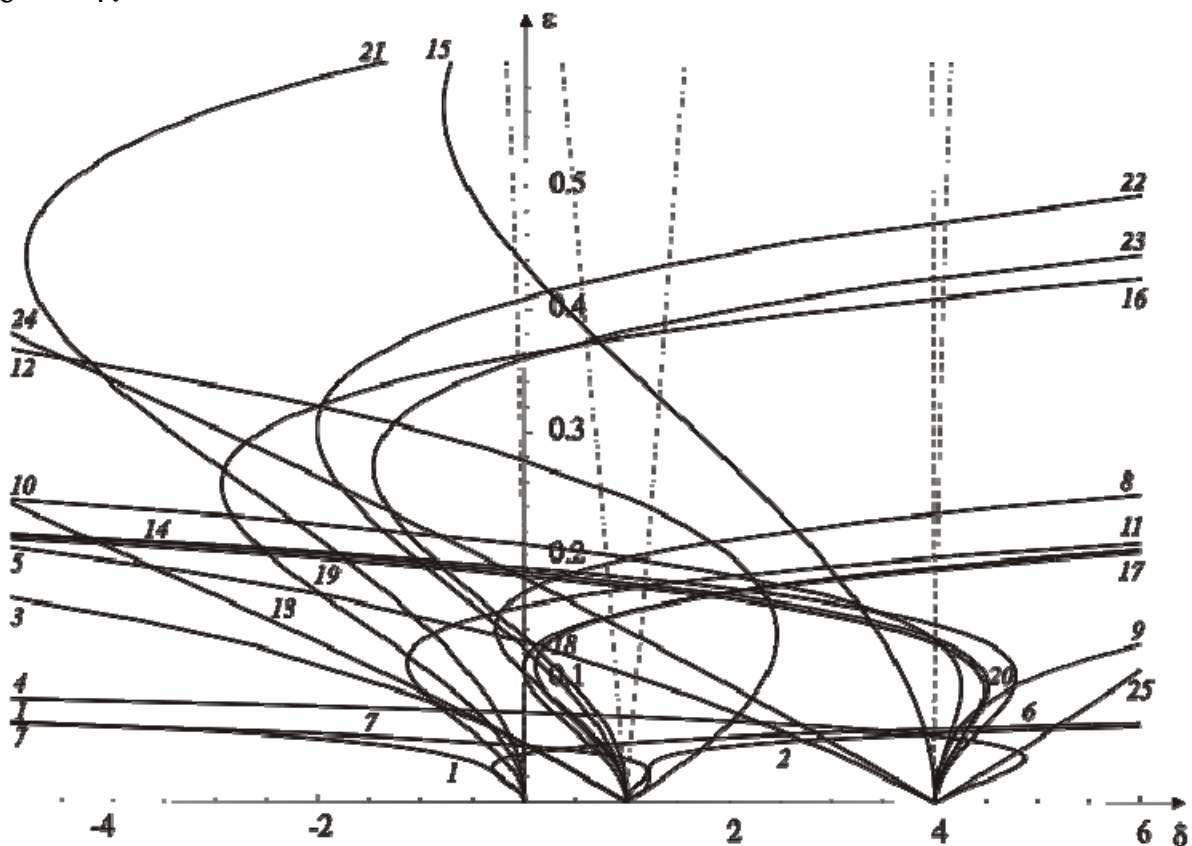


Рис. 4. Зависимости, аналогичные рис. 1, 2, 3
при $\delta^{1/2} = 0, 1, 2$, $\mu = 20$

Первой гармонике ($U_{*1}=U_0$; $U_{*2}=U_{*3}=U_{*4}=0$) переменного внешнего воздействия соответствуют кривые 6 – 10; кривая 6 – соответствует правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$, левая граница находится на $-\infty$; кривая 7 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 8 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 9 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$; кривая 10 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$.

Второй гармонике ($U_{*2}=U_0$; $U_{*1}=U_{*3}=U_{*4}=0$) переменного внешнего воздействия соответствуют кривые 11 – 15: кривая 11 – соответствует правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$, левая граница находится на $-\infty$; кривая 12 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 13 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 14 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$; кривая 15 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$.

Третьей гармонике ($U_{*3}=U_0$; $U_{*1}=U_{*2}=U_{*4}=0$) переменного внешнего воздействия соответствуют кривые 16 – 20: кривая 16 – соответствует правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$, левая граница находится на $-\infty$; кривая 17 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 18 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 19 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$; кривая 20 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$.

Четвертой гармонике ($U_{*4}=U_0$; $U_{*1}=U_{*2}=U_{*3}=0$) переменного внешнего воздействия соответствуют кривые 21 – 25: кривая 21 – соответствует правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$, левая граница находится на $-\infty$; кривая 22 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 23 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=1$; кривая 24 – левой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$; кривая 25 – правой границе зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=4$.

Из рисунков видно, что по мере уменьшения численного значения параметра U_{*j} размер зоны параметрической стабилизации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца

для уравнения (51) уменьшается и постепенно исчезает. Построенные на одном графике области неустойчивых решений для каждой из первых четырех гармоник перекрывают друг друга, образуя многосвязную область неустойчивости. При построении областей существования устойчивых и неустойчивых решений (соответствующих отдельным гармоникам в сумме последнего слагаемого в (51)) было замечено, что площадь параметрической стабилизации комбинации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца увеличивается с уменьшением численного значения параметра U_{*j} и номера гармоники j , что, в свою очередь, представлено на рис. 5 при $\mu_j = 20$.

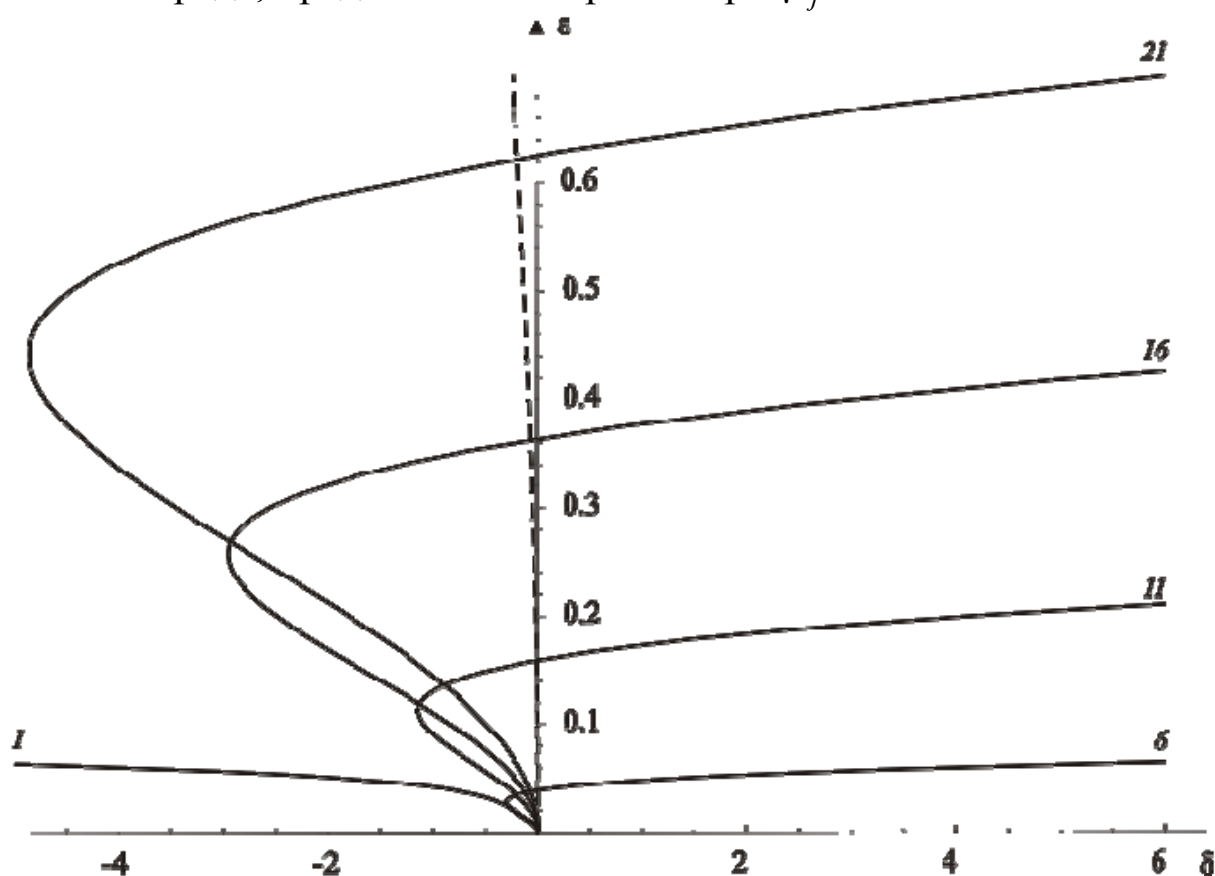


Рис. 5. Области параметрической стабилизации уравнения (52) и гармоник переменного внешнего воздействия при $\mu = 20$

По мере увеличения постоянной компоненты скорости верхней среды U_0 (уменьшения U_{*j}), переходные кривые, рассчитанные для отдельных гармоник суммы в (51), образуют многосвязную область неустойчивости и, перекрывая соседние зоны неустойчивости, приводят к расширению области значений

параметров δ и ϵ , в которых граница раздела неустойчива. Кроме того, увеличение U_0 (уменьшение U_{*j}) приводит к ограничению сверху численных значений параметра ϵ для области параметрической стабилизации при $\delta = 0$. При $U_* < U_0$ область параметрической стабилизации не образуется. Наличие переменных компонент скорости U_{*j} дестабилизирует границу раздела, расширяя область значений параметров δ и ϵ , в которой граница раздела сред неустойчива.

Итак, наличие изменяющихся во времени составляющих скорости U_{*j} движения верхней среды приводит к образованию области параметрической стабилизации комбинации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца уравнения (51) (см. рис 1) при $U_* \geq U_0$. Область параметрической стабилизации характеризуется определенными пределами изменения параметра U_0/U_{*j} , а именно

$$0.8 < \frac{U_0}{U_{*j}} < 2.5.$$

В этом интервале численных значений параметра U_0/U_{*j} , кроме параметрической стабилизации, наблюдается и расширение геометрического места точек, при которых реализуется параметрическая неустойчивость. Так, граница нулевой области параметрической неустойчивости, загибаясь вправо, перекрывает соседние зоны неустойчивых решений уравнения (51), образуя многосвязную область неустойчивости, ограничивая сверху значения параметра ϵ , при которых решения уравнения (51) устойчивы.

При рассмотрении отдельных гармоник переменного внешнего воздействия параметрическая стабилизация при $U_* \geq U_0$ не имеет места (рис. 1). Параметрическая стабилизация для отдельных гармоник переменного внешнего воздействия реализуется только при условии $U_* < U_0$ (рис. 4). При $U_* < U_0$ и с ростом численного значения параметра λ_j зоны существования неустойчивых решений отдельных гармоник переменного внешнего воз-

действия перекрываются нулевыми зонами неустойчивости, образуя многосвязные зоны неустойчивых решений. Таким образом, увеличиваются размеры области численных значений параметров δ и ϵ , при которых решения уравнений Маттье-Хилла становятся неустойчивыми. Геометрическое место точек, соответствующих парам чисел δ и ϵ , над граничной кривой нулевой зоны для первой гармоники в которой любой паре значений δ и ϵ соответствуют неустойчивые решения, будет максимально большим по сравнению с более высокими гармониками. Соответствующая область будет уменьшаться с ростом частоты.

Из рис. 4 и 5 видно, что области параметрической стабилизации комбинации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца уравнений, содержащих описывающих отдельные гармоники переменного внешнего воздействия, расширяются с ростом номера гармоники. При $U_* < U_0$ не отмечается параметрической стабилизации комбинации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца в нулевой зоне неустойчивости уравнения (51) (рис.4).

Подводя итог вышесказанному, отметим, что уравнение Маттье-Хилла, описывающее временную эволюцию амплитуд капиллярных волн на заряженной границе раздела двух сред, верхняя из которых движется относительно более плотной нижней со скоростью, зависящей от времени, имеет неустойчивые решения, связанные как с реализацией неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина- Гельмгольца, так и с параметрической неустойчивостью, характерной для уравнения Маттье-Хилла. Наличие движения верхней среды параллельно границе раздела со скоростью, зависящей от времени, приводит к дестабилизации поверхности жидкости и к снижению критического значения поверхностной плотности заряда (напряженности внешнего электростатического поля), при которой появляется неустойчивость Тонкса – Френкеля и зажигаются огни св. Эльма.

1.3. Дестабилизация заряженной границы раздела двух сред, подверженной действию неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца при наличии переменной во времени компоненты поля скоростей верхней среды

Как показано в [51], в задаче об устойчивости тангенциального разрыва двух несмешивающихся идеальных жидкостей различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с переменной во времени скоростью $U = U(t)$ параллельно границе раздела сред, дифференциальные уравнения, описывающие временную эволюцию амплитуд капиллярных волн являются уравнениями с переменными во времени коэффициентами типа Маттье-Хилла и имеют дискретные зоны, в которых их решения неустойчивы [28 – 30]. Примем, что граница раздела сред заряжена с постоянной поверхностной плотностью заряда σ , и будем исследовать ее устойчивость. Очевидно, что при некоторых значениях физических параметров граница раздела сред в описываемой ситуации может быть подвержена одновременному влиянию неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца, Тонкса – Френкеля и параметрической неустойчивости. Исследование взаимовлияния этих неустойчивостей и является предметом рассмотрения настоящего раздела.

1. Пусть потенциалы полей скоростей движения верхней и нижней жидкостей есть $\Psi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\Psi_2(\mathbf{r}, t)$ соответственно. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных волн в декартовой системе координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела сред, а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести, имеет вид

$$\Delta \Psi_j = 0; \quad j = 1, 2;$$

$$z \Rightarrow -\infty \quad \Psi_1 - xU(t) \Rightarrow \text{const} = 0;$$

$$z \Rightarrow \infty \quad \Psi_2 \Rightarrow \text{const} = 0;$$

$$z = \xi(x; t): \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t}; \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial \xi}{\partial t};$$

$$\rho_1 \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \xi + \frac{1}{2} \rho_1 \left[(\nabla \Psi_1)^2 - U^2(t) \right] = \rho_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi + 4\pi\sigma^2 \xi - \alpha \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

где $\xi(x; t)$ – возмущение границы раздела, связанное с тепловым капиллярным волновым движением; $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t)$ – однородная по координатам x и z , зависящая от времени скорость движения верхней жидкости относительно нижней. Направление вектора \mathbf{U} определяет ориентацию оси OX ; α – коэффициент поверхностного натяжения границы раздела; k – волновое число.

Если принять, что

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}_0 + \mathbf{U}_* \cos \omega_0 t; \quad (\mathbf{U}_0 \perp \mathbf{U}_*),$$

то дифференциальное уравнение, описывающие временную эволюцию амплитуд фиксированных мод тепловых капиллярных волн, принимает вид

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta \left[\omega_*^2 - 2\chi U_0 U_* \cos \omega_0 t + \chi U_*^2 \cos^2 \omega_0 t \right] = 0; \quad (1)$$

$$\omega_*^2 \equiv \frac{k}{(\rho_2 + \rho_1)} \left[g(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^2 - 4\pi\sigma^2 k - k\rho_1 U_0^2 + kU_0^2 \frac{\rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)} \right] = 0;$$

$$\chi \equiv k^2 \frac{\rho_1 \rho_2}{(\rho_2 + \rho_1)^2}.$$

Получившееся уравнение является уравнением Матье-Хилла, которое в зависимости от соотношения величин коэффициентов ω_*^2 , γ и частоты ω_0 может иметь либо параметрически устойчивые, либо параметрически неустойчивые, экспоненциально нарастающие со временем решения. Кроме того, при некоторых

значениях входящих параметров (при $\omega_*^2 \leq 0$ и $U_* = 0$) из уравнения (1) следует также возможность реализации в анализируемой системе неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца, критические условия проявления которых определяются условием

$$g(\rho_2 - \rho_1) + \alpha k^2 - 4\pi\sigma^2 k - k\rho_1 U_0^2 + kU_0^2 \frac{\rho_1^2}{(\rho_2 + \rho_1)} \leq 0 \quad (3)$$

Несложно видеть, что критическое для реализации неустойчивости границы раздела значение поверхностной плотности заряда σ уменьшается с ростом скорости движения верхней среды как целого U_0 . Иначе говоря, обе возможных неустойчивости границы раздела: апериодическая неустойчивость Тонкса – Френкеля и колебательная неустойчивость Кельвина – Гельмгольца – имеют место одновременно, снижая критические условия реализации друг друга (более подробно этот вопрос изложен в [26]).

Перейдем в уравнении (1) к безразмерным переменным, в которых капиллярная постоянная нижней жидкости a , плотность нижней жидкости ρ_2 и частота периодического внешнего воздействия на границу раздела сред ω_0 равны единице, и, оставляя за физическими величинами прежние обозначения, перепишем (1) в виде

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \zeta \left[\delta - 2U_* U_0 \chi \cos t + 0,5U_*^2 \chi \cos 2t \right] = 0; \quad (4)$$

$$\delta = \omega_*^2 + 0,5\chi U_*^2. \quad (5)$$

В принятых обозначениях область реализации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца, согласно вышесказанному, выделяется условием

$$\delta < 0,5\chi U_*^2 \quad (6)$$

В частном случае $U_0 = 0$ уравнение (4) переходит в уравнение Матвея, положение нескольких первых зон неустойчивости решений которого, рассчитанных методом, подробно описанным в [31], путем разложения по малому безразмерному параметру $\varepsilon = \chi U_*^2$, приведено на рис. 1. Видно, что вершины зон неустойчивости начинаются на оси абсцисс при целочисленных значениях параметра $\delta^{1/2}$, т.е. при $\delta^{1/2} = 0; 1; 2; \dots$. Зависимость от времени амплитуд неустойчивых капиллярных волн проиллюстрирована на рис. 2, полученном в прямом расчете по уравнению (4).

Неустойчивым по отношению к параметрической раскачке состояниям на плоскости $(\delta; \varepsilon)$ соответствуют значения параметров, лежащие левее кривой 1, а также между кривыми 2 и 3, 4 и 5. Состояния с параметрами δ и ε , лежащими между кривыми 1 и 2, 3 и 4, устойчивы. Принимая во внимание условие (6), несложно видеть, что в области значений параметров δ и ε между кривой 1, уравнение которой в четвертом приближении по ε имеет вид

$$\delta = -\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{7}{128}\varepsilon^4 - \dots,$$

и прямой $\delta = 0,5\chi U_*^2 = 0,5\varepsilon$, приведенной на рис. 1 пунктирной линией, имеет место подавление неустойчивости Тонкса – Френкеля, поскольку решения уравнения (4) при $U_0 = 0$ на данном геометрическом месте точек $(\delta; \varepsilon)$ устойчивы. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца при $U_0 = 0$ не имеет места, и ее роль в общей картине реализации неустойчивости границы раздела пока не очевидна.

Пусть теперь постоянная компонента скорости U_0 отлична от нуля. Считая по-прежнему малым безразмерный параметр $\varepsilon \equiv \chi U_*^2$, можно рассчитать (см. [31]) положения нескольких первых зон неустойчивости решений уравнения (4). Уравнения граничных кривых для четырех первых зон неустойчивости имеют вид

$$\delta_0^* = \left(-2\alpha^2 - \frac{1}{2}\right)\varepsilon^2 + (-3\alpha^2)\varepsilon^3 + \left(-\frac{155}{72}\alpha^2 + \frac{7}{2}\alpha^4 + \frac{7}{128}\right)\varepsilon^4 + \dots;$$

$$\delta_1^+ = 1 - \varepsilon + \left(\frac{5}{3}\alpha^2 - \frac{1}{8}\right)\varepsilon^2 + \left(\frac{121}{36}\alpha^2 + \frac{1}{64}\right)\varepsilon^3 +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{43}{216}\alpha^4 - \frac{10}{3}\alpha^3 + \frac{6233}{2880}\alpha^2 - \frac{1}{1536} \right) \epsilon^4 + \dots; \\
\delta_1^* &= 1 + \epsilon + \left(-\frac{1}{3}\alpha^2 - \frac{1}{8} \right) \epsilon^2 + \left(-\frac{7}{36}\alpha^2 - \frac{1}{64} \right) \epsilon^3 + \left(\frac{5}{216}\alpha^4 - \frac{103}{1440}\alpha^2 - \frac{1}{1536} \right) \epsilon^4 + \dots; \\
\delta_2^+ &= 4 + \left(-\frac{8}{15}\alpha^2 - \frac{1}{12} \right) \epsilon^2 + \left(-\frac{7}{90}\alpha^2 + \frac{2}{45}\alpha \right) \epsilon^3 + \dots; \\
\delta_2^* &= 4 + \left(-\frac{8}{15}\alpha^2 + \frac{5}{12} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{1}{18}\alpha^2 \right) \epsilon^3 + \dots; \\
\delta_3^+ &= 9 + \left(\frac{2}{35}\alpha^2 + \frac{1}{16} \right) \epsilon^2 + \left(-\frac{3}{280}\alpha^2 - \frac{1}{64} \right) \epsilon^3 + \dots; \\
\delta_2^* &= 9 + \left(\frac{2}{35}\alpha^2 + \frac{1}{16} \right) \epsilon^2 + \left(-\frac{3}{280}\alpha^2 + \frac{1}{64} \right) \epsilon^3 + \dots
\end{aligned} \tag{7}$$

В этих выражениях нижний индекс нумерует зоны неустойчивости, верхний соответствует левой «+» и правой «*» границам зон, а параметр α определяется отношением постоянной и переменной компонент скорости: $\alpha \equiv U_0/U_*$. Ограничение на применимость соотношений (7) в соответствии с требованиями теории приближений накладывается условием $\alpha \cdot \epsilon \ll 1$.

Результаты численных расчетов формы зон неустойчивости по соотношениям (7) при различных значениях параметра α приведены на рис. 3 – 5. Пунктирной прямой на всех рисунках приведена граница области реализации неустойчивости Тонкса – Френкеля. Несложно видеть, что по мере увеличения параметра α (по мере увеличения постоянной компоненты скорости верхней среды U_0) размеры зоны параметрической стабилизации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца уменьшаются. Параметрическая неустойчивость границы раздела, обязанная своим происхождением наличию переменной компоненты скорости верхней среды U_* , также как и неустойчивость Кельвина – Гельмгольца является колебательной. При одновременной реализации этих двух неустойчивостей неустойчивость Кельвина – Гельмгольца подавляется параметрической неустойчивостью (по-видимому из-за наличия сдвига фаз в инициируемых колебательных движениях). Согласно приведенным рисункам, чем больше величина U_0 тем меньше размеры зоны параметрической стабилизации неустойчивостей Тонкса – Френкеля и

Кельвина – Гельмгольца и меньше размеры зон существования устойчивых решений уравнения Матье (4).

Таким образом, наличие переменной компоненты скорости верхней среды U_* дестабилизирует границу раздела, расширяя область значений параметров δ и ϵ , в которой граница раздела сред неустойчива.

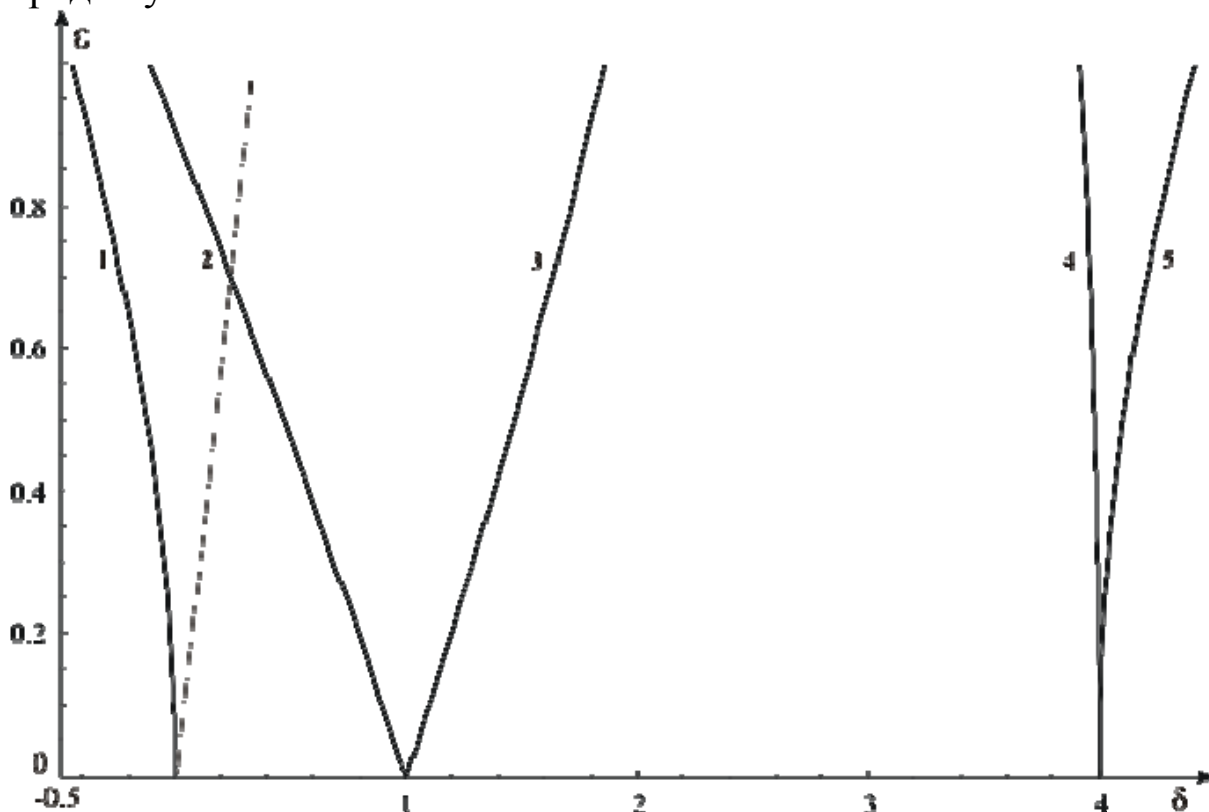


Рис. 1. Границы зоны неустойчивости в плоскости параметров δ , ϵ для уравнения (4) при $\alpha=0$: 1 – правая граница зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$; левая граница находится на $-\infty$; 2 – правая граница зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$; 3 – левая граница зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$; 4 – правая граница зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$; 5 – левая граница зоны неустойчивости при $\delta^{1/2}=0$

Интересно, что по мере увеличения U_0 левая и правая границы зон параметрической устойчивости перекрываются между собой и перекрывают соседние зоны, приводя к расширению области значений параметров δ и ϵ , в которой граница раздела неустойчива, как это видно из рис. 5. Кроме того, указанный феномен

приводит и к ограничению по ϵ сверху для зоны параметрической стабилизации при $\delta < 0$ (см. рис. 5).

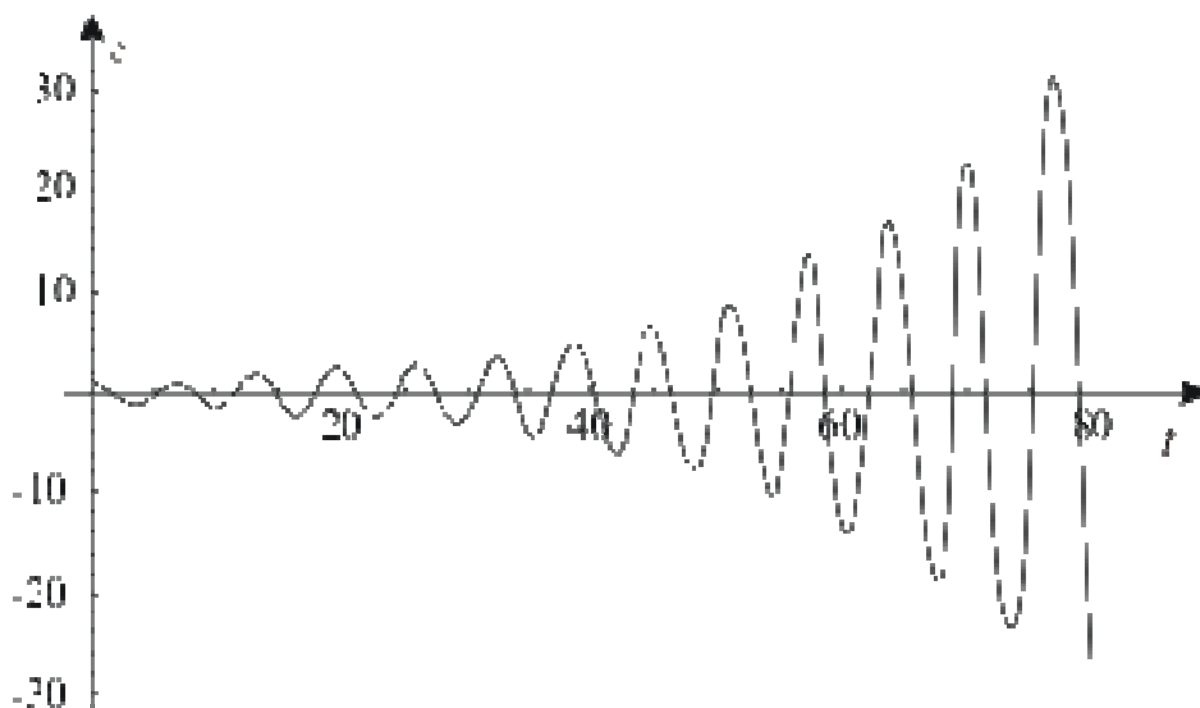


Рис. 2. Зависимость от времени амплитуд неустойчивых капиллярных волн, полученная прямыми численными расчетами по уравнению (4)

Описанный феномен может иметь весьма существенное значение для истолкования таких природных феноменов, как инициирование разряда молнии за счет зажигания коронного разряда в окрестности падающей капли или тающей градины [10 – 11, 31 – 32], и огни св. Эльма, возникающие на финальной стадии неустойчивости заряженной поверхности капль либо пленки воды, покрывающих во время бурь и гроз предметы, в окрестности которых появляются огни св. Эльма [12 – 17].

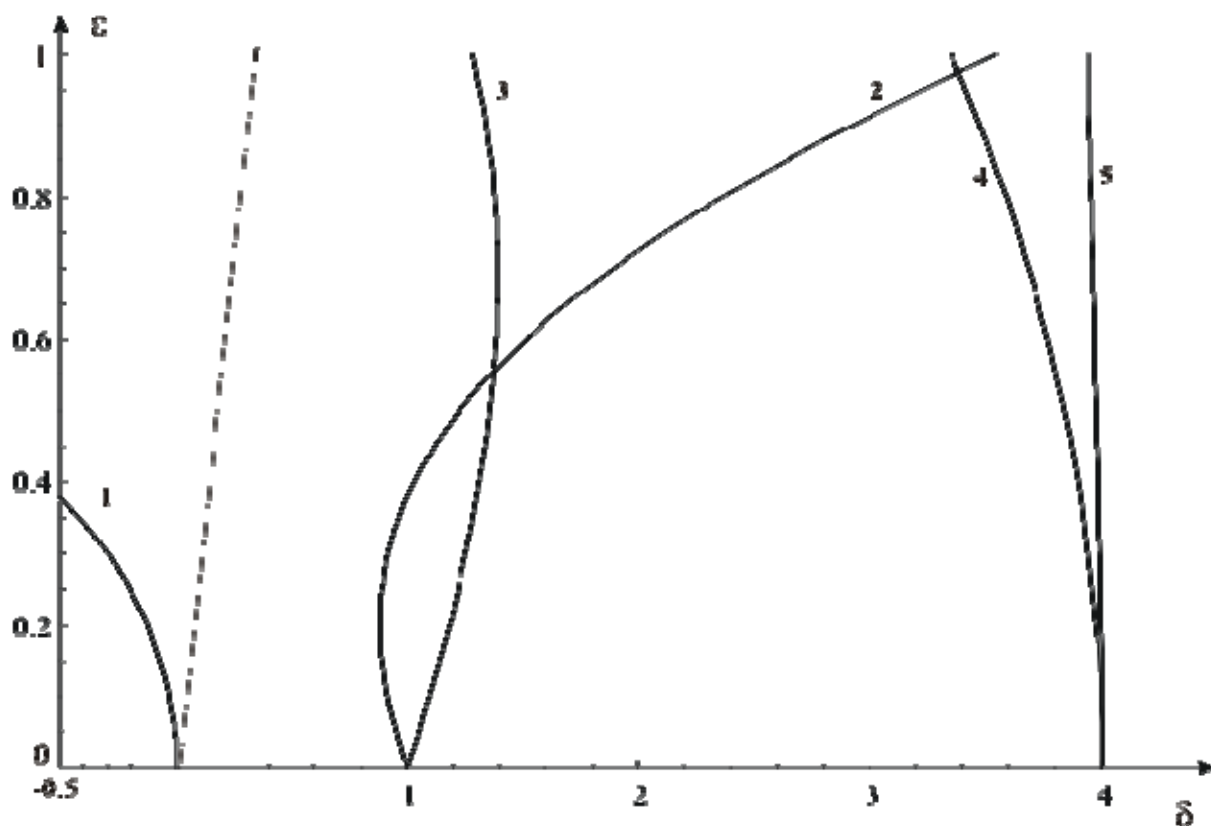


Рис. 3. Зависимости, аналогичные рис. 1, при $\delta^{1/2} = 0; 1; 2$, $\alpha = 1$

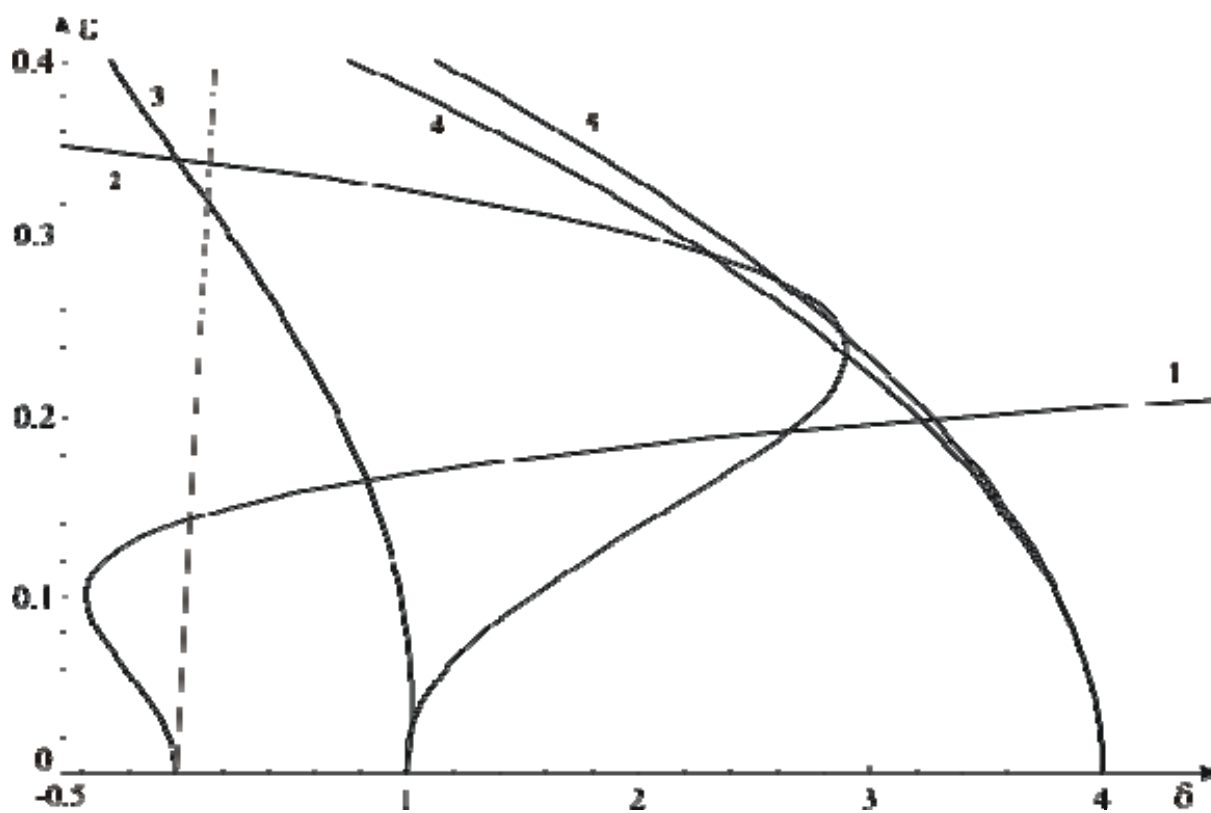


Рис. 4. Зависимости, аналогичные рис. 1, 3 при $\delta^{1/2} = 0; 1; 2$, $\alpha = 6$

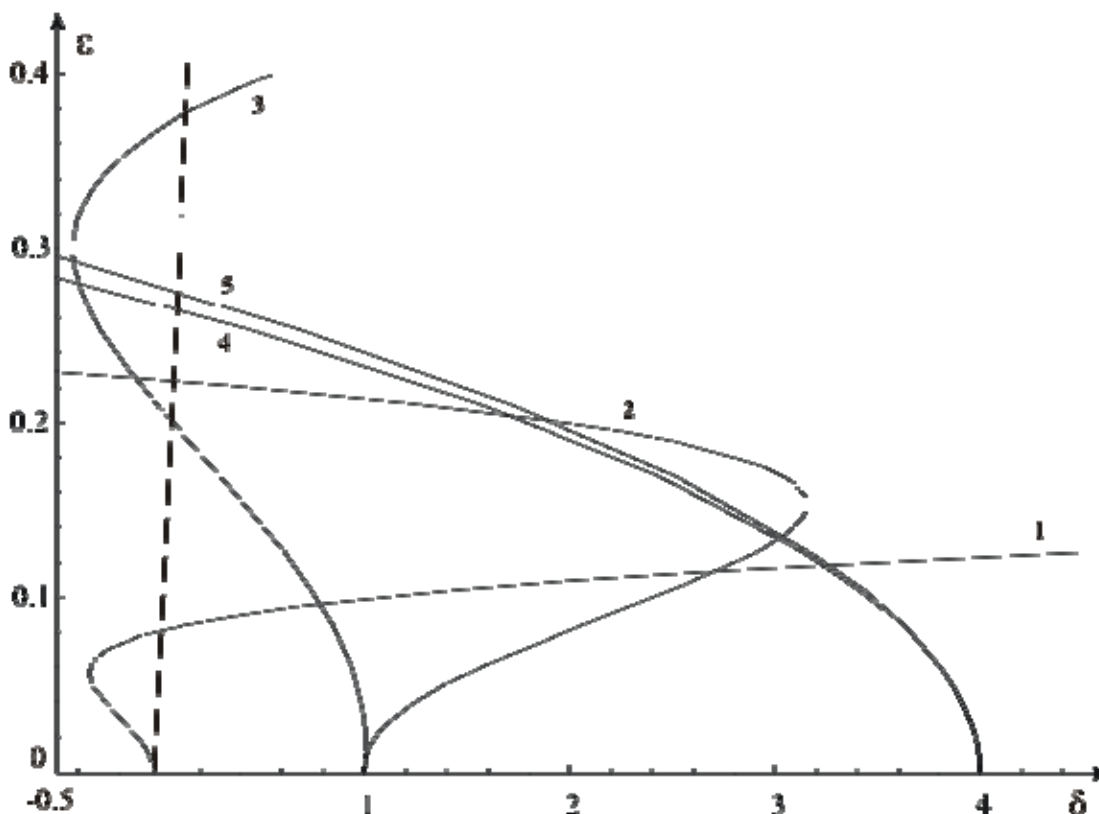


Рис. 5. Зависимости, аналогичные рис. 1, 3, 4
при $\delta^{1/2} = 0; 1; 2$, $\alpha = 10$

1.4. Параметрические волны на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей, когда ее коэффициент поверхностного натяжения является функцией времени

Проанализируем устойчивость капиллярных волн на границе раздела двух жидких сред, когда их параметрическая раскачка вызывается периодическим изменением величины коэффициента поверхностного натяжения. Как известно [37 – 38], у полярных жидкостей у свободной поверхности жидкости или у границы раздела сред образуются двойные электрические слои, появление которых связано с изменением (снижением) поверхностной энергии и величины коэффициента поверхностного натяжения. При разрушении двойного электрического слоя величина поверхностного натяжения увеличивается, при восстановлении – снова сни-

жается. Весь феномен известен под названием эффекта динамического поверхностного натяжения [37 – 38]. При наличии некоего периодического силового воздействия на границу раздела сред (например, периодического теплового потока, периодически разрушающего двойной электрический слой, можно получить периодически зависящий от времени коэффициент поверхностного натяжения с амплитудой осцилляций в несколько десятков процентов от постоянной величины. Исследование устойчивости волнового движения на границе раздела сред в подобной системе представляет интерес в связи с многообразными приложениями.

1. Пусть даны две идеальные несжимаемые несмешивающиеся жидкости двух различных плотностей ρ_1 и ρ_2 , каждая из которых заполняет полубесконечное пространство. Граница раздела жидкостей имеет поверхностную плотность заряда σ . Коэффициент поверхностного натяжения α границы раздела сред изменяется по закону $\alpha(T, t) = \alpha_0 + \alpha_* \cos(\omega t)$, где T – температура, t – время, α_0 – постоянная составляющая поверхностного натяжения границы раздела сред, α_* – амплитуда переменной составляющей поверхностного натяжения границы раздела сред. Верхняя среда – диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ϵ_1 , нижняя – электропроводная. Уравнение плоской границы раздела сред, возмущенной капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, записывается в виде

$$F(\vec{r}; t) = z - \xi(x, t) = 0;$$

здесь $\xi(x, t)$ – возмущение равновесной плоской в поле силы тяжести границы раздела сред, порождаемое уже тепловым движением молекул жидкости, имеющее амплитуду $\propto \sqrt{kT/\alpha}$, где k – постоянная Больцмана, T – абсолютная температура [23].

Будем исследовать устойчивость волнового движения на границе раздела сред.

2. Пусть потенциалы скоростей волнового движения в верхней и нижней жидкостях есть $\Psi_1(\vec{r}, t)$ и $\Psi_2(\vec{r}, t)$ соответственно. Тогда математическая формулировка задачи об исследовании временной эволюции амплитуд капиллярных волн в декартовой сис-

теме координат, плоскость XOY которой совпадает с невозмущенной границей раздела сред, а ось OZ направлена вниз, в направлении действия силы тяжести, имеет вид

$$\Delta\Psi_i = 0; \quad i = 1; 2; \quad (1)$$

$$z = \xi: \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial z} = \frac{\partial\xi}{\partial t}; \quad (2)$$

$$\begin{aligned} & -\rho_1 \frac{\partial\Psi_1}{\partial t} - \rho_1 g \xi(x, t) = \\ & = \rho_2 \frac{\partial\Psi_2}{\partial t} + \rho_2 g \xi(x, t) + \frac{4}{\varepsilon_1} \pi \sigma^2 \xi(x, t) + [\alpha_0 + \alpha_* \cos(\omega t)] \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (3) третье слагаемое справа от знака равенства определяет давление электрического поля на границу раздела [23], а четвертое – давление сил поверхностного натяжения. Индекс «1» относится к верхней жидкости, индекс «2» – к нижней жидкости. Решение выписанной задачи будем искать в виде

$$\Psi_1 = A e^{kz} \cdot \cos(kx - \omega t), \quad (4)$$

$$\Psi_2 = B e^{-kz} \cdot \cos(kx - \omega t), \quad (5)$$

$$\xi(x, t) = a \cdot e^{i(kx - \omega t)}. \quad (6)$$

Подставим проекты решений (4) – (6) в граничные условия (2) – (3) и придем к дифференциальному уравнению второго порядка, описывающего временную эволюцию капиллярных волн на границе раздела сред:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{k}{\rho_1 + \rho_2} \left[g(\rho_1 - \rho_2) + \alpha_0 k^2 + \alpha_* k^2 \cos(\omega t) - \frac{4}{\varepsilon_1} \pi \sigma^2 k \right] \xi = 0. \quad (7)$$

Для дальнейших исследований получившегося дифференциального уравнения (7) проведем процедуру обезразмеривания всех величин, входящих в уравнение.

За основные единицы, относительно которых будет осуществляться процедура обезразмеривания, возьмем $\rho_2 = \alpha_0 = g = 1$. Тогда все остальные величины (за которыми оставим прежние обозначения) будут выражены в единицах своих характерных значений:

$$[\rho_2] = cM^{-3} \cdot z, \quad [\alpha_0] = cM^2 \cdot c^{-1}, \quad [g] = cM \cdot c^{-2}:$$

$$\begin{aligned} [t_*] &= c; \quad t_* = g^\alpha \cdot \alpha_0^\beta \cdot \rho_2^\gamma \\ c &= cM^\alpha \cdot c^{-2\alpha} \cdot cM^{2\beta} \cdot c^{-\beta} \cdot cM^{-3\gamma} \cdot z^\gamma \\ \left. \begin{aligned} 1 &= -2\alpha - \beta \\ 0 &= \alpha + 2\beta - 3\gamma \\ 0 &= \gamma \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \alpha = -2/3 \\ & \Rightarrow \beta = 1/3 \\ & \Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

$$t_* = g^{-2/3} \cdot \alpha_0^{1/3} \cdot \rho_2^0$$

$$[\sigma_*] = cM^{-1/2} \cdot z^{1/2} \cdot c^{-1};$$

$$\begin{aligned} \alpha_* &= g^\alpha \cdot \alpha_0^\beta \cdot \rho_2^\gamma \\ cM^{-1/2} \cdot z^{1/2} \cdot c^{-1} &= \\ &= cM^\alpha \cdot c^{-2\alpha} \cdot cM^{2\beta} \cdot c^{-\beta} \cdot cM^{-3\gamma} \cdot z^\gamma \\ \left. \begin{aligned} -1 &= -2\alpha - \beta \\ -1/2 &= \alpha + 2\beta - 3\gamma \\ 1/2 &= \gamma \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \alpha = 1/3 \\ & \Rightarrow \beta = 1/3 \\ & \Rightarrow \gamma = 1/2 \end{aligned}$$

$$\sigma_* = g^{1/3} \cdot \alpha_0^{1/3} \cdot \rho_2^{1/2}$$

$$\begin{aligned} [\omega_*] &= c^{-1}; \quad \omega_* = g^\alpha \cdot \alpha_0^\beta \cdot \rho_2^\gamma \\ c^{-1} &= cM^\alpha \cdot c^{-2\alpha} \cdot cM^{2\beta} \cdot c^{-\beta} \cdot cM^{-3\gamma} \cdot z^\gamma \\ \left. \begin{aligned} -1 &= -2\alpha - \beta \\ 0 &= \alpha + 2\beta - 3\gamma \\ 0 &= \gamma \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \alpha = 2/3 \\ & \Rightarrow \beta = -1/3 \\ & \Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

$$\omega_* = g^{2/3} \cdot \alpha_0^{1/3} \cdot \rho_2^0$$

$$\begin{aligned} [k_*] &= cM^{-1}; \quad k_* = g^\alpha \cdot \alpha_0^\beta \cdot \rho_2^\gamma \\ cM^{-1} &= cM^\alpha \cdot c^{-2\alpha} \cdot cM^{2\beta} \cdot c^{-\beta} \cdot cM^{-3\gamma} \cdot z^\gamma \\ \left. \begin{aligned} 0 &= -2\alpha - \beta \\ -1 &= \alpha + 2\beta - 3\gamma \\ 0 &= \gamma \end{aligned} \right\} & \Rightarrow \alpha = 1/3 \\ & \Rightarrow \beta = -2/3 \\ & \Rightarrow \gamma = 0 \end{aligned}$$

$$k_* = g^{1/3} \cdot \alpha_0^{-2/3} \cdot \rho_2^0$$

В указанных безразмерных величинах выражение (7) будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{k}{1+\rho} \left[(\rho-1) + k^2 + \alpha_* k^2 \cos(\omega t) - \frac{4}{\varepsilon_1} \pi \sigma^2 k \right] \xi = 0, \quad \rho_1 \equiv \rho. \quad (8)$$

При $\alpha_* = 0$ выражение (8) перейдет в дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \frac{k}{1+\rho} \left[(\rho-1) + k^2 - \frac{4}{\varepsilon_1} \pi \sigma^2 k \right] \xi = 0, \quad (9)$$

его решение будет выглядеть следующим образом:

$$\xi = \text{Ch} \frac{t \sqrt{k(4k\pi\sigma^2 - \varepsilon_1(\rho - 1) + k^2)}}{\sqrt{\varepsilon_1(\rho + 1)}}.$$

Пусть в выражении (8)

$$\xi(x, t) = \zeta\left(x, \frac{2\tau}{\omega}\right), \quad \text{т.к. } \omega t = 2\tau \Rightarrow t = \frac{2\tau}{\omega},$$

тогда (8) можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \left[\frac{4}{\omega^2} \left(\frac{k(\rho - 1)}{(1 + \rho)} + \frac{k^3}{(1 + \rho)} - \frac{4\pi\sigma^2 k^2}{\varepsilon_1(1 + \rho)} \right) + \frac{4}{\omega^2} \frac{\alpha_* k^3}{(1 + \rho)} \text{Cos}(2\tau) \right] \zeta = 0. \quad (10)$$

В (10) введем обозначения

$$\delta = \frac{4}{\omega^2} \left(\frac{k(\rho - 1)}{(1 + \rho)} + \frac{k^3}{(1 + \rho)} - \frac{4\pi\sigma^2 k^2}{\varepsilon_1(1 + \rho)} \right); \quad 2\varepsilon = \frac{4}{\omega^2} \frac{\alpha_* k^3}{(1 + \rho)} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{2\alpha_* k^3}{\omega^2(1 + \rho)}. \quad (11)$$

Тогда выражение (8), записанное в новых безразмерных величинах, будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + [\delta + 2\varepsilon \text{Cos}(2t)] \zeta = 0. \quad (11)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка с переменными коэффициентами типа Матье. Решения этого уравнения могут быть как параметрически устойчивыми, так и параметрически неустойчивыми, экспоненциально нарастающими со временем.

Применяя к уравнению (11) стандартную процедуру разложения по малому параметру $\varepsilon \ll 1$, методом растянутых параметров [31] можно получить собственные функции уравнения (55) $Se_n(\varepsilon, t)$ и $Ce_n(\varepsilon, t)$, которые определяют переходные кривые, делящие плоскость $\delta - \varepsilon$ на области устойчивых и неустойчивых решений уравнения (11). Для этого запишем равномерно пригодное разложение в виде:

$$\zeta(t, \epsilon) = \zeta_0(t) + \zeta_1(t)\epsilon + \zeta_2(t)\epsilon^2 + \zeta_3(t)\epsilon^3 + \zeta_4(t)\epsilon^4,$$

$$\delta = n^2 + \delta_1\epsilon + \delta_2\epsilon^2 + \delta_3\epsilon^3 + \delta_4\epsilon^4. \quad (12)$$

Подставляя выражение (12) в (11) и приравнявая к нулю коэффициенты при последовательных степенях ϵ , получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\epsilon^0 : \ddot{\zeta}_0 + \zeta_0 n^2 = 0;$$

$$\epsilon^1 : \ddot{\zeta}_1 + \zeta_1 n^2 = -\zeta_0 \delta_1 - 2\zeta_0 \cos(2t);$$

$$\epsilon^2 : \ddot{\zeta}_2 + \zeta_2 n^2 = -\zeta_0 \delta_2 - \zeta_1 \delta_1 - 2\zeta_1 \cos(2t);$$

$$\epsilon^3 : \ddot{\zeta}_3 + \zeta_3 n^2 = -\zeta_0 \delta_3 - \zeta_1 \delta_2 - \zeta_2 \delta_1 - 2\zeta_2 \cos(2t);$$

$$\epsilon^4 : \ddot{\zeta}_4 + \zeta_4 n^2 = -\zeta_0 \delta_4 - \zeta_1 \delta_3 - \zeta_2 \delta_2 - \zeta_3 \delta_1 - 2\zeta_3 \cos(2t). \quad (13)$$

Решение системы дифференциальных уравнений (13) даст искомые собственные значения функций $Ce_n(\epsilon, t)$ и $Se_n(\epsilon, t)$, описывающих характеристические кривые, которые являются границами областей устойчивых и неустойчивых решений уравнения (11). Границы устойчивых и неустойчивых решений на плоскости безразмерных параметров (δ, ϵ) являются собственными функциями уравнения (11). Эти функции не выражаются через элементарные и известны как функции Матье: $Ce_n(\epsilon, t)$, $Se_n(\epsilon, t)$.

$$Ce_0(\epsilon, t) = -\frac{1}{2}\epsilon^2 + \frac{7}{128}\epsilon^4;$$

$$Se_1(\epsilon, t) = 1 + \epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 - \frac{1}{64}\epsilon^3 - \frac{1}{1536}\epsilon^4;$$

$$Ce_1(\epsilon, t) = 1 - \epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \frac{1}{64}\epsilon^3 - \frac{1}{1536}\epsilon^4;$$

$$Se_2(\epsilon, t) = 4 + \frac{5}{12}\epsilon^2 - \frac{763}{13824}\epsilon^4;$$

$$Ce_2(\epsilon, t) = 4 - \frac{1}{12}\epsilon^2 + \frac{5}{13824}\epsilon^4. \quad (14)$$

Прямая $Se_0(\epsilon, t)$ лежит на оси значений δ и уходит в $-\infty$, ϵ — малый параметр, по которому проводилось разложение уравнение (55), с сохранением слагаемых вплоть до четвертого порядка малости. Параметр δ характеризует частоту капиллярных колебаний границы раздела сред в зависимости от переменной составляющей поверхностного натяжения α_* .

На рис. 1 представлены первые три зоны неустойчивых решений при целочисленных значениях параметра n^2 . Результаты численного моделирования границ областей устойчивых и неустойчивых решений уравнения (11) получены с помощью выражений (14). Результаты прямых расчетов по уравнению (11) представлены рис. 2 – 7.

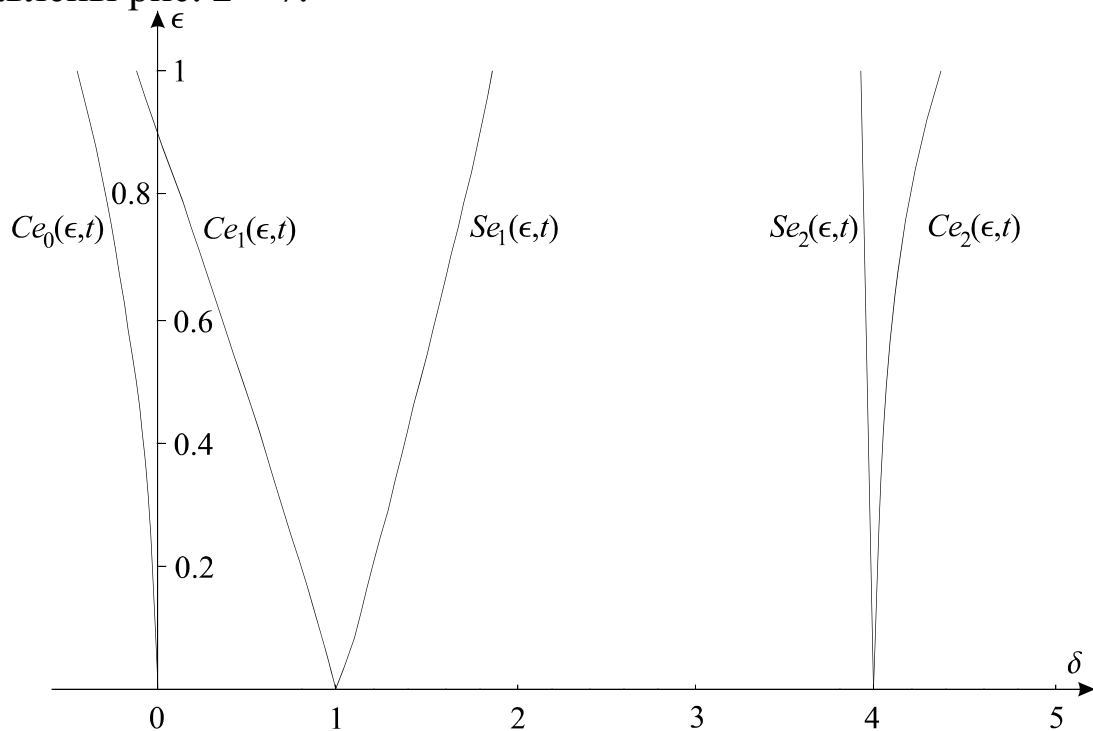


Рис. 1

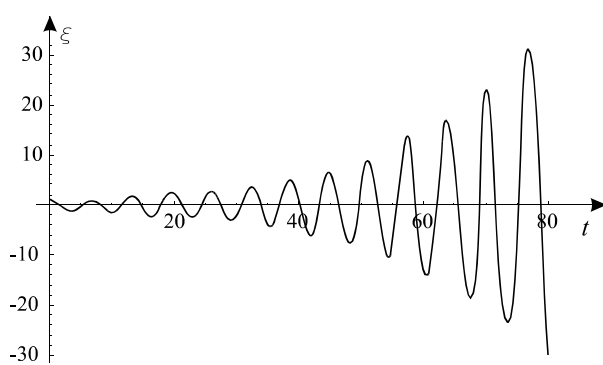


Рис. 2. $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 1$, $n^2 = 1$

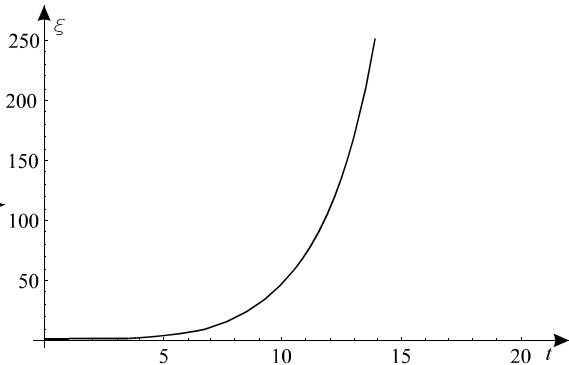


Рис. 3. $\varepsilon = 0.01$, $\delta = -0.2$, $n^2 = 0$

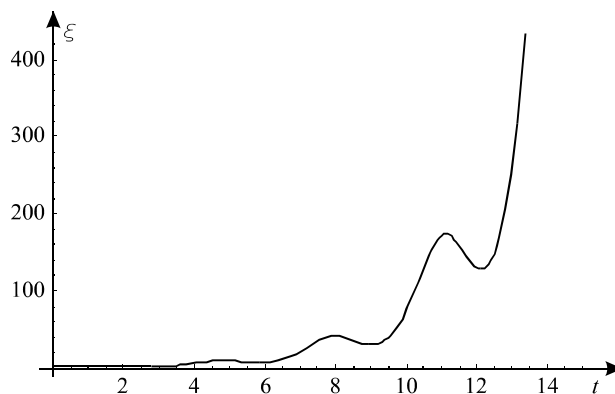


Рис. 4 $\varepsilon = 0.45$, $\delta = -0.1$, $n^2 = 0$

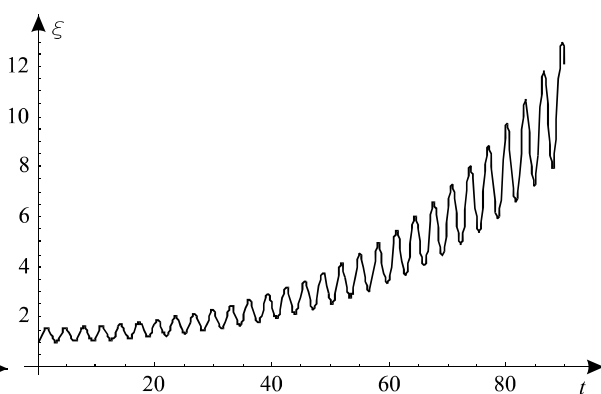


Рис. 5. $\varepsilon = 0.1$, $\delta = -0.6$, $n^2 = 0$

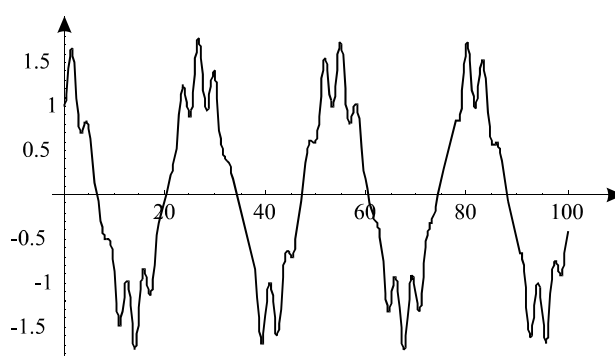


Рис. 6. $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 1$.

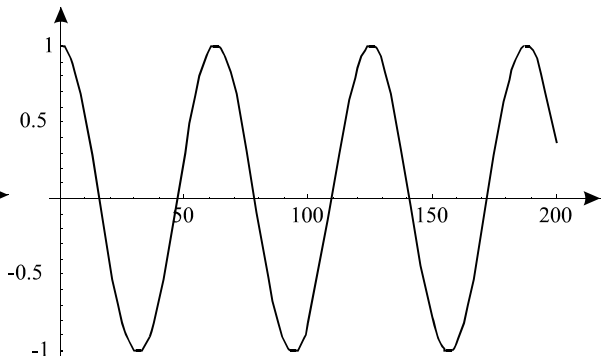


Рис. 7. $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.01$

Глава 2. Нелинейные волны в слое жидкости конечной глубины

2.1. Нелинейные волны в слое вязкой жидкости конечной глубины

Введение. Изучение нелинейных капиллярно-гравитационных волновых движений на поверхности вязкой жидкости представляет значительный интерес в связи с многочисленными техническими и технологическими приложениями, связанными с явлением электродиспергирования (см. [1–9] и цитируемую там литературу). Среди таких приложений – разработка методов электрического распыления лакокрасочных материалов и жидких топлив, в том числе технологий струйной печати. Кроме того, исследования в данной области находят применение в теории грозового электричества и в изучении явления огней Св. Эльма (проявляются как результат коронного разряда с поверхности капель воды, осевших на высоких предметах). В приложениях фигурирует явление неустойчивости заряженной поверхности не вязкой проводящей жидкости по отношению к поверхностному заряду – неустойчивость Тонкса – Френкеля. Многие аспекты данного явления, в том числе критические условия реализации неустойчивости, могут быть изучены посредством аналитического исследования нелинейных волн на заряженной поверхности электропроводной жидкости.

Механизм реализации неустойчивости плоской однородно заряженной поверхности вязкой жидкости с учетом реальных физико-химических свойств жидкости достаточно подробно исследован посредством математического моделирования линейных капиллярно-гравитационных волн. В этой связи в [39 – 40] получено и проанализировано дисперсионное уравнение для капиллярных волн на заряженной поверхности вязкой жидкости, а в [41 – 44] изучено влияние толщины слоя вязкой жидкости с заряженной свободной поверхностью на закономерности развития неустойчивости поверхности жидкости. Основным результатом этих

работ состоит в том, что на начальной стадии развития неустойчивости диссипация изменяет величину инкремента развития неустойчивости, но не влияет на условия ее реализации.

Большая часть нелинейных исследований неустойчивости однородно заряженной поверхности слоя вязкой жидкости выполнена в приближении «мелкой воды», когда малым параметром задачи является отношение длины волны к толщине жидкой пленки (см., например, [45 – 48]). Подобное упрощение не всегда обосновано [49 – 50], и к тому же большинство работ сводится к выводу нелинейных уравнений, имеющих солитонные решения [46 – 47]. Только в последние годы появились работы, позволяющие корректно учитывать влияние вязкости на нелинейные волновые процессы [51 – 52]. Однако весьма существенный вопрос о совместном влиянии толщины слоя и вязкости на распространение нелинейных периодических волн по поверхности слоя вязкой жидкости и, как следствие, на феномен неустойчивости Тонкса – Френкеля и критические условия ее реализации, остается открытым.

Все исследования нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн на свободной поверхности жидкости до недавнего времени (до появления работ [51 – 54]) выполнялись только для идеальной жидкости. Анализ наиболее часто цитируемых обзоров по распространению нелинейных волн на поверхности жидкости [55 – 57] показывает, что методы исследования нелинейных периодических капиллярно-гравитационных волн начали разрабатываться еще до появления работы Френкеля. Первая теоретическая работа по этой теме выполнена в начале двадцатого столетия Вилтоном [58 – 59] методом прямого разложения основных уравнений гидродинамики идеальной жидкости и граничных условий к ним по малому параметру, равному отношению амплитуды волны к ее длине. Во второй половине двадцатого века, после того как Брезертон [60] и Саймонс [61] сформулировали методы нелинейного анализа периодических волн, процедура решения Вилтона была улучшена с помощью метода разных масштабов. Наиболее известные теоретические и экспериментальные результаты в области исследования периодических

нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности жидкости принадлежат Мак-Голдрику [62-65] и Найфэ [66-68].

В настоящей работе осуществлено построение математической модели нелинейных капиллярно-гравитационных волн на поверхности слоя электропроводной жидкости произвольной вязкости, продемонстрировано применение методики аналитического расчета нелинейных волн в слое вязкой жидкости, а также проведен анализ влияния вязкости жидкости и ее глубины на процесс волнового движения.

1. Описание физической модели. Для исследования была выбрана следующая физическая модель. Несжимаемая жидкость с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ заполняет в поле тяжести $\vec{g} \parallel -\vec{n}_z$ безграничный по площади слой $-d \leq z \leq 0$ в декартовой системе координат x, y, z (за \vec{n}_z обозначен орт оси z). Снизу жидкость ограничена поверхностью $z = -d$ – твердым дном, на котором выполняется условие прилипания. Над свободной поверхностью жидкости в состоянии покоя $z = 0$ – вакуум. Жидкость идеально электропроводная, находится в однородном электрическом поле напряженностью E_0 , вектор которого направлен вниз. Все физические параметры жидкости и окружающей ее среды – $\rho, \nu, \gamma, g, d, E_0$ – считаются постоянными величинами. Свободная поверхность жидкости подвержена возмущениям малой амплитуды так, что ее форма представляется функцией координаты и времени: $z = \xi(x, t)$.

Вполне очевидно, что движение жидкости в принятой физической модели будет однородным по координате y , то есть величины компонент поля скоростей и давления жидкости и напряженности электрического поля не будут зависеть от координаты y .

2. Математическая постановка задачи. С учетом вышесказанного математическое описание физической модели имеет вид

$$-d \leq z \leq \xi: \quad \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + (\nabla \times \vec{U}) \times \vec{U} = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} U^2 + g z \right) + \nu \Delta \vec{U}; \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{U} = 0; \quad (2)$$

$$z \geq \xi : \quad \Delta \Phi = 0 ; \quad (3)$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} = v ; \quad (4)$$

$$p - 2\rho\nu \vec{n} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2} ; \quad (5)$$

$$\vec{\tau} \cdot (\vec{n} \cdot \nabla) \vec{U} + \vec{n} \cdot (\vec{\tau} \cdot \nabla) \vec{U} = 0 ; \quad (6)$$

$$\Phi = 0 ; \quad (7)$$

$$z = -d : \quad u = 0 ; \quad (8)$$

$$v = 0 ; \quad (9)$$

$$z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi = -E_0 \cdot \vec{n}_z , \quad (10)$$

где $\vec{U} = (u, 0, v)$ – поле скоростей и p – гидродинамическое давление внутри жидкости; Φ – потенциал электрического поля, а \vec{n} и $\vec{\tau}$ представляют собой соответственно нормальный и касательный к свободной поверхности жидкости вектора. Для дальнейшего теоретического исследования требуется решить задачу в данной постановке. При этом должны быть найдены неизвестные величины возмущения свободной поверхности ξ , поля скоростей \vec{U} , гидродинамического давления p и электрического потенциала Φ .

В постановке задачи, как нетрудно видеть, не приведены начальные условия (условия при $t = 0$), которых в (1) – (10) в соответствии с количеством и порядком производных по времени должно быть два. Решение задачи при произвольных начальных условиях вызывает серьезные математические трудности. Поэтому, как это принято в теории нелинейных периодических волн [51 – 68], условия при $t = 0$ подбираются таким образом, чтобы получаемое в результате решение имело как можно более про-

стой вид. В качестве первого начального условия можно принять, что возмущение свободной поверхности в первом приближении по малой (по сравнению с длиной волны) амплитуде a имеет вид бегущей в положительном направлении координатной оси Ox синусоидальной волны. Иными словами, в начальный момент времени задается профиль бегущей волны фиксированной, малой, но конечной амплитуды, то есть

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2} a \exp(S t - i k x) + c.c. + o(a); \quad (11)$$

где S – комплексная частота волны, $k = 2\pi/\lambda$ – волновое число, выражаемое через длину волны λ , $c.c.$ – комплексно-сопряженное слагаемое. Второе начальное условие будет выбрано в дальнейшем таким образом, чтобы получить наиболее удобное для последующего анализа решение.

3. Решение задачи в нулевом приближении. Допустим, что в нулевом приближении свободная поверхность жидкости является невозмущенной, то есть

$$\xi_0(x, t) = 0.$$

Тогда величины поля скоростей, давления и электрического потенциала будут определены из соотношений (1) – (10) следующим образом:

$$u_0(x, z, t) = v_0(x, z, t) = 0; \quad p_0(x, z, t) = -\frac{E_0^2}{8\pi} - \rho g z; \quad \Phi_0(x, z, t) = -E_0 z.$$

4. Разбиение задачи на порядки малости. Решение задачи (1) – (10) будем искать в виде разложений неизвестных величин отклонения свободной поверхности жидкости от равновесного состояния ξ , поля скоростей $(u, 0, v)$, давления p , электрического потенциала Φ по степеням малого параметра ε :

$$\xi(x, t) = \varepsilon \xi_1(x, t) + \varepsilon^2 \xi_2(x, t) + O(\varepsilon^3); \quad (12)$$

$$u(x, z, t) = \varepsilon u_1(x, z, t) + \varepsilon^2 u_2(x, z, t) + O(\varepsilon^3); \quad (13)$$

$$v(x, z, t) = \varepsilon v_1(x, z, t) + \varepsilon^2 v_2(x, z, t) + O(\varepsilon^3); \quad (14)$$

$$p(x, z, t) = p_0(x, z, t) + \varepsilon p_1(x, z, t) + \varepsilon^2 p_2(x, z, t) + O(\varepsilon^3); \quad (15)$$

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(x, z, t) + \varepsilon \Phi_1(x, z, t) + \varepsilon^2 \Phi_2(x, z, t) + O(\varepsilon^3). \quad (16)$$

В качестве малого параметра можно выбрать, например, отношение малой амплитуды a к капиллярной постоянной:

$$\varepsilon = \frac{a}{\alpha}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}. \quad (17)$$

Подставим выражения (12) – (16) в соотношения (1) – (10), спроектируем граничные условия (4) – (7) при $z = \xi$ на плоскость $z = 0$ и отдельно выделим слагаемые при ε и при ε^2 . Тогда получим краевую задачу для нахождения первого приближения (задача первого порядка малости или 1-задача) и задачу для определения второго приближения (задача второго порядка малости или 2-задача).

5. Математическая постановка 1-задачи.

$$-d \leq z \leq 0: \quad \frac{\partial \vec{U}_1}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_1 \right) - \nu \Delta \vec{U}_1 = 0; \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_1 = 0; \quad (19)$$

$$z \geq 0: \quad \Delta \Phi_1 = 0; \quad (20)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_1}{\partial t} - v_1 = 0; \quad (21)$$

$$-\rho g \xi_1 + p_1 - 2\rho \nu \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} = 0; \quad (22)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0; \quad (23)$$

$$\Phi_1 - E_0 \xi_1 = 0; \quad (24)$$

$$z = -d: \quad u_1 = 0; \quad (25)$$

$$v_1 = 0; \quad (26)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_1| \rightarrow 0; \quad (27)$$

где \vec{U}_1 – векторное поле (u_1, θ, v_1) .

6. Решение 1-задачи. Известно, что уравнения (18), (19) эквивалентны соотношениям

$$\Delta \varphi_1 = 0; \quad (28) \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial t} - \nu \Delta \psi_1 = 0; \quad (29) \quad u_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \frac{\partial \psi_1}{\partial z}; \quad (30)$$

$$v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x}; \quad (31) \quad p_1 = -\rho \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}. \quad (32)$$

Здесь φ_1 имеет смысл потенциала поля скоростей, а ψ_1 – функции тока.

Выражение для возмущения свободной поверхности ξ_1 определяется начальным условием и в комплексной форме представляет собой бегущую волну:

$$\xi_1(x, t) = \eta \text{Exp}(St - i k x), \quad (33)$$

где η некоторым образом выражается через малую амплитуду волны a . Таким образом, задача (18) – (27) сводится к определению величин φ_1 , ψ_1 , Φ_1 , а также комплексной частоты S в формуле (33).

Выражения для неизвестных потенциала скорости φ_1 , функции тока ψ_1 , электрического потенциала Φ_1 будем искать в виде, аналогичном виду ξ_1 :

$$\varphi_1(x, z, t) = B(z) \text{Exp}(St - i k x); \quad (34)$$

$$\psi_1(x, z, t) = C(z) \text{Exp}(St - i k x); \quad (35)$$

$$\Phi_1(x, z, t) = A(z) \text{Exp}(St - i k x); \quad (36)$$

где A, B, C – неизвестные амплитуды, подлежащие определению.

Подставляя выражения (34) – (36) в (20), (28), (29) и поделив левые и правые части полученных уравнений на экспоненты, получим дифференциальные уравнения для определения амплитуд $A(z), B(z), C(z)$:

$$A''(z) = k^2 A(z); \quad (37) \quad B''(z) = k^2 B(z); \quad (38) \quad C''(z) = q^2 C(z), \quad (39)$$

где величина q определяется формулой

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}. \quad (40)$$

Решение уравнения (37) надо выбрать таким, чтобы оно удовлетворяло условию для электрического потенциала на бесконечности (27):

$$A(z) = a \text{Exp}(-k z).$$

Здесь и далее в этом разделе a – не амплитуда возмущения свободной поверхности, а неизвестная постоянная, определяемая из граничных условий (21)–(24). Данное $A(z)$, если его подставить в формулу (36), даст выражение для электрического потенциала:

$$\Phi_1(x, z, t) = a \text{Exp}(St - i k x - k z).$$

И если последнее выражение вместе с (33) мы подставим в граничное условие (24), то сможем выразить a через η :

$$a = E_0 \eta ;$$

и тогда

$$\Phi_1(x, z, t) = E_0 \eta \exp(S t - i k x - k z) . \quad (41)$$

Решение уравнения (38) будет следующим:

$$B(z) = b_0 \operatorname{Ch} k(z + d) + b_1 \operatorname{Sh} k(z + d) ;$$

а решение уравнения (39), отбрасывая частный случай $q = 0$,

$$C(z) = c_0 \operatorname{Ch} q(z + d) + c_1 \operatorname{Sh} q(z + d) ;$$

где b_0, b_1, c_0, c_1 – неизвестные постоянные. Данные выражения для $B(z)$ и $C(z)$ подставим в (34) и (35), чтобы получить формулы для φ_1 и ψ_1 . Затем полученные φ_1 и ψ_1 мы подставим в (30) – (32) и получим выражения для компонент поля скоростей и давления:

$$u_1(x, z, t) = (-i k b_0 \operatorname{Ch} k(z + d) - i k b_1 \operatorname{Sh} k(z + d) - q c_1 \operatorname{Ch} q(z + d) - \\ - q c_0 \operatorname{Sh} q(z + d)) \exp(S t - i k x) ; \quad (42)$$

$$v_1(x, z, t) = (k b_1 \operatorname{Ch} k(z + d) + k b_0 \operatorname{Sh} k(z + d) - i k c_0 \operatorname{Ch} q(z + d) - \\ - i k c_1 \operatorname{Sh} q(z + d)) \exp(S t - i k x) ; \quad (43)$$

$$p_1(x, z, t) = (-\rho S b_0 \operatorname{Ch} k(z + d) - \rho S b_1 \operatorname{Sh} k(z + d)) \exp(S t - i k x) . \quad (44)$$

Теперь подставим формулы (33), (41), (42) – (44) в граничные условия (21) – (23), (25), (26) и получим систему пяти линейных однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных b_0, b_1, c_0, c_1, η . Матрица этой системы имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i \frac{q}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ -k Sh dk & -k Ch dk & i k Ch dq & i k Sh dq & S \\ -\nu(k^2 + q^2) \rho Ch dk & -\nu(k^2 + q^2) \rho Sh dk & 2i \nu \rho k q Sh dq & 2i \nu \rho k q Ch dq & -\frac{\rho}{k} \omega_0^2 \\ -2i k^2 Sh dk & -2i k^2 Ch dk & -(k^2 + q^2) Ch dq & -(k^2 + q^2) Sh dq & 0 \end{pmatrix} \quad (45)$$

где

$$\omega_0^2 = g k \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 - \frac{E_0^2}{4\pi \rho g} k \right) \quad (46)$$

имеет смысл квадрата реальной частоты волны на поверхности жидкости в отсутствие вязкости. Ясно, что данная однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение только тогда, когда определитель матрицы (45) равен нулю. Следовательно,

$$Det M = 0 \quad (47)$$

будет условием разрешимости системы алгебраических уравнений. Также это условие будет и условием разрешимости всей 1-задачи. Оно служит для определения комплексной частоты S , то есть является дисперсионным уравнением задачи.

При выполнении условия (47) пять уравнений системы линейных однородных алгебраических уравнений становятся зависимыми. При этом одно из уравнений можно отбросить, а остальные четыре решить, выразив четыре неизвестных через одну, которая останется неопределенной. В данном случае удобно выразить неизвестные постоянные b_0, b_1, c_0, c_1 через η . В результате этого получим

$$b_0 = \eta \frac{i q}{k} \sigma_2; \quad (48) \quad b_1 = \eta i \sigma_1; \quad (49) \quad c_0 = \eta \sigma_1; \quad (50) \quad c_1 = \eta \sigma_2, \quad (51)$$

где постоянные σ_1, σ_2 имеют вид

$$\sigma_1 = -\frac{i \nu(-2kq \operatorname{Sh} dk + (k^2 + q^2) \operatorname{Sh} dq)}{-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq}, \quad (52)$$

$$\sigma_2 = -\frac{i \nu(2k^2 \operatorname{Ch} dk - (k^2 + q^2) \operatorname{Ch} dq)}{-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq}. \quad (53)$$

Начальное условие (33) 1-задачи должно быть эквивалентно начальному условию (11) всей задачи. Согласно разложению (12) с точностью до величин первого порядка малости

$$\xi(x, z, t) = \varepsilon \xi_1(x, z, t).$$

Поэтому надо потребовать выполнение равенства

$$\varepsilon \eta = \frac{1}{2} a.$$

Тогда отсюда выразим, учитывая равенство (17), величину η :

$$\eta = \frac{\alpha}{2}. \quad (54)$$

Начальное условие (33) 1-задачи эквивалентно начальному условию (11) всей задачи с точностью до величин второго порядка малости и комплексно-сопряженного слагаемого в формуле (11). Для получения полной эквивалентности условий (11) и (33) надо к решению 1-задачи прибавить решение так называемой $\bar{1}$ -задачи – комплексно-сопряженной к 1-задаче. $\bar{1}$ -задача имеет постановку 1-задачи (18) – (27), но с другим начальным условием, которое будет комплексно-сопряженным с условием (33). Задача (18) – (27) линейная, и вполне очевидно, что процедура решения $\bar{1}$ -задачи будет аналогична процедуре решения 1-задачи, при этом результат решения первой будет комплексно-сопряженным с результатом решения последней.

Итак, результатом решения задачи первого порядка малости будут выражения для возмущения свободной поверхности ξ_1 , электрического потенциала Φ_1 , компонент поля скоростей u_1 , v_1 , давления p_1 , которые получаются из формул (33), (41), (42), (43) и

(44) соответственно добавлением комплексно-сопряженных слагаемых:

$$\xi_1(x, t) = \eta \exp(S t - i k x) + c.c.; \quad (55)$$

$$\Phi_1(x, z, t) = E_0 \eta \exp(S t - i k x - k z) + c.c.; \quad (56)$$

$$u_1(x, z, t) = (-i k b_0 \operatorname{Ch} k(z + d) - i k b_1 \operatorname{Sh} k(z + d) - q c_1 \operatorname{Ch} q(z + d) - \\ - q c_0 \operatorname{Sh} q(z + d)) \exp(S t - i k x) + c.c.; \quad (57)$$

$$v_1(x, z, t) = (k b_1 \operatorname{Ch} k(z + d) + k b_0 \operatorname{Sh} k(z + d) - i k c_0 \operatorname{Ch} q(z + d) - \\ - i k c_1 \operatorname{Sh} q(z + d)) \exp(S t - i k x) + c.c.; \quad (58)$$

$$p_1(x, z, t) = (-\rho S b_0 \operatorname{Ch} k(z + d) - \rho S b_1 \operatorname{Sh} k(z + d)) \exp(S t - i k x) + c.c. \quad (59)$$

Представим выражения (55) и (56) в вещественном виде, учитывая формулу для η (54):

$$\xi_1(x, t) = \alpha \exp(\operatorname{Re} S \cdot t) \cos(\operatorname{Im} S \cdot t - k x); \quad (60)$$

$$\Phi_1(x, z, t) = \alpha E_0 \exp(\operatorname{Re} S \cdot t - k z) \cos(\operatorname{Im} S \cdot t - k x). \quad (61)$$

Выражение (61) позволяет определить компоненты электрического поля первого порядка малости. В декартовых координатах они определяются как производные по координатам от электрического потенциала:

$$\vec{E}_1 = \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}, \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right),$$

и в нашем случае они будут иметь вид

$$\vec{E}_1(x, z, t) = \alpha k E_0 \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t - k z) \cdot \begin{pmatrix} \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - k x) \\ 0 \\ -\text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k x) \end{pmatrix}.$$

В формулы (57) – (59) подставим (48) – (51), (54) и приведем их к вещественному виду:

$$\begin{aligned} u_1(x, z, t) = & \alpha \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \left(-\frac{1}{2} \left| q (\sigma_1 + \sigma_2) \right| \text{Exp}(\text{Re } q(d + z)) \times \right. \\ & \times \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Im } q(d + z) + \text{Arg}(q (\sigma_1 + \sigma_2))) + \\ & + \frac{1}{2} \left| q (\sigma_1 - \sigma_2) \right| \text{Exp}(-\text{Re } q(d + z)) \times \\ & \times \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k x - \text{Im } q(d + z) + \text{Arg}(q (\sigma_1 - \sigma_2))) + \\ & + \left| q \sigma_2 \right| \text{Ch } k(d + z) \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Arg}(q \sigma_2)) + \\ & \left. + k \left| \sigma_1 \right| \text{Sh } k(d + z) \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Arg} \sigma_1) \right); \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} v_1(x, z, t) = & \alpha \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \left(\frac{k}{2} \left| \sigma_1 + \sigma_2 \right| \text{Exp}(\text{Re } q(d + z)) \times \right. \\ & \times \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Im } q(d + z) + \text{Arg}(\sigma_1 + \sigma_2)) + \\ & + \frac{k}{2} \left| \sigma_1 - \sigma_2 \right| \text{Exp}(-\text{Re } q(d + z)) \times \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - k x - \text{Im } q(d + z) + \text{Arg}(\sigma_1 - \sigma_2)) - \\ & - k \left| \sigma_1 \right| \text{Ch } k(d + z) \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Arg} \sigma_1) - \\ & \left. - \left| q \sigma_2 \right| \text{Sh } k(d + z) \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - k x + \text{Arg}(q \sigma_2)) \right); \end{aligned} \quad (63)$$

$$p_1(x, z, t) = \alpha \frac{\rho}{k} \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \left(\left| q S \sigma_2 \right| \text{Ch } k(d+z) \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - kx + \text{Arg}(q S \sigma_2)) + \right. \\ \left. + k \left| S \sigma_1 \right| \text{Sh } k(d+z) \text{Sin}(\text{Im } S \cdot t - kx + \text{Arg}(S \sigma_1)) \right). \quad (64)$$

7. Результат решения 1-задачи. Результатом решения задачи первого порядка малости будет значение комплексной частоты S , определяемой как решение дисперсионного уравнения (47), где матрица M задана формулой (45), а q и ω_0^2 определены формулами (40) и (46) соответственно. Кроме того, результатом решения задачи будут выражения (60)–(64), в которых константы σ_1 , σ_2 определяются по формулам (52), (53).

8. Математическая постановка 2-задачи.

$$-d \leq z \leq 0: \quad \frac{\partial \vec{U}_2}{\partial t} + \nabla \left(\frac{1}{\rho} p_2 \right) - \nu \Delta \vec{U}_2 = -\frac{1}{2} \nabla (U_1^2) - (\nabla \times \vec{U}_1) \times \vec{U}_1; \quad (65)$$

$$\nabla \cdot \vec{U}_2 = 0; \quad (66)$$

$$z \geq 0: \quad \Delta \Phi_2 = 0; \quad (67)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi_2}{\partial t} - v_2 = \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x}; \quad (68)$$

$$-\rho g \xi_2 + p_2 - 2\rho \nu \frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial \Phi_2}{\partial z} + \gamma \frac{\partial^2 \xi_2}{\partial x^2} = 2\rho \nu \xi_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \\ - \frac{1}{8\pi} \left(\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \right)^2 \right) + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - 2\rho \nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial z} - 2\rho \nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x}; \quad (69)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial v_2}{\partial x} = 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial z} - \xi_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}; \quad (70)$$

$$\Phi_2 - E_0 \xi_2 = -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}; \quad (71)$$

$$z = -d: \quad u_2 = 0; \quad (72)$$

$$v_2 = 0; \quad (73)$$

$$z \rightarrow \infty: \quad |\nabla \Phi_2| \rightarrow 0; \quad (74)$$

где $\vec{U}_2 = (u_2, 0, v_2)$.

9. Решение 2-задачи.

9.1. Запись задачи в матричной форме. Уравнения (65), (66) можно записать в виде произведения матрицы оператора на вектор-столбец:

$$\Upsilon(u_2, v_2, p_2) = \Upsilon \cdot \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = R_+; \quad (75) \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta & 0 & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{2} \nabla(\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1) - (\nabla \times \vec{U}_1) \times \vec{U}_1 \right)_x \\ \left(-\frac{1}{2} \nabla(\vec{U}_1 \cdot \vec{U}_1) - (\nabla \times \vec{U}_1) \times \vec{U}_1 \right)_z \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (77)$$

Граничные условия (68) – (71) также запишем в матричной форме:

$$\mathbf{B}(u_2, v_2, p_2, \Phi_2) + \Xi \xi_2 = R_+; \quad (78)$$

$$\mathbf{B}(u_2, v_2, p_2, \Phi_2) = \left(\mathbf{B} \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ p_2 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \right)_{z=0};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2\rho\nu \frac{\partial}{\partial z} & 1 & -\frac{E_0}{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \\ -\rho & g + \gamma & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 \\ -E_0 \end{pmatrix}; \quad (79)$$

$$R_+ = \begin{pmatrix} \xi_1 \frac{\partial v_1}{\partial z} - u_1 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \\ 2\rho\nu\xi_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2} - \xi_1 \frac{\partial p_1}{\partial z} - \frac{1}{8\pi} (\nabla \Phi_1)^2 + \frac{E_0}{4\pi} \xi_1 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} - 2\rho\nu \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\ 2 \frac{\partial \xi_1}{\partial x} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial z} \right) - \xi_1 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) \\ -\xi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} \end{pmatrix}_{z=0} \quad (80)$$

Также имеет смысл записать в матричной форме условия на дне (72), (73):

$$X(u_2, v_2) = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \end{pmatrix}_{z=-d} = 0. \quad (81)$$

Другие соотношения 2-задачи остаются неизменными. Таким образом, выражения (67), (74), (75), (78), (81) будут матричной формой задачи второго порядка малости.

9.2. Наблюдения, лежащие в основе идеи решения. Сначала примем во внимание тот факт, что общее решение любой линейной неоднородной краевой задачи есть сумма общего решения соответствующей однородной задачи и какого-либо частного решения этой неоднородной задачи. Наша 2-задача в постановке (65) – (74) является таковой. Нетрудно видеть, что постановка соответствующей однородной задачи эквивалентна постановке 1-задачи (18) – (27), общее решение которой определялось на-

чальным условием (33). Допуская произвол выбора начального условия, положим, что общее решение однородной задачи, соответствующей (65) – (74), определяется начальным условием

$$\xi_{2\text{однородное}}(x, t) = 0.$$

Тогда общее решение однородной задачи, очевидно, будет нулевым, а значит, любое частное решение задачи (65) – (74) автоматически будет ее общим решением. Итак, в дальнейшем ограничимся поиском только частного решения 2-задачи.

Вычисление $R.E.$ по формуле (77) с предварительной подстановкой туда выражений для компонент поля скоростей первого порядка малости (62), (63) в комплексной форме дает следующее:

$$\begin{aligned} R_+ = & \alpha^2 \text{Exp} \left((S + \bar{S}) t \right) \left(\sum_{i=1}^2 (A_i \text{Ch } Q_i(d+z) + H_i \text{Sh } Q_i(d+z) + c.c.) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=3}^5 (A_i \text{Ch } Q_i(d+z) + H_i \text{Sh } Q_i(d+z)) \right) + \\ & + \alpha^2 \left(\text{Exp} (2S t - 2ikx) \left(Z_0 + \sum_{i=1}^2 (Z_i \text{Ch } Q_i(d+z) + \Gamma_i \text{Sh } Q_i(d+z)) \right) + c.c. \right), \end{aligned} \quad (82)$$

где

$$Q_1 = k + q; \quad (83) \quad Q_2 = k - q; \quad (84) \quad Q_3 = q + \bar{q}; \quad (85)$$

$$Q_4 = q - \bar{q}; \quad (86) \quad Q_5 = 2k. \quad (87)$$

Величины A_i, H_i, Z_i, Γ_i – 3-мерные вектора. Формулы для них приведены ниже. Для сокращения записи в них опущена третья компонента, которая равна нулю из-за того, что уравнение (66) однородное.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^3 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - kq^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 + k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2 - q^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \\ \frac{1}{4} (k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 + kq \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 + k^3 \sigma_2 \bar{\sigma}_1 + k^2 q \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \end{pmatrix}; \quad (88)$$

$$H_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - q^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 + k^3 \sigma_2 \bar{\sigma}_1 - kq^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \\ \frac{1}{4} (k^3 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 + k^2 q \sigma_1 \bar{\sigma}_1 + k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2 + kq \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \end{pmatrix}; \quad (89)$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^3 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - kq^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2 + q^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \\ \frac{1}{4} (k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - kq \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - k^3 \sigma_2 \bar{\sigma}_1 + k^2 q \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \end{pmatrix}; \quad (90)$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - q^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - k^3 \sigma_2 \bar{\sigma}_1 + kq^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \\ \frac{1}{4} (k^3 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k^2 q \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2 + kq \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \end{pmatrix}; \quad (91)$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (kq^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k\bar{q}^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_1 + kq^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_2 - k\bar{q}^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \\ \frac{1}{4} (-k^2 q \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - k^2 q \sigma_2 \bar{\sigma}_1 - k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \end{pmatrix}; \quad (92)$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (kq^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_2 - k\bar{q}^2 \sigma_1 \bar{\sigma}_2 + kq^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_1 - k\bar{q}^2 \sigma_2 \bar{\sigma}_1) \\ \frac{1}{4} (-k^2 q \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k^2 \bar{q} \sigma_1 \bar{\sigma}_1 - k^2 q \sigma_2 \bar{\sigma}_2 - k^2 \bar{q} \sigma_2 \bar{\sigma}_2) \end{pmatrix}; \quad (93)$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} \left(kq^2 \sigma_1 \overline{\sigma_1} - k\overline{q}^2 \sigma_1 \overline{\sigma_1} - kq^2 \sigma_2 \overline{\sigma_2} + k\overline{q}^2 \sigma_2 \overline{\sigma_2} \right) \\ \frac{1}{4} \left(k^2 q \sigma_1 \overline{\sigma_2} - k^2 \overline{q} \sigma_1 \overline{\sigma_2} - k^2 q \sigma_2 \overline{\sigma_1} + k^2 \overline{q} \sigma_2 \overline{\sigma_1} \right) \end{pmatrix}; \quad (94)$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} \left(-kq^2 \sigma_1 \overline{\sigma_2} + k\overline{q}^2 \sigma_1 \overline{\sigma_2} + kq^2 \sigma_2 \overline{\sigma_1} - k\overline{q}^2 \sigma_2 \overline{\sigma_1} \right) \\ \frac{1}{4} \left(-k^2 q \sigma_1 \overline{\sigma_1} + k^2 \overline{q} \sigma_1 \overline{\sigma_1} + k^2 q \sigma_2 \overline{\sigma_2} - k^2 \overline{q} \sigma_2 \overline{\sigma_2} \right) \end{pmatrix}; \quad (95)$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k^2}{2} (q \sigma_2 \overline{\sigma_1} + \overline{q} \sigma_1 \overline{\sigma_2}) \end{pmatrix}; \quad (96) \quad H_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k}{2} (k^2 \sigma_1 \overline{\sigma_1} + q \overline{q} \sigma_2 \overline{\sigma_2}) \end{pmatrix}; \quad (97)$$

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (-2k^3 \sigma_1^2 - 2kq^2 \sigma_1^2 + 4kq^2 \sigma_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (98)$$

$$Z_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^3 \sigma_1^2 - 2k^2 q \sigma_1^2 + kq^2 \sigma_1^2 + k^2 q \sigma_2^2 - 2kq^2 \sigma_2^2 + q^3 \sigma_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (99)$$

$$Z_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^3 \sigma_1^2 + 2k^2 q \sigma_1^2 + kq^2 \sigma_1^2 - k^2 q \sigma_2^2 - 2kq^2 \sigma_2^2 - q^3 \sigma_2^2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (100)$$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (k^3 \sigma_1 \sigma_2 - k^2 q \sigma_1 \sigma_2 - kq^2 \sigma_1 \sigma_2 + q^3 \sigma_1 \sigma_2) \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (101)$$

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \frac{i}{8} (-k^3 \sigma_1 \sigma_2 - k^2 q \sigma_1 \sigma_2 + kq^2 \sigma_1 \sigma_2 + q^3 \sigma_1 \sigma_2) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (102)$$

Вычисление R_+ по формуле (80) с подстановкой в него выражений для $\xi_1, u_1, v_1, p_1, \Phi_1$ (60) – (64) в комплексной форме дает

$$R_+ = \alpha^2 \text{Exp} \left((S + \bar{S}) t \right) (N_0 + N_1 Ch dk + \Xi_1 Sh dk + N_2 Ch dq + \Xi_2 Sh dq + \\ + \bar{N}_2 Ch d\bar{q} + \bar{\Xi}_2 Sh d\bar{q}) + \alpha^2 \left(\text{Exp} (2St - 2ikx) (M_0 + M_1 Ch dk + T_1 Sh dk + \right. \\ \left. + M_2 Ch dq + T_2 Sh dq) + c.c. \right), \quad (103)$$

где

$$N_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{E_0 k}{2} \end{pmatrix}; \quad (104) \quad N_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{ikv\rho}{4} (3k^2 - \bar{q}^2) \bar{\sigma}_1 - \frac{ikv\rho}{4} (3k^2 - q^2) \sigma_1 \\ \frac{1}{2} k^2 q \sigma_2 + \frac{1}{2} k^2 \bar{q} \bar{\sigma}_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (105)$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} ik^3 v \rho \sigma_1 \\ -\frac{1}{4} q (3k^2 - q^2) \sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (106) \quad \Xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{iv\rho\bar{q}}{4} (3k^2 - \bar{q}^2) \bar{\sigma}_2 - \frac{iv\rho q}{4} (3k^2 - q^2) \sigma_2 \\ \frac{1}{2} k^3 \sigma_1 + \frac{1}{2} k^3 \bar{\sigma}_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (107)$$

$$\Xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} ik^3 v \rho \sigma_2 \\ -\frac{1}{4} (3k^2 - q^2) q \sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (108) \quad M_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0^2 k^2}{16\pi} \\ 0 \\ \frac{E_0 k}{4} \end{pmatrix}; \quad (109)$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}ikq\sigma_2 \\ \frac{1}{4}ik(5k^2 + q^2)v\rho\sigma_1 \\ -\frac{3}{2}k^2q\sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (110) \quad M_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}ikq\sigma_2 \\ -\frac{1}{2}ik(k^2 + 2q^2)v\rho\sigma_1 \\ \frac{1}{4}(5k^2 + q^2)q\sigma_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (111)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}ik^2\sigma_1 \\ \frac{1}{4}iq(5k^2 + q^2)v\rho\sigma_2 \\ -\frac{3}{2}k^3\sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (112); \quad T_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}ikq\sigma_1 \\ -\frac{1}{2}ik(k^2 + 2q^2)v\rho\sigma_2 \\ \frac{1}{4}(5k^2 + q^2)q\sigma_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (113)$$

Из выражений (82) и (103) нетрудно увидеть, что $R.E.$ – сумма слагаемых вида

$$Exp(\Omega_i t - i K_i x) (A_i Ch Q_i(d + z) + H_i Sh Q_i(d + z)), \quad (114)$$

а $R.B.C.$ – сумма слагаемых вида

$$Exp(\Omega_i t - i K_i x) (N_i Ch dQ_i + \Xi_i Sh dQ_i), \quad (115)$$

где Ω_i , K_i , Q_i – некоторые комплексные постоянные, A_i , H_i – постоянные комплексные вектора размерности 3, а N_i , Ξ_i – комплексные вектора размерности 4, причем Ω_i , K_i , Q_i в (115) не обязательно такие же, как в (114).

Поскольку мы ищем частное решение линейной краевой задачи (67), (75), (78), (81), то вид этого решения будет определяться видом неоднородностей уравнений и краевых условий, составляющих постановку задачи, то есть видом выражений $R.E.$ и $R.B.C.$ или, иначе говоря, суммой слагаемых вида (114) и (115) соответственно. Следовательно, каждая из неизвестных функций u_2 , v_2 , p_2 будет суммой слагаемых вида

$$\text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (a_i \text{Ch } Q_i(d+z) + h_i \text{Sh } Q_i(d+z)) \quad (116)$$

и вида

$$\text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (z_i + c_i(d+z)), \quad (117)$$

где a_i, h_i, z_i, c_i , – некоторые скалярные комплексные постоянные. Из дальнейших рассуждений станет понятно, что слагаемых другого вида не может быть в составе выражений для u_2, v_2, p_2 . Функция Φ_2 является линейной комбинацией аналогичных функций, но удовлетворяющих уравнению (67) и условию (74) – условию на бесконечной высоте, суммой слагаемых вида

$$\text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x - K_i z). \quad (118)$$

Выражение для ξ_2 вследствие того, что последнее от z вообще не зависит, определится суммой слагаемых вида

$$\text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x). \quad (119)$$

Выражения (116) – (119) для одних и тех же Ω_i, K_i, Q_i назовем простейшей волной и обозначим как $(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}, \Phi_{2i}, \xi_{2i})$, а Ω_i, K_i, Q_i назовем параметрами волны.

Рассмотрим действие операторов R, V, X на простейшие волны. Эти операторы линейные, поэтому они своим действием не изменяют значений параметров простейшей волны. Действие оператора R на (u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) связано с некоторыми матрицами. Эти матрицы зависят от параметров простейшей волны Ω_i, K_i, Q_i . Действие оператора сводится к суммированию произведений матриц на столбцы амплитуд простейшей волны так, как это показано ниже:

$$\text{если } (u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i \text{Ch } Q_i(d+z) + H_i \text{Sh } Q_i(d+z)),$$

$$\text{то } R(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) ((\mathbf{R}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot A_i + \mathbf{R}_2(Q_i) \cdot H_i) \text{Ch } Q_i(d+z) +$$

$$+ (\mathbf{R}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot H_i + \mathbf{R}_2(Q_i) \cdot A_i) \text{Sh } Q_i(d+z));$$

если $(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i + H_i(d + z))$,

то $R(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (\mathbf{R}_1(K_i, 0, \Omega_i) \cdot A_i + \mathbf{R}_2(1) \cdot H_i +$
 $+ \mathbf{R}_1(K_i, 0, \Omega_i) \cdot H_i (d + z))$.

Матрицы \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 имеют вид

$$\mathbf{R}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) = \begin{pmatrix} \nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i & 0 & -i \frac{K_i}{\rho} \\ 0 & \nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i & 0 \\ -i K_i & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (120)$$

$$\mathbf{R}_2(Q_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho} Q_i \\ 0 & Q_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Теперь рассмотрим действие оператора \mathbf{B} на простейшую волну $(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}, \Phi_{2i})$. Оно заключается в следующем:

если $(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i \text{Ch } Q_i(d + z) + H_i \text{Sh } Q_i(d + z))$ (122)

и $\Phi_{2i} = f_i \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x - K_i z)$, (123)

то $A(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}, \Phi_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) ((\mathbf{B}_1(K_i) \cdot A_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot H_i) \text{Ch } dQ_i +$

$$+ (\mathbf{B}_1(K_i) \cdot H_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot A_i) \text{Sh } dQ_i + f_i \mathbf{E}(K_i)); \quad (124)$$

если $(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i + H_i(d + z))$ (125)

и $\Phi_{2i} = f_i \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x - K_i z)$, (126)

$$\begin{aligned} \text{то } B(u_{2i}, v_{2i}, p_{2i}, \Phi_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (B_1(K_i) \cdot A_i + B_2(1) \cdot H_i + \\ + B_1(K_i) \cdot H_i d + f_i E(K_i)). \end{aligned} \quad (127)$$

При этом матрицы B_1 , B_2 вектор E имеют вид

$$B_1(K_i) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -iK_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (128) \quad B_2(Q_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\nu\rho & Q_i & 0 \\ Q_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (129)$$

$$E(K_i) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{E_0 K_i}{4\pi} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (130)$$

Совсем просто выглядит действие оператора Δ на простейшую волну:

$$\text{если } (u_{2i}, v_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i \text{Ch } Q_i(d+z) + H_i \text{Sh } Q_i(d+z))$$

$$\text{или } (u_{2i}, v_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i + H_i(d+z)),$$

$$\text{то } X(u_{2i}, v_{2i}) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) A_i.$$

9.3. Идея решения. Основным в идее решения является поиск не общего, а всего лишь частного решения 2-задачи, что уже было аргументировано. Также важным моментом является представление решения в виде суммы гибкой и негибкой частей. Негибкая часть решения задачи – набор величин $(u_2^+, v_2^+, p_2^+, \Phi_2^+)$, в котором

$$\Phi_2^+ = 0;$$

удовлетворяющий уравнению (67) и линейному матричному уравнению (75), но не обязательно удовлетворяющий остальным соотношениям 2-задачи. Гибкая часть решения – набор $(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*, \xi_2)$, который удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (75) и всем остальным соотношениям 2-задачи, то есть (67), (74), (78), (81), таким образом, что сумма

$$(u_2, v_2, p_2, \Phi_2, \xi_2) = (u_2^+, v_2^+, p_2^+, 0, 0) + (u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*, \xi_2); \quad (131)$$

будет решением линейной неоднородной краевой 2-задачи (67), (74), (75), (78), (81).

Чтобы найти набор величин негибкой части решения (u_2^+, v_2^+, p_2^+) , надо найти матрицы \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 , зависящие от параметров простейшей волны, такие, что

$$\text{если } R(u_{2i}^+, v_{2i}^+, p_{2i}^+) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) (A_i \text{Ch } Q_i(d+z) + B_i \text{Sh } Q_i(d+z)), \quad (132)$$

$$\text{то } (u_{2i}^+, v_{2i}^+, p_{2i}^+) = \text{Exp}(\Omega_i t - i K_i x) \times$$

$$\begin{aligned} & \times ((\mathbf{L}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{A}_i + \mathbf{L}_2(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{B}_i) \text{Ch } Q_i(d+z) + \\ & + (\mathbf{L}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{B}_i + \mathbf{L}_2(K_i, Q_i, \Omega_i) \cdot \mathbf{A}_i) \text{Sh } Q_i(d+z)), \end{aligned} \quad (133)$$

где $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_i$ – 3-мерные вектора, значения которых известны. Матрицы \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 в определенном смысле являются обратными к \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , так как переводят изображение оператора R в его прообраз в отличие от \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 , действие которых эквивалентно действию оператора R . Матрицы \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 удовлетворяют соотношениям

$$\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{R}_2 = \mathbf{E}; \quad (134) \quad \mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{L}_2 \cdot \mathbf{R}_1 = \mathbf{O}, \quad (135)$$

где \mathbf{E} – единичная матрица 3×3 , а \mathbf{O} – матрица 3×3 из нулей. Зная \mathbf{R}_1 и \mathbf{R}_2 из (120), (121) по формулам (134) и (135), можно вычислить \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 :

$$\mathbf{L}_1(K_i, Q_i, \Omega_i) = \frac{1}{(K_i^2 - Q_i^2)(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -Q_i^2 & 0 & iK_i(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i) \\ 0 & K_i^2 & 0 \\ i\rho K_i(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i) & 0 & \rho(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i)^2 \end{pmatrix}; \quad (136)$$

$$\mathbf{L}_2(K_i, Q_i, \Omega_i) = -\frac{Q_i}{(K_i^2 - Q_i^2)(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i)} \times \\ \times \begin{pmatrix} 0 & iK_i & 0 \\ iK_i & 0 & \nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i \\ 0 & \rho(\nu(K_i^2 - Q_i^2) + \Omega_i) & 0 \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Гибкая часть решения $(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*)$ удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (75), и это однородное матричное уравнение, очевидно, аналогично системе уравнений (18), (19) 1-задачи. Процедура решения этих уравнений подробно описана в пункте 6. Этапы скаляризации уравнений (65), (66), получение содержащего неопределенные константы решения этих уравнений относительно потенциала и функции тока, переход от них к выражениям для u_2^*, v_2^*, p_2^* будут аналогичны соответствующим шагам для 1-задачи вплоть до этапа обращения к граничным условиям (68) – (73), которые, в отличие от 1-задачи, являются неоднородными.

Подстановка (131) в (78) и (81) дает систему матричных уравнений:

$$\mathbf{B}(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*) + \Xi \xi_2 = R_+ - \mathbf{B}(u_2^+, v_2^+, p_2^+, 0); \quad (138)$$

$$\mathbf{X}(u_2^*, v_2^*) = -\mathbf{X}(u_2^+, v_2^+). \quad (139)$$

Удовлетворяя этим уравнениям, мы найдем неопределенные константы, входящие в гибкую часть решения $(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*, \xi_2)$.

9.4. Этапы решения. Негибкая часть решения 2-задачи получается как сумма отдельных простейших волн в $R.E.$ (выражение (82)), преобразованных по принципу, изложенному в пункте

9.3, а именно простейшая волна (132) преобразуется в (133). В итоге имеем

$$\begin{aligned}
(u_2^+, v_2^+, p_2^+) = & \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) \left(\sum_{i=1}^2 \left((\mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i) \times \right. \right. \\
& \times \text{Ch } Q_i(d+z) + (\mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i) \text{Sh } Q_i(d+z) + c.c. \Big) + \\
& + \sum_{i=3}^5 \left((\mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i) \text{Ch } Q_i(d+z) + \right. \\
& + (\mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i) \text{Sh } Q_i(d+z) \Big) + \\
& + \alpha^2 \left(\text{Exp}(2S t - 2i k x) (\mathbf{L}_1(2k, 0, 2S) \cdot \mathbf{Z}_0 + \right. \\
& + \sum_{i=1}^2 ((\mathbf{L}_1(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{Z}_i + \mathbf{L}_2(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{\Gamma}_i) \text{Ch } Q_i(d+z) + \\
& + (\mathbf{L}_1(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{\Gamma}_i + \mathbf{L}_2(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{Z}_i) \text{Sh } Q_i(d+z)) \Big) + c.c. \Big), \quad (140)
\end{aligned}$$

где Q_i определяются выражениями (83) – (87), \mathbf{A}_i , \mathbf{H}_i , \mathbf{Z}_i , $\mathbf{\Gamma}_i$ – формулами (88) – (102), матрицы \mathbf{L}_1 , \mathbf{L}_2 – выражениями (136), (137).

Перед тем как искать гибкую часть решения 2-задачи, подробно рассмотрим правые части соотношений (138), (139). Применяя к отдельным слагаемым негибкой части решения $(u_2^+, v_2^+, p_2^+, \Phi_2^+ = 0)$, оператор \mathbf{B} по вышеупомянутому принципу, когда простейшие волны (122) и (123) преобразуются в (124) –, прибавляя затем $R.B.C.$ (выражение (103)), получим правую часть (138) в виде

$$R_+ - \mathbf{B}(u^+, v^+, p^+, 0) = \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) (\mathbf{N}_0 + \mathbf{N}_1 \text{Ch } dk + \mathbf{\Xi}_1 \text{Sh } dk +$$

$$\begin{aligned}
& + (N_2 Ch dq + \Xi_2 Sh dq + c.c.) - \sum_{i=1}^2 ((\mathbf{B}_1(0) \cdot \alpha_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \beta_i) Ch dQ_i + \\
& + (\mathbf{B}_1(0) \cdot \beta_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \alpha_i) Sh dQ_i + c.c.) - \\
& - \sum_{i=3}^5 ((\mathbf{B}_1(0) \cdot \alpha_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \beta_i) Ch dQ_i + (\mathbf{B}_1(0) \cdot \beta_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \alpha_i) Sh dQ_i) \Big) + \\
& + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) (M_0 + M_1 Ch dk + T_1 Sh dk + M_2 Ch dq + T_2 Sh dq - \\
& - \mathbf{B}_1(2k) \cdot \mathbf{L}_1(2k, 0, 2S) \cdot \mathbf{Z}_0 - \sum_{i=1}^2 ((\mathbf{B}_1(2k) \cdot \lambda_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \mu_i) Ch dQ_i + \\
& + (\mathbf{B}_1(2k) \cdot \mu_i + \mathbf{B}_2(Q_i) \cdot \lambda_i) Sh dQ_i)) + c.c.). \tag{141}
\end{aligned}$$

Здесь $\alpha_i, \beta_i, \lambda_i, \mu_i$, определяются по формулам:

$$\alpha_i = \mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i;$$

$$\beta_i = \mathbf{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{H}_i + \mathbf{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot \mathbf{A}_i;$$

$$\lambda_i = \mathbf{L}_1(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{Z}_i + \mathbf{L}_2(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{\Gamma}_i;$$

$$\mu_i = \mathbf{L}_1(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{\Gamma}_i + \mathbf{L}_2(2k, Q_i, 2S) \cdot \mathbf{Z}_i;$$

вектора $\mathbf{A}_i, \mathbf{H}_i, \mathbf{Z}_i, \mathbf{\Gamma}_i$ — по формулам (104) – (113), матрицы \mathbf{B}_1 и \mathbf{B}_2 — по формулам (128), (129).

Правая часть формулы (139) вычисляется следующим образом: сначала берутся две первые компоненты векторного выражения (140), затем в них делается подстановка $z = -d$. В результате имеем

$$\begin{aligned}
-X(u_2^+, v_2^+) = & -\alpha^2 \text{Exp}\left((S + \bar{S})t\right) \left(\sum_{i=1}^2 \left(\tilde{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot A_i + \tilde{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot H_i + \right. \right. \\
& \left. \left. + c.c. \right) + \sum_{i=3}^5 \left(\tilde{L}_1(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot A_i + \tilde{L}_2(0, Q_i, S + \bar{S}) \cdot H_i \right) \right) - \\
& -\alpha^2 \left(\text{Exp}(2S t - 2i k x) \left(\tilde{L}_1(2k, 0, 2S) \cdot Z_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \sum_{i=1}^2 \left(\tilde{L}_1(2k, Q_i, 2S) \cdot Z_i + \tilde{L}_2(2k, Q_i, 2S) \cdot \Gamma_i \right) \right) + c.c. \right); \quad (142)
\end{aligned}$$

где матрицы \tilde{L}_1 и \tilde{L}_2 получаются из L_1 , L_2 отсечением третьей строки.

Как нетрудно видеть, правые части соотношений (138), (139) – выражения (141) и (142) – представляют собой линейные комбинации множителей $\text{Exp}((S + \bar{S})t)$ и $\text{Exp}(2S t - 2i k x)$. Следовательно, левые части соотношений (138), (139) также будут линейными комбинациями этих множителей. Так как операторы Ξ и X линейные и не изменяют параметры простейшей волны, то величины набора $(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*, \xi_2)$ будут линейными комбинациями множителей $\text{Exp}((S + \bar{S})t)$ и $\text{Exp}(2S t - 2i k x)$.

Гибкая часть решения 2-задачи является решением уравнения (67) и линейного однородного матричного уравнения, соответствующего (75), которое приводится к системе скалярных уравнений:

$$\Delta \varphi_2^* = 0; \quad (143) \quad \frac{\partial \psi_2^*}{\partial t} - \nu \Delta \psi_2^* = 0; \quad (144) \quad u_2^* = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial x} - \frac{\partial \psi_2^*}{\partial z}; \quad (145)$$

$$v_2^* = \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial z} + \frac{\partial \psi_2^*}{\partial x}; \quad (146) \quad p_2^* = -\rho \frac{\partial \varphi_2^*}{\partial t}. \quad (147)$$

Согласно замечаниям из предыдущего параграфа и тому, что частные производные в формулах (145) – (147) не изменяют пара-

метры простейшей волны, потенциал φ_2^* и функция тока ψ_2^* будут линейными комбинациями множителей $Exp((S + \bar{S})t)$ и $Exp(2S t - 2i k x)$, то есть искать гибкую часть решения 2-задачи надо в виде

$$\Phi_2^*(x, z, t) = \alpha^2 Exp((S + \bar{S})t) A_0(z) + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) A_1(z) + c.c.); \quad (148)$$

$$\varphi_2^*(x, z, t) = \alpha^2 Exp((S + \bar{S})t) B_0(z) + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) B_1(z) + c.c.); \quad (149)$$

$$\psi_2^*(x, z, t) = \alpha^2 Exp((S + \bar{S})t) C_0(z) + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) C_1(z) + c.c.); \quad (150)$$

$$\xi_2(x, t) = \alpha^2 Exp((S + \bar{S})t) Z_0 + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) Z_1 + c.c.). \quad (151)$$

Подставляя (148) в уравнение (67) и учитывая граничное условие (74) получим, что A_0 и A_1 удовлетворяют равенствам

$$A_0(z) = a_0; \quad (152) \quad A_1(z) = a_1 Exp(-2 k z), \quad (153)$$

где a_0 и a_1 – неизвестные постоянные, определяемые из условий (138), (139). Подставив выражение (149) в (143), получим, что

$$B_0(z) = b_{00} + b_{10}(d + z); \quad (154)$$

$$B_1(z) = b_{01} Ch 2k(d + z) + b_{11} Sh 2k(d + z), \quad (155)$$

где b_{00} , b_{01} , b_{10} , b_{11} – неизвестные постоянные. Подставляя (150) в (144), получим

$$C_0(z) = c_{00} Ch w_0(d + z) + c_{10} Sh w_0(d + z); \quad (156)$$

$$C_1(z) = c_{01} Ch w_1(d + z) + c_{11} Sh w_1(d + z), \quad (157)$$

где c_{00} , c_{01} , c_{10} , c_{11} – неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий 2-задачи, и

$$w_0 = \sqrt{\frac{S + \bar{S}}{\nu}}; \quad (160) \quad w_1 = \sqrt{4k^2 + \frac{2S}{\nu}}. \quad (161)$$

Далее мы должны постулировать равенство

$$C_0(z) \equiv 0, \quad (162)$$

что может иметь место, только если $c_{00} = c_{01} = 0$. В случае когда $ReS < 0$, то есть когда малые возмущения поверхности жидкости не приводят к реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, функция $C_0(z)$ согласно (156) является периодической по z и ее амплитуда постоянна по z . Это соответствует тому, что внутри слоя жидкости на всем его вертикальном протяжении в поле скоростей присутствует горизонтальная компонента, величина которой одинакова по всей толщине слоя. При очень большой толщине слоя наличие данной компоненты поля скоростей соответствует большому запасу кинетической энергии внутри жидкости, который не может обеспечиваться малым возмущением покоящейся жидкости. Таким образом, ситуацию $C_0(z) \neq 0$ не рассматриваем и считаем, что

$$c_{00} = 0; \quad c_{01} = 0.$$

Выражение для Φ_2^* получаем, подставляя (152), (153) в (148):

$$\Phi_2^*(x, z, t) = \alpha^2 a_0 \text{Exp}((S + \bar{S})t) + \alpha^2 (a_1 \text{Exp}(2St - 2ikx - 2kz) + c.c.). \quad (163)$$

Подставив (154) и (155) в (149), (157) и (162) в (150), а затем выражения для φ_2^* (149) и ψ_2^* (150) в формулы (145) – (147), получим выражение для других компонент гибкой части решения 2-задачи:

$$\begin{aligned} (u_2^*, v_2^*, p_2^*) = & \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) (b_{00} \mathbf{f}_0 + b_{10} \mathbf{j}_0 + b_{10} \mathbf{l}_0 (d + z) + \\ & + \alpha^2 (\text{Exp}(2St - 2ikx) (b_{01} (\mathbf{f}_1 \text{Ch } 2k(d + z) + \mathbf{h}_1 \text{Sh } 2k(d + z)) + \\ & + b_{11} (\mathbf{j}_1 \text{Ch } 2k(d + z) + \mathbf{l}_1 \text{Sh } 2k(d + z)) + c_{01} (\mathbf{n}_1 \text{Ch } w_1(d + z) + \mathbf{p}_1 \text{Sh } w_1(d + z)) + \end{aligned}$$

$$+ c_{11}(\mathbf{r}_1 Ch w_1(d+z) + \mathbf{t}_1 Sh w_1(d+z))) + c.c.), \quad (164)$$

где

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{l}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\rho(S + \bar{S}) \end{pmatrix}; \quad \mathbf{j}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{l}_1 = \begin{pmatrix} -2i & k \\ 0 \\ -2\rho & S \end{pmatrix}; \quad \mathbf{h}_1 = \mathbf{j}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2k \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n}_1 = \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2i & k \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{p}_1 = \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -w_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь можно вычислить левую часть граничного условия (138). Для этого применим оператор \mathbf{B} к гибкой части решения (163), (164) по принципу: простейшие волны вида (122), (123) преобразуются в выражение вида (124), а волны вида (125), (126) – в (127). К полученному выражению прибавим результат действия оператора Ξ (79) на ξ_2 , имеющий вид (151). Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(u_2^*, v_2^*, p_2^*, \Phi_2^*) + \Xi \xi_2 = & \alpha^2 Exp((S + \bar{S})t) (\mathbf{B}_1(0) \cdot (b_{00}\mathbf{f}_0 + b_{10}\mathbf{j}_0) + b_{10}\mathbf{B}_2(1) \cdot \mathbf{l}_0 + \\ & + b_{10}\mathbf{B}_1(0) \cdot \mathbf{l}_0 d + a_0\mathbf{E}(0) + \mathbf{Z}_0\mathbf{Z}_0) + \\ & + \alpha^2 (Exp(2S t - 2i k x) ((\mathbf{B}_1(2k) \cdot (b_{01}\mathbf{f}_1 + b_{11}\mathbf{j}_1) + \mathbf{B}_2(2k) \cdot (b_{01}\mathbf{h}_1 + b_{11}\mathbf{l}_1)) Ch 2dk + \\ & + (\mathbf{B}_1(2k) \cdot (b_{01}\mathbf{h}_1 + b_{11}\mathbf{l}_1) + \mathbf{B}_2(2k) \cdot (b_{01}\mathbf{f}_1 + b_{11}\mathbf{j}_1)) Sh 2dk + (\mathbf{B}_1(2k) \cdot (c_{01}\mathbf{n}_1 + c_{11}\mathbf{r}_1) + \\ & + \mathbf{B}_2(w_1) \cdot (c_{01}\mathbf{p}_1 + c_{11}\mathbf{t}_1)) Ch dw_1 + (\mathbf{B}_1(2k) \cdot (c_{01}\mathbf{p}_1 + c_{11}\mathbf{t}_1) + \mathbf{B}_2(w_1) \cdot (c_{01}\mathbf{n}_1 + c_{11}\mathbf{r}_1)) \\ & Sh dw_1 + a_1\mathbf{E}(2k) + \mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_1) + c.c.), \end{aligned} \quad (165)$$

где матрицы \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , вектор \mathbf{E} определяются выражениями (128), (129), (130) соответственно,

$$Z_0 = \begin{pmatrix} S + \bar{S} \\ -\rho & g \\ 0 \\ -E_0 \end{pmatrix}; \quad Z_1 = \begin{pmatrix} 2 & S \\ -\rho & g - 4\gamma & k^2 \\ 0 \\ -E_0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы получить левую часть равенства (139), надо выбрать первые две компоненты гибкой части решения (164). Для этого все выражение (164) надо умножить на матрицу

$$\tilde{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

которая есть единичная матрица с отсеченной последней строкой. Затем присвоить z значение $(-d)$. В итоге получим

$$X(u_2^*, v_2^*) = \tilde{E} \cdot \left(\alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) (b_{00}\mathbf{f}_0 + b_{10}\mathbf{j}_0) + \alpha^2 (\text{Exp}(2S t - 2i k x) (b_{01}\mathbf{f}_1 + b_{11}\mathbf{j}_1 + c_{01}\mathbf{n}_1 + c_{11}\mathbf{r}_0) + c.c.) \right). \quad (166)$$

В результате имеются выражения для гибкой части решения 2-задачи – (151), (163) и (164), которые содержат неизвестные постоянные. Для определения этих неизвестных постоянных имеются матричные уравнения (138) и (139). Выражения для отдельных слагаемых этих уравнений (141), (142), (165), (166) надо подставить в (138), (139). При этом (138), (139) превратится в систему двенадцати скалярных алгебраических уравнений с десятью неизвестными $a_0, a_1, b_{00}, b_{01}, b_{10}, b_{11}, c_{01}, c_{11}, Z_0, Z_1$. Решая эту систему методом Гаусса, определяем значения неизвестных:

$$a_0 = \frac{E_0 k}{2}; \quad (167) \quad a_1 = E_0 Z_1 + \frac{E_0 k}{4}; \quad (168)$$

$$b_{00} = -\frac{v}{8w_0^2} \cdot \frac{1}{(-q \text{ Chd}q \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}q)(-\bar{q} \text{ Chd}\bar{q} \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}\bar{q})}.$$

$$\cdot (4k^4 q \bar{q} - 4k^2 q \bar{q} \cdot (k^2 + q^2) \cdot \text{Chd}k \text{ Chd}q + 4k^3 \bar{q} \cdot (k^2 + q^2) \cdot$$

$$\begin{aligned}
& \cdot Shdk \ Shdq + (k^4 - 6k^2q^2 + q^4) \times (-q\bar{q} \cdot Chdq \ Chd\bar{q} + k^2 \cdot Shdq \ Shd\bar{q}) - \\
& -kq \cdot (2k^2 - q^2 - \bar{q}^2) \cdot Sh2dk \ Chdq \ Shd\bar{q}) + (2k^4 - 4k^2q^2 + q^4 + q^2\bar{q}^2) \cdot \\
& \cdot (q\bar{q} \cdot Chdq \ Chd\bar{q} + k^2 \cdot Shdq \ Shd\bar{q}) \cdot Ch2dk) + c.c.; \quad (169)
\end{aligned}$$

$$b_{01} = \frac{iw_1}{2k} \cdot c_{11} - \frac{((3k^4 + 6k^2q^2 - q^4) \cdot \sigma_1^2 + 8k^2q^2 \cdot \sigma_2^2)}{8\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)}; \quad (170)$$

$$b_{10} = 0; \quad (171)$$

$$b_{11} = i \cdot c_{01} - \frac{2k^3q \cdot \sigma_1\sigma_2}{\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)}; \quad (172)$$

$$\begin{aligned}
c_{01} = & -\frac{i\nu}{2\Delta_{z_1}} \cdot (4k\nu^2\rho w_1(16k^4 - w_1^4) \cdot R_{22} + 8ik^2\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2) \cdot R_{13} \cdot Chdw_1 - \\
& - (2ik\rho\omega_1^2 \cdot R_{13} + \rho\omega_1^2(4k^2 + w_1^2) \cdot R_{11} - 2k\nu(16k^4 - w_1^4) \cdot R_{121}) \cdot Shdw_1 - i\nu^2\rho w_1 \times \\
& \times (16k^4 - w_1^4) \cdot R_{13} \cdot Ch2dk + w_1 \cdot (4\rho k\omega_1^2 \cdot R_{11} + i\rho\omega_1^2 \cdot R_{13} - 8k^2\nu(4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121}) \times \\
& \times Sh2dk - 32k^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2) \cdot R_{22} \cdot Ch2dk \ Chdw_1 - 32ik^3\nu^2\rho w_1(4k^2 - w_1^2) \cdot R_{21} \times \\
& \times Sh2dk \ Chdw_1 + \rho(4k^2 - w_1^2)(\omega_1^2 \cdot R_{22} + i\nu^2(4k^2 + w_1^2) \cdot R_{21}) \cdot Ch2dk \ Shdw_1 + \\
& + i\rho(4k^2 - w_1^2)(\omega_1^2 \cdot R_{21} - i\nu^2(4k^2 + w_1^2) \cdot R_{22}) \cdot Sh2dk \ Shdw_1); \quad (173)
\end{aligned}$$

$$c_{11} = \frac{\nu}{2\Delta_{z_1}} \cdot (8k^2\nu^2\rho(16k^4 - w_1^4) \cdot R_{21} + (2k\rho\omega_1^2 \cdot R_{13} - i\rho\omega_1^2(4k^2 + w_1^2) \cdot R_{11} + 2ik\nu \times$$

$$\begin{aligned}
& \times (16k^4 - w_1^4) \cdot R_{121}) \cdot Chdw_1 - 8k^2 v^2 \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{13} \cdot Shdw_1 + 2k \cdot (4ik\rho\omega_1^2 \cdot R_{11} - \\
& - \rho\omega_1^2 \cdot R_{13} - 8ik^2 v (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121}) \cdot Ch2dk + 2k v^2 \rho (16k^4 - w_1^4) \cdot R_{13} \cdot Sh2dk - \\
& - 32ik^3 v^2 \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{22} \cdot Ch2dk Shdw_1 + 32k^3 v^2 \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{21} \cdot Sh2dk \times \\
& \times Shdw_1 + i\rho(4k^2 - w_1^2)(\omega_1^2 \cdot R_{22} + iv^2(4k^2 + w_1^2)^2 \cdot R_{21}) \cdot Ch2dk Chdw_1 - \rho(4k^2 - w_1^2) \times \\
& \times (\omega_1^2 \cdot R_{21} - iv^2(4k^2 + w_1^2)^2 \cdot R_{22}) \cdot Sh2dk Chdw_1); \quad (174)
\end{aligned}$$

$$Z_0 = 0; \quad (175)$$

$$\begin{aligned}
Z_1 &= \frac{v}{2\Delta_{Z_1}} (16k^2 v \rho w_1 (4k^2 + w_1^2) \cdot R_{11} + 2ik v \rho w_1 (12k^2 + w_1^2) \cdot R_{13} + v \rho w_1 (16k^4 - w_1^4) \times \\
& \times R_{22} \cdot Ch dw_1 + 2ik v \rho (16k^4 - w_1^4) \cdot R_{21} \cdot Sh dw_1 - 8k^2 v \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{22} \cdot Ch2dk - \\
& - 8ik^2 v \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{21} \cdot Sh2dk - v \rho w_1 ((80k^4 + 8k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot R_{11} + 2ik(12k^2 + w_1^2) \times \\
& \times R_{13}) \cdot Ch2dk Chdw_1 + 2k v \rho ((16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot R_{11} + 2ik(4k^2 + 3w_1^2) \cdot R_{13}) \times \\
& \times Sh 2dk \cdot Sh dw_1 - 2k w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121} \cdot Sh2dk Chdw_1 + \\
& + 4k^2 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121} \cdot Ch2dk Shdw_1), \quad (176)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\Delta_{Z_1} &= \rho S \cdot (16k^2 v^2 w_1 (4k^2 + w_1^2) - w_1 (v^2 (80k^4 + 8k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot Ch2dk + \omega_1^2 \cdot Sh2dk) \times \\
& \times Chdw_1 + 2k(\omega_1^2 \cdot Ch2dk + v^2 (16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot Sh2dk) \cdot Sh dw_1); \quad (177)
\end{aligned}$$

$$R_{11} = \frac{\nu k}{2(9k^2 - q^2)(-q \text{ Chd}q \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}q)} \cdot (4k^2 q \cdot (5k^2 + q^2) - q \times \\ \times (31k^4 + 10k^2 q^2 - q^4) \cdot \text{Chd}k \text{ Chd}q + k \cdot (3k^4 + 22k^2 q^2 - q^4) \cdot \text{Shd}k \text{ Shd}q); \quad (178)$$

$$R_{121} = -\frac{E_0^2 k^2}{16\pi} + \frac{(k^2 - q^2)^2 \nu^2 \rho}{4} - \frac{\rho ((k^2 + q^2) \cdot \sigma_1^2 - 2q^2 \cdot \sigma_2^2)}{8} + \frac{k \rho}{2(9k^4 - 10k^2 q^2 + q^4)} \times \\ \times (k \cdot ((9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \text{Chd}k \text{ Chd}q + 4kq \cdot (3k^2 + q^2) \cdot \text{Shd}k \text{ Shd}q) \cdot \sigma_1^2 + \\ + q \cdot (4kq \cdot (3k^2 + q^2) \cdot \text{Chd}k \text{ Chd}q + (9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \text{Shd}k \text{ Shd}q) \cdot \sigma_2^2 + \\ + (q \cdot (21k^4 + 14k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \text{Shd}k \text{ Chd}q + \\ + k \cdot (9k^4 + 22k^2 q^2 + q^4) \cdot \text{Chd}k \text{ Shd}q) \cdot \sigma_1 \sigma_2); \quad (179)$$

$$R_{13} = \frac{i \nu k^2}{(9k^2 - q^2)(-q \text{ Chd}q \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}q)} \cdot (q \cdot (31k^4 + q^4) - 2q \times \\ \times (22k^4 + 11k^2 q^2 - q^4) \cdot \text{Chd}k \text{ Chd}q + 2k^3 \cdot (3k^2 + 13q^2) \cdot \text{Shd}k \text{ Shd}q); \quad (180)$$

$$R_{21} = \frac{i k ((3k^4 + 6k^2 q^2 - q^4) \cdot \sigma_1^2 + 8k^2 q^2 \cdot \sigma_2^2)}{4\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)}; \quad (181)$$

$$R_{22} = -\frac{4k^4 q \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)}. \quad (182)$$

Набор величин (131) не удовлетворяет равенствам (78), (81) полностью, а удовлетворяет соотношениям

$$B(u_2, v_2, p_2, \Phi_2) + \Xi \xi_2 = R.B.C. - \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{12} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (183)$$

$$X(u_2, v_2) = -\alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) \cdot \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (184)$$

где

$$\begin{aligned} r_{12} = & \frac{1}{(3k^2 - q^2 - 2k\bar{q})(3k^2 - q^2 + 2k\bar{q})(-q \text{ Chd}q \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}q)} \times \\ & \times \frac{1}{(3k^2 - \bar{q}^2 - 2kq)(3k^2 - \bar{q}^2 + 2kq)(-\bar{q} \text{ Chd}\bar{q} \text{ Shd}k + k \text{ Chd}k \text{ Shd}\bar{q})} \times \\ & \times \frac{ik\nu}{4(k^2 - q\bar{q})(k^2 + q\bar{q})} \times (k\bar{q} \cdot (684k^{14} - 967k^{12}q^2 + 597k^{10}q^4 - 215k^8q^6 + 45k^6q^8 - \\ & - 4k^4q^{10} - 477k^{12}\bar{q}^2 - 522k^{10}q^2\bar{q}^2 + 1008k^8q^4\bar{q}^2 - 532k^6q^6\bar{q}^2 + 127k^4q^8\bar{q}^2 - \\ & - 12k^2q^{10}\bar{q}^2 - 31k^{10}\bar{q}^4 + 726k^8q^2\bar{q}^4 - 392k^6q^4\bar{q}^4 + 50k^4q^6\bar{q}^4 + 3k^2q^8\bar{q}^4 + 77k^8\bar{q}^6 + \\ & + 32k^6q^2\bar{q}^6 - 154k^4q^4\bar{q}^6 + 28k^2q^6\bar{q}^6 + q^8\bar{q}^6 - 13k^6\bar{q}^8 - 159k^4q^2\bar{q}^8 + 67k^2q^4\bar{q}^8 - \\ & - 3q^6\bar{q}^8 + 46k^2q^2\bar{q}^{10} - 6q^4\bar{q}^{10} - 4q^2\bar{q}^{12}) \cdot (-q \text{ Shd}k \text{ Chd}q + k \text{ Chd}k \text{ Shd}q) + \\ & + k^2q \cdot (468k^{14} - 441k^{12}q^2 + 116k^{10}q^4 - k^8q^6 - 2k^6q^8 - 259k^{12}\bar{q}^2 - 786k^{10}q^2\bar{q}^2 + \\ & + 962k^8q^4\bar{q}^2 - 396k^6q^6\bar{q}^2 + 77k^4q^8\bar{q}^2 - 6k^2q^{10}\bar{q}^2 - 14k^{10}\bar{q}^4 + 432k^8q^2\bar{q}^4 + 44k^6q^4\bar{q}^4 - \\ & - 134k^4q^6\bar{q}^4 + 30k^2q^8\bar{q}^4 - 2q^{10}\bar{q}^4 - 13k^8\bar{q}^6 + 296k^6q^2\bar{q}^6 - 370k^4q^4\bar{q}^6 + 72k^2q^6\bar{q}^6 - \\ & - q^8\bar{q}^6 + 22k^6\bar{q}^8 - 229k^4q^2\bar{q}^8 + 104k^2q^4\bar{q}^8 - 5q^6\bar{q}^8 - 4k^4\bar{q}^{10} + 52k^2q^2\bar{q}^{10} - 8q^4\bar{q}^{10} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -4q^2\bar{q}^{12}) \cdot Chdq Shd\bar{q} + k^2q \cdot (k^4 - q^2\bar{q}^2) \cdot (252k^{10} - 135k^8q^2 - 52k^6q^4 + 41k^4q^6 - \\
& -6k^2q^8 - 757k^8\bar{q}^2 + 524k^6q^2\bar{q}^2 - 127k^4q^4\bar{q}^2 + 22k^2q^6\bar{q}^2 - 2q^8\bar{q}^2 + 704k^6\bar{q}^4 - \\
& -319k^4q^2\bar{q}^4 + 38k^2q^4\bar{q}^4 + q^6\bar{q}^4 - 291k^4\bar{q}^6 + 62k^2q^2\bar{q}^6 - 3q^4\bar{q}^6 + 56k^2\bar{q}^8 - 4q^2\bar{q}^8 - \\
& -4\bar{q}^{10}) \cdot Ch2dk Chdq Shd\bar{q} - kq\bar{q} \cdot (q^2 - \bar{q}^2) \cdot (110k^{12} - 313k^{10}q^2 + 172k^8q^4 - 43k^6q^6 + \\
& + 4k^4q^8 + 111k^8q^2\bar{q}^2 - 31k^6q^4\bar{q}^2 - 8k^4q^6\bar{q}^2 + 2k^2q^8\bar{q}^2 + 8k^4q^4\bar{q}^4 - 15k^2q^6\bar{q}^4 + \\
& + 2q^8\bar{q}^4 + q^6\bar{q}^6) \cdot Sh2dk Chdq Chd\bar{q} - k^3 \cdot (q^2 - \bar{q}^2) \cdot (201k^{12} - 443k^{10}q^2 + 160k^8q^4 - \\
& - 19k^6q^6 - 160k^8q^2\bar{q}^2 + 685k^6q^4\bar{q}^2 - 318k^4q^6\bar{q}^2 + 60k^2q^8\bar{q}^2 - 4q^{10}\bar{q}^2 - 265k^4q^4\bar{q}^4 + \\
& + 117k^2q^6\bar{q}^4 - 8q^8\bar{q}^4 - 6q^6\bar{q}^6) \cdot Sh2dk Shdq Shd\bar{q}) + c.c.; \quad (185)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \frac{k^2 - q^2}{(3k^2 - q^2 - 2k\bar{q})(3k^2 - q^2 + 2k\bar{q})(-q Chdq Shdk + k Chdk Shdq)} \times \\
& \times \frac{k^2 - \bar{q}^2}{(3k^2 - \bar{q}^2 - 2kq)(3k^2 - \bar{q}^2 + 2kq)(-\bar{q} Chd\bar{q} Shdk + k Chdk Shd\bar{q})} \times \\
& \times \frac{ik\nu(q^2 - \bar{q}^2)}{16(k^2 - q\bar{q})(k^2 + q\bar{q})} \times (-4k^2q\bar{q} \cdot (35k^6 - 48k^4q^2 + 8k^2q^4 + 7k^2q^2\bar{q}^2 - 2q^4\bar{q}^2) - \\
& - 8k^2q\bar{q} \cdot (k^4 - q^2\bar{q}^2) \cdot (k^2 - q^2) \cdot Ch2dk + q\bar{q} \cdot (k^2 + q^2) \cdot (37k^4 - 25k^2q^2 + 4q^4 - \\
& - 25k^2\bar{q}^2 + 5q^2\bar{q}^2 + 4\bar{q}^4) \cdot (4k^2 \cdot Chdk - (k^2 + \bar{q}^2) \cdot Chd\bar{q}) \cdot Chdq - (k^2 + q^2) \cdot (33k^6 - \\
& - 23k^4q^2 + 4k^2q^4 - 23k^4\bar{q}^2 + 9k^2q^2\bar{q}^2 - 2q^4\bar{q}^2 + 4k^2\bar{q}^4 - 2q^2\bar{q}^4) \cdot (4k\bar{q} \cdot Shdk - \\
& - (k^2 + \bar{q}^2) \cdot Shd\bar{q}) \cdot Shdq) + c.c. \quad (186)
\end{aligned}$$

Поскольку в общем случае $r_{12} \neq 0$ и $r_2 \neq 0$, то имеется неразрешимость, которая должна быть преодолена.

9.5. Преодоление неразрешимости. Для устранения неразрешимости модифицируем набор неизвестных величин в 2-задаче. Будем считать, что решение имеет вид

$$(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{p}_2, \Phi_2, \xi_2) = (u_2, v_2, p_2, \Phi_2, \xi_2) + (U_2, V_2, P_2, 0, 0), \quad (187)$$

где $(u_2, v_2, p_2, \Phi_2, \xi_2)$ – решение, найденное в пункте 9.3, а $(U_2, V_2, P_2, 0, 0)$ является решением следующей задачи:

$$R(U_2, V_2, P_2) = 0; \quad (188) \quad B(U_2, V_2, P_2, 0) = \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_{12} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (189)$$

$$X(U_2, V_2) = \alpha^2 \text{Exp}((S + \bar{S})t) \cdot \begin{pmatrix} r_2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (190)$$

Будем искать решение задачи (188) – (190) со следующими начальными условиями:

$$t = 0: \quad U_2 = 0; \quad (191) \quad V_2 = 0. \quad (192)$$

Задача (188) – (192) совпадает с задачей определения поля скоростей и давления в слое вязкой жидкости конечной глубины, на горизонтальной свободной поверхности которого в начальный момент времени включается тангенциальное натяжение $\sim \text{Exp}((S + \bar{S})t)$ и твердое дно смещается в горизонтальном направлении со скоростью $\sim \text{Exp}((S + \bar{S})t)$. Поэтому решение данной задачи существует.

Будем искать решение задачи (188) – (192) в виде

$$U_2 = U_2(t, z); \quad (193) \quad V_2 = 0; \quad (194) \quad P_2 = 0. \quad (195)$$

Тогда задача (188) – (192) сводится к определению неизвестной функции $U_2(t, z)$, которая является решением следующей краевой задачи:

$$-d \leq z \leq 0: \frac{\partial U_2}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2 U_2}{\partial z^2} = 0; \quad (196)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial U_2}{\partial z} = r_{12} \cdot \text{Exp}((S + \bar{S})t); \quad (197)$$

$$z = -d: \quad U_2 = r_2 \cdot \text{Exp}((S + \bar{S})t); \quad (198)$$

$$t = 0: \quad U_2 = 0. \quad (199)$$

Будем искать решение задачи (196) – (199), применяя преобразование Лапласа. Найдем изображения соотношений (196) – (199). Они будут иметь вид

$$-d \leq z \leq 0: p\tilde{U}_2 - \nu \frac{\partial^2 \tilde{U}_2}{\partial z^2} = 0; \quad (200)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial \tilde{U}_2}{\partial z} = r_{12} \cdot \frac{1}{p - \nu w_0^2}; \quad (201)$$

$$z = -d: \quad \tilde{U}_2 = r_2 \cdot \frac{1}{p - \nu w_0^2}, \quad (202)$$

где $\tilde{U}_2 = \tilde{U}_2(p, z)$ – изображение неизвестной функции $U_2(t, z)$, а w_0 определяется выражением (160).

Решение уравнения (200) имеет вид

$$\tilde{U}_2(p, z) = a(p) \text{Exp}\left(z\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right) + b(p) \text{Exp}\left(-z\sqrt{\frac{p}{\nu}}\right), \quad (203)$$

где $a(p)$ и $b(p)$ – функции, определяемые из граничных условий (201), (202), выражения для которых имеют вид

$$a(p) = \frac{\text{Exp}\left(d\sqrt{\frac{p}{v}}\right) \cdot \left(r_{12}\sqrt{\frac{v}{p}} \cdot \text{Exp}\left(d\sqrt{\frac{p}{v}}\right) + r_2\right)}{\left(1 + \text{Exp}\left(2d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)\right) \cdot (p - vw_0^2)}; \quad (204)$$

$$b(p) = \frac{r_2 \cdot \text{Exp}\left(d\sqrt{\frac{p}{v}}\right) - r_{12}\sqrt{\frac{v}{p}}}{\left(1 + \text{Exp}\left(2d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)\right) \cdot (p - vw_0^2)}. \quad (205)$$

Так как $\text{Exp}(-d\sqrt{p/v}) < 1$, то выражения (204) и (205) можно представить в виде разложений по целым неотрицательным степеням $\text{Exp}(-d\sqrt{p/v})$:

$$a(p) = r_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Exp}\left(-(2n+1) \cdot d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{p - vw_0^2} - r_{12}\sqrt{v} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Exp}\left(-(2n+2) \cdot d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(p - vw_0^2)} +$$

$$+ r_{12}\sqrt{v} \cdot \frac{1}{\sqrt{p}(p - vw_0^2)}; \quad (206)$$

$$b(p) = r_2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Exp}\left(-(2n+1) \cdot d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{p - vw_0^2} - r_{12}\sqrt{v} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\text{Exp}\left(-(2n+2) \cdot d\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(p - vw_0^2)}$$

Подставляя данные выражения в (203) и затем разлагая его на простые дроби, получим формулу для образа неизвестной функции \tilde{U}_2 :

$$\begin{aligned}
\tilde{U}_2(p, z) = & \frac{r_{12}}{2w_0} \cdot \left(\frac{\text{Exp}\left(z\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-w_0\sqrt{v})} - \frac{\text{Exp}\left(z\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+w_0\sqrt{v})} \right) + \frac{r_2}{2w_0\sqrt{v}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\
& \times \left(\frac{\text{Exp}\left((z-(2n+1)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}-w_0\sqrt{v}} - \frac{\text{Exp}\left((z-(2n+1)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}+w_0\sqrt{v}} \right) + \\
& + \frac{\text{Exp}\left((-z-(2n+1)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}-w_0\sqrt{v}} - \frac{\text{Exp}\left((-z-(2n+1)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}+w_0\sqrt{v}} \right) - \frac{r_{12}}{2w_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\
& \times \left(\frac{\text{Exp}\left((z-(2n+2)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-w_0\sqrt{v})} - \frac{\text{Exp}\left((z-(2n+2)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+w_0\sqrt{v})} \right) + \\
& + \frac{\text{Exp}\left((-z-(2n+2)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}-w_0\sqrt{v})} - \frac{\text{Exp}\left((-z-(2n+2)\cdot d)\sqrt{\frac{p}{v}}\right)}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+w_0\sqrt{v})} \right). \quad (208)
\end{aligned}$$

Оригинал данного изображения легко находится при помощи таблиц преобразований, которые можно найти в справочнике по математике. Окончательное выражение для оригинала функции \tilde{U}_2 имеет вид

$$U_2(t, z) = \frac{r_{12}}{2w_0} \cdot \text{Exp}(w_0^2 t) \cdot \left(\text{Exp}(w_0 z) \cdot \text{Erfc}\left(\frac{-z}{2\sqrt{v}t} - w_0\sqrt{v}t\right) - \text{Exp}(-w_0 z) \times \right.$$

$$\begin{aligned}
& \times \operatorname{Erfc}\left(\frac{-z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right) - \frac{r_{12}}{2w_0} \cdot \operatorname{Exp}(\nu w_0^2 t) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \times \\
& \times \left(\operatorname{Exp}(w_0(z - d(2 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(2 + 2n) - z}{2\sqrt{\nu t}} - w_0\sqrt{\nu t}\right) + \right. \\
& + \operatorname{Exp}(w_0(-z - d(2 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(2 + 2n) + z}{2\sqrt{\nu t}} - w_0\sqrt{\nu t}\right) - \\
& - \operatorname{Exp}(-w_0(z - d(2 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(2 + 2n) - z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right) - \\
& - \operatorname{Exp}(-w_0(-z - d(2 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(2 + 2n) + z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right) \Bigg) + \frac{r_2}{2} \cdot \operatorname{Exp}(\nu w_0^2 t) \times \\
& \times \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\operatorname{Exp}(w_0(z - d(1 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(1 + 2n) - z}{2\sqrt{\nu t}} - w_0\sqrt{\nu t}\right) + \right. \\
& + \operatorname{Exp}(w_0(-z - d(1 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(1 + 2n) + z}{2\sqrt{\nu t}} - w_0\sqrt{\nu t}\right) + \\
& + \operatorname{Exp}(-w_0(z - d(1 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(1 + 2n) - z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right) + \\
& + \operatorname{Exp}(-w_0(-z - d(1 + 2n))) \cdot \operatorname{Erfc}\left(\frac{d(1 + 2n) + z}{2\sqrt{\nu t}} + w_0\sqrt{\nu t}\right) \Bigg). \quad (209)
\end{aligned}$$

9.6. Результат решения 2-задачи. Итогом решения 2-задачи в постановке (65) – (74) будут выражения для компоненты профиля свободной поверхности второго порядка малости ξ_2 (151), в котором Z_1 – комплексная амплитуда, определяемая (171), для электрического потенциала (163), в котором a_0 и a_1 определяются (167) и (168) соответственно. Выражения для вертикальной компоненты поля скоростей и давления являются суммой соответствующих компонент негибкой и гибкой части решения, определяемых по формулам (140) и (164). Величина горизонтальной компоненты поля скоростей определяется как сумма соответствующих компонент негибкой части решения (140), гибкой части решения (164) и слагаемого $\alpha^2 U_2(t, z)$, где $U_2(t, z)$ определяется выражением (209).

10. Итог решения всей задачи. Требовалось определить возмущение свободной поверхности – функцию $\xi(x, t)$. Для нее имеется формула (12). Подставляя в нее выражения (33) для ξ_1 и (169) для ξ_2 , вспоминая, что малый параметр ε определялся по формуле (17) и приводя все выражение к вещественному виду, получим с точностью до величин второго порядка малости по амплитуде волны результат:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = & a \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(\text{Im } S \cdot t - k \cdot x) + \\ & + 2a^2 \cdot |Z_1| \cdot \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(2 \text{Im } S \cdot t - 2 k \cdot x + \text{Arg } Z_1). \end{aligned} \quad (210)$$

11. Анализ решения. Наиболее интересный результат данной задачи – амплитудный множитель нелинейной поправки к профилю волны Z_1 . Его величина характеризует силу нелинейного взаимодействия и в то же время зависит от многих параметров, в числе которых глубина жидкого слоя и вязкость жидкости. Весьма полезным представляется анализ поведения этой величины в зависимости от глубины и вязкости жидкости.

При аналитическом исследовании нелинейных волн на поверхности жидкости часто обращают внимание на профиль бегущей волны. При этом оцениваются такие величины, как заостренность гребня волны и его наклон. Данные величины определяются множителем Z_1 . Известно, что чем больше кривизна

профиля волны на вершине, тем больше заостренность гребня. Покажем, что кривизна профиля на вершине пропорциональна $Re Z_1$. Тогда можно будет сказать, что с ростом $Re Z_1$ заостренность гребней увеличивается.

Точки вершин гребней нелинейной волны и самые нижние точки впадин определяются как соответственно точки максимума и минимума выражения (210). Если приравнять нулю первую производную этого выражения по координате, то получим формулу для нахождения этих точек:

$$\sin(\operatorname{Im} S \cdot t - k \cdot x) + 4a \cdot |Z_1| \cdot \exp(\operatorname{Re} S \cdot t) \cdot \sin(2 \operatorname{Im} S \cdot t - 2k \cdot x + \operatorname{Arg} Z_1) = 0. \quad (211)$$

Будем считать, что амплитуда волны a мала, и искать точки экстремума функции (210) в виде

$$\operatorname{Im} S \cdot t_1 - k \cdot x_1 = \theta_0 + a \theta_1.$$

Подставим данное выражение в (211) и разложим последнее по малой амплитуде, отбрасывая слагаемые выше первого порядка малости. При этом окажется, что точки экстремума определяются следующим образом:

$$\operatorname{Im} S \cdot t_1 - k \cdot x_1 = \pi n - 4(-1)^n \cdot a \cdot \operatorname{Im} Z_1 \cdot \exp(\operatorname{Re} S \cdot t_1). \quad (212)$$

Значение второй производной выражения (210) по координате в точках максимума и минимума будет иметь вид

$$\frac{\partial^2 \xi(x_1, t_1)}{\partial x^2} = -k^2 a \cdot \exp(\operatorname{Re} S \cdot t_1) \cdot \left((-1)^n + 8a \operatorname{Re} Z_1 \exp(\operatorname{Re} S \cdot t_1) \right),$$

где четное n соответствует точкам максимума, а нечетное n — точкам минимума. Таким образом, относительное изменение кривизны профиля волны на вершине, вызванное нелинейной поправкой, определяется выражением

$$8a \operatorname{Re} Z_1 \exp(\operatorname{Re} S \cdot t_1),$$

то есть пропорционально действительной части Z_1 . С увеличением $Re Z_1$ растет кривизна профиля волны на вершине, а значит, увеличивается заостренность гребня.

Похожим способом можно показать, что с увеличением по модулю мнимой части Z_1 увеличивается наклон гребней волн, причем гребни направлены в сторону движения волны, когда $Im Z_1 > 0$, и в обратную сторону, когда $Im Z_1 < 0$. Примем за угол наклона гребня угол между вертикалью и прямой, соединяющей основание гребня с его вершиной. Основанием гребня будем считать точку с ординатой $z = 0$ и абсциссой, удовлетворяющей равенству

$$Im S \cdot t_0 - k \cdot x_0 = \pi n. \quad (213)$$

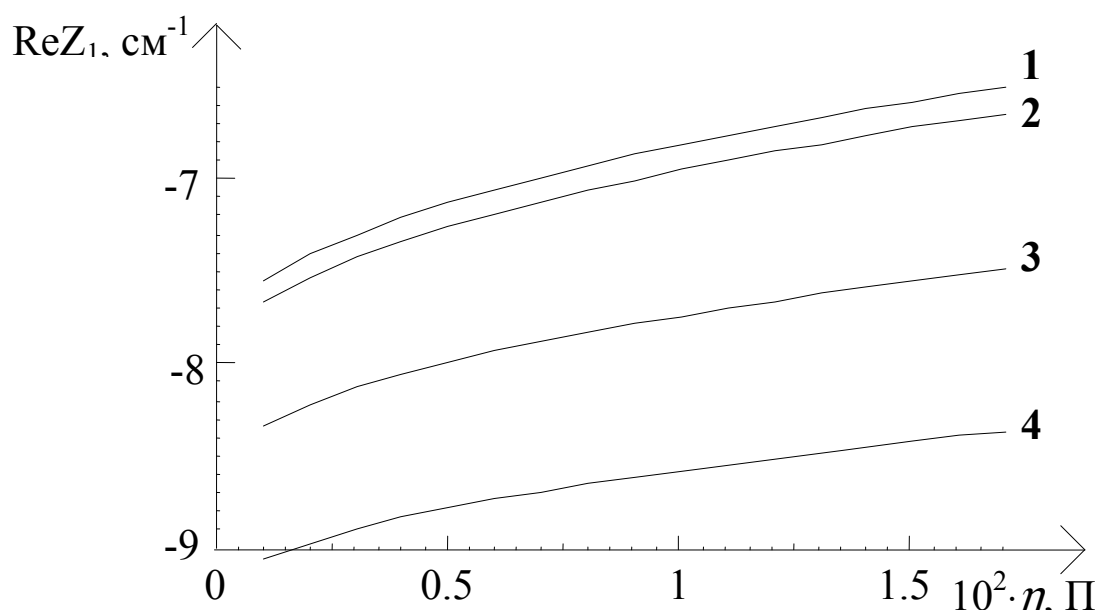
Нетрудно убедиться в том, что последнее выражение будет точкой экстремума профиля линейной по амплитуде волны. А так как гребни линейной волны не имеют наклона, то введенная нами точка основания гребня нелинейной волны будет являться и основанием гребня линейной. Искомый угол наклона определяется формулой

$$\varphi = Arctg((x_1 - x_0)/a),$$

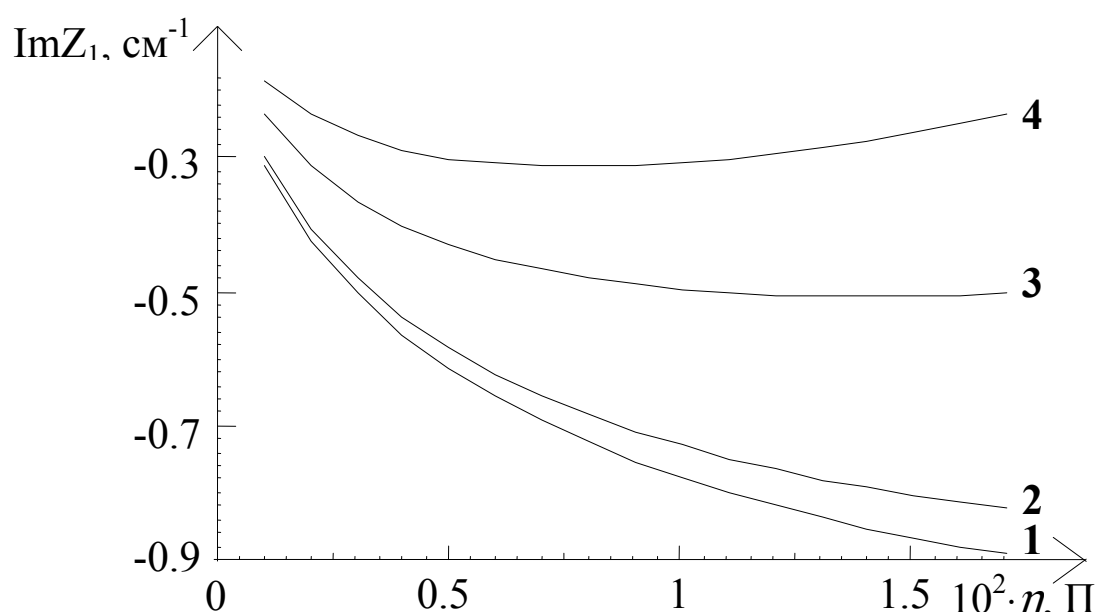
где x_0 и x_1 находятся из (212), (213). Полагая, что n должно быть четным в (212) и (213), найдем искомый угол:

$$\varphi = Arctg\left(\frac{4 Im Z_1}{k} Exp(Re S \cdot t)\right).$$

Данное соотношение наглядно демонстрирует зависимость угла наклона гребня волны от мнимой части амплитудного множителя Z_1 .

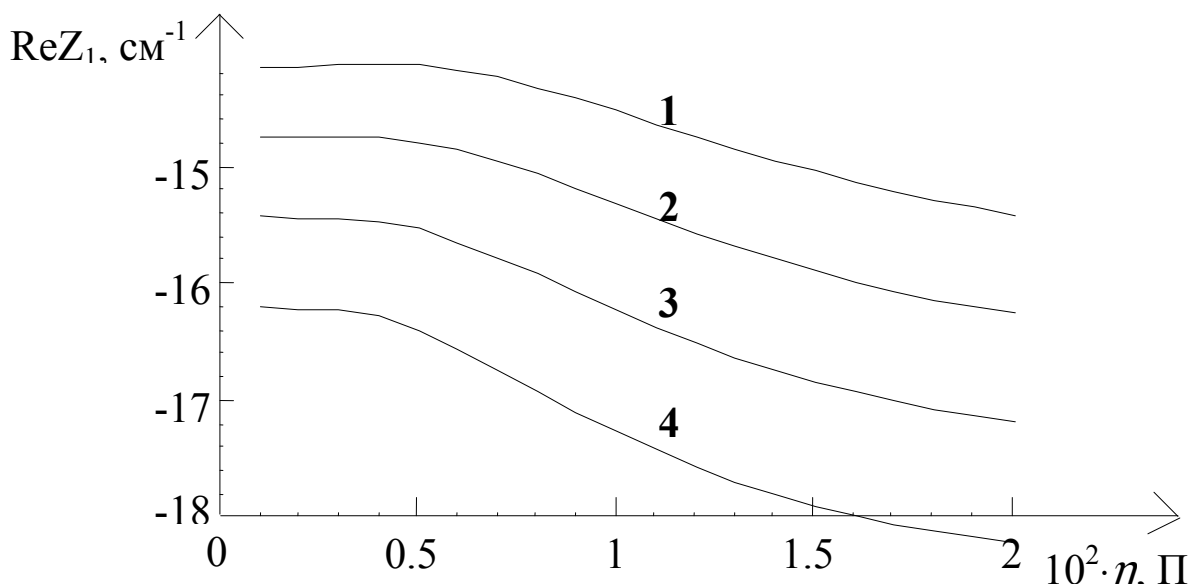


a

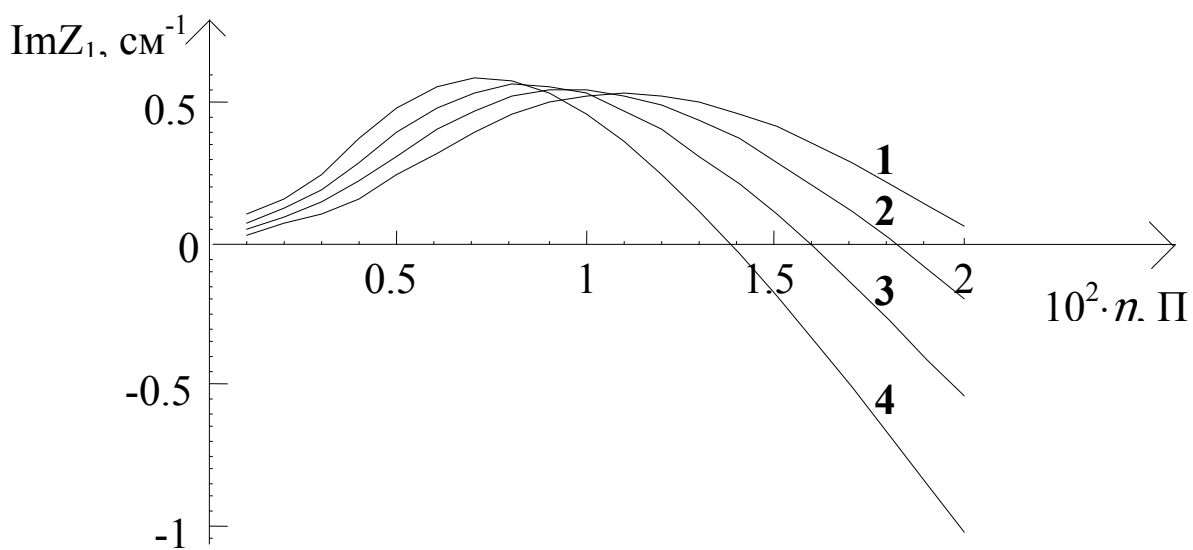


b

*Рис. 1. Зависимости действительной (а) и мнимой (b) частей Z_1 от вязкости для коротких волн длиной $\lambda = 0.1$ см при больших значениях толщины слоя:
1) $d = 4 \lambda$, 2) $d = 0.4 \lambda$, 3) $d = 0.25 \lambda$, 4) $d = 0.2 \lambda$.*



a



b

*Рис. 2. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей Z_1 от вязкости для коротких волн длиной $\lambda = 0.1$ см при малых значениях толщины слоя:
1) $d = 0.1 \lambda$, 2) $d = 0.95 \lambda$, 3) $d = 0.9 \lambda$, 4) $d = 0.85 \lambda$*

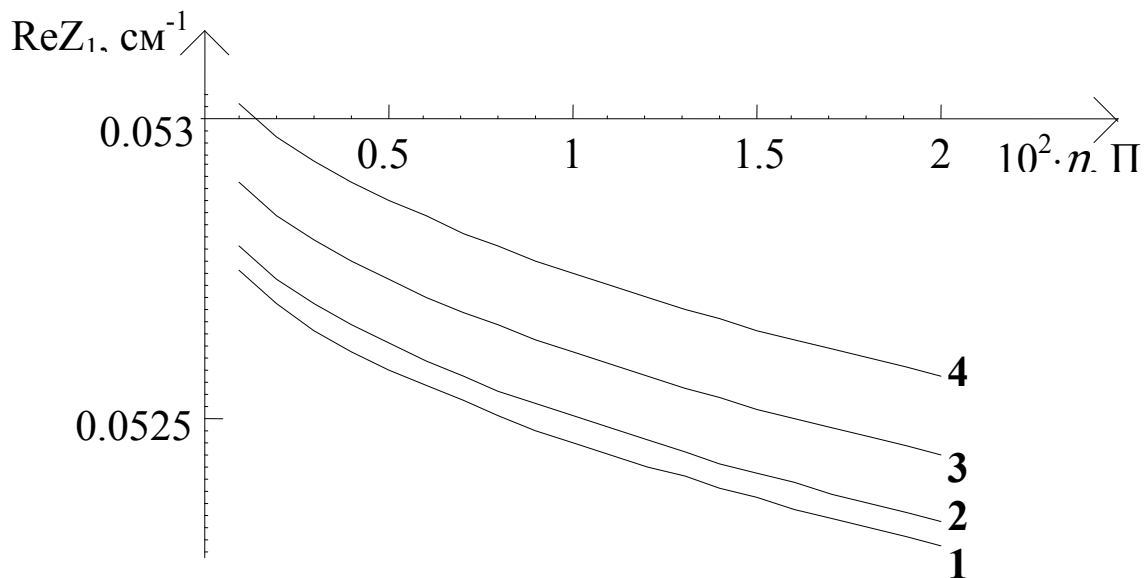


Рис.3. Зависимости действительной части Z_l от вязкости для длинных волн длиной $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя:
1) $d = 4 \lambda$, 2) $d = 0.73 \lambda$, 3) $d = 0.63 \lambda$, 4) $d = 0.58 \lambda$.

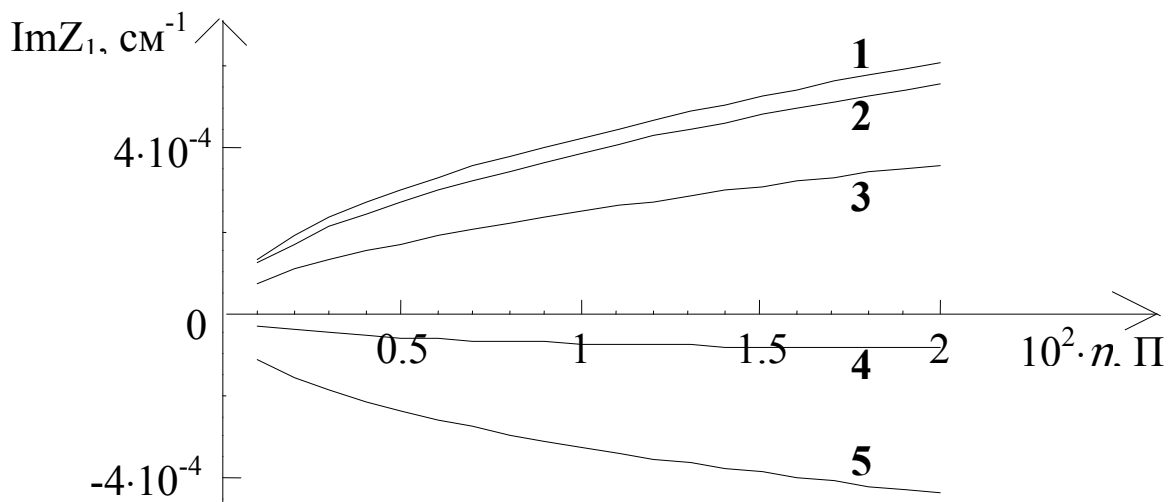


Рис.4. Зависимости мнимой части Z_l от вязкости для длинных волн длиной $\lambda = 30$ см при больших значениях толщины слоя:
1) $d = 4 \lambda$, 2) $d = 0.33 \lambda$, 3) $d = 0.23 \lambda$, 4) $d = 0.19 \lambda$, 5) $d = 0.17 \lambda$.

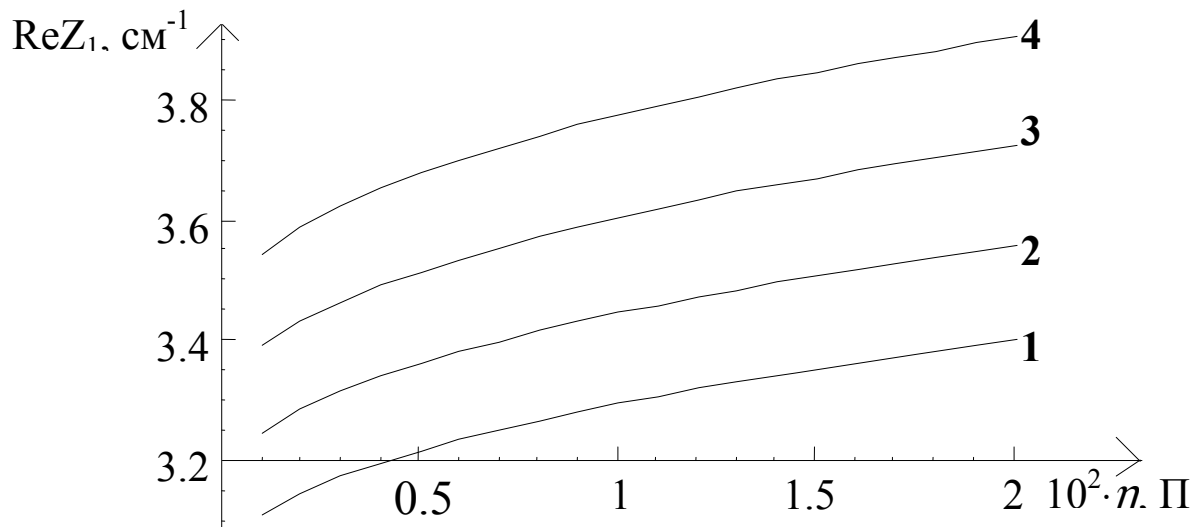


Рис.5. Зависимости действительной части Z_1 от вязкости для длинных волн длиной $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя:
 1) $d = 5 \cdot 10^{-2} \lambda$, 2) $d = 4.93 \cdot 10^{-2} \lambda$,
 3) $d = 4.87 \cdot 10^{-2} \lambda$, 4) $d = 4.8 \cdot 10^{-2} \lambda$.

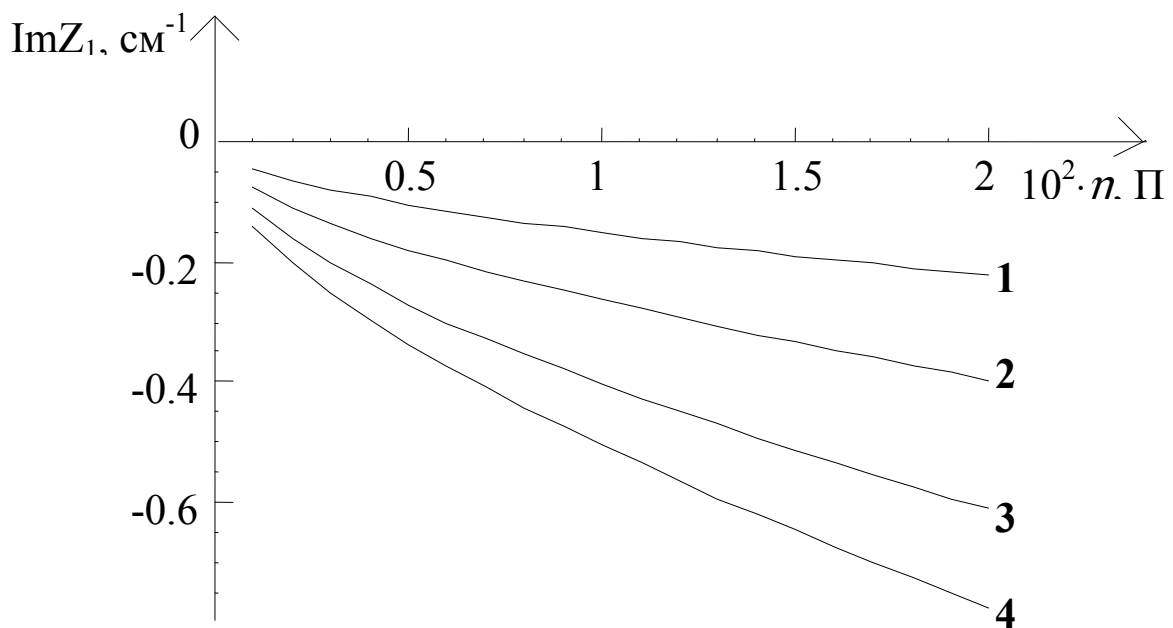


Рис.6. Зависимости мнимой части Z_1 от вязкости для длинных волн длиной $\lambda = 30$ см при малых значениях толщины слоя:
 1) $d = 5.67 \cdot 10^{-2} \lambda$, 2) $d = 5.17 \cdot 10^{-2} \lambda$,
 3) $d = 4.83 \cdot 10^{-2} \lambda$, 4) $d = 4.67 \cdot 10^{-2} \lambda$.

На рис. 1 – 6 показаны зависимости вещественной и мнимой части Z_1 от динамической вязкости при различных значениях глубины слоя жидкости, в качестве которой берется вода ($\rho = 0,998$ г/см³, $\gamma = 72,8$ дин/см, $g = 981$ см/сек²). Здесь предполагается отсутствие электрического поля ($E_0 = 0$). Ранее было известно, что короткие капиллярные волны на поверхности глубокой жидкости имеют притупленные гребни. Из рис. 1 нетрудно видеть, что с ростом вязкости жидкости вершины таких волн заостряются, также появляется наклон в сторону, обратную движению волны, который увеличивается с вязкостью. Уменьшение толщины слоя в этом случае дает обратный эффект: гребни волн притупляются, а их наклон в сторону, обратную движению волны, исчезает. Дальнейшее снижение толщины слоя жидкости ($\approx 1/10 \lambda$, λ – длина волны) еще более притупляет гребни волн (см. рис. 2), однако изменяется характер зависимости от вязкости. Здесь рост вязкости также более притупляет вершины волн. Зависимость наклона гребней от вязкости при столь малой глубине слоя жидкости носит сложный характер. Во-первых, в отличие от глубокой жидкости имеет место наклон в сторону движения волны, и, во-вторых, с ростом вязкости этот наклон увеличивается до определенного значения, а затем сходит на нет и меняется в противоположную сторону.

Несколько иной характер имеют аналогичные зависимости для длинных гравитационных волн. Из рис. 3 – 4 нетрудно видеть, что в случаях толщины слоя порядка длины волны и более сила нелинейного взаимодействия, определяемая величинами $Re Z_1$ и $Im Z_1$, на два-три порядка меньше, чем для коротких капиллярных волн. Однако для очень малых глубин – $\approx 1/20 \lambda$ (см. рис. 5 – 6) – столь существенного различия в силе проявления нелинейных эффектов для длинных и коротких волн нет. Как видно из рис. 3 – 4, гребни гравитационных волн на поверхности слоя жидкости глубиной порядка длины волны заострены и имеют слабый наклон в сторону движения волны. С уменьшением глубины заостренность вершин волн увеличивается, а наклон уменьшается и при значениях $\approx 1/5 \lambda$ изменяется в противоположную сторону. Зависимость от вязкости такова, что заостренность гребней уменьшается с ростом первой, а их наклон увели-

чивается. Похожие зависимости имеют место и для очень малой толщины слоя жидкости – $\approx 1/20 \lambda$ (см. рис. 5 – 6) – с той разницей, что вязкость жидкости не уменьшает, а увеличивает заостренность гребней волн.

2.2. Оценка асимптотической пригодности выражений для поля скоростей жидкости в математической модели волн на плоской свободной поверхности вязкой жидкости

В [52] путем прямого асимптотического разложения по амплитуде волны, считающейся малой по сравнению с длиной волны, построена модель волнового движения в полубесконечном объеме вязкой электропроводной несжимаемой жидкости во внешнем электростатическом поле. Модель описывает движение жидкости, вызванное волной, бегущей по плоской в поле сил тяжести свободной поверхности жидкости. Подробное рассмотрение этой математической модели позволило определить в асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде волны профиль бегущей поверхностной волны и поле скоростей внутри жидкости.

Расчеты показали, что найденные асимптотические выражения для поля скоростей жидкости не обладают свойством равномерной пригодности на всем интервале времени, начиная с начального момента времени и до бесконечности. Интервал времени, на котором асимптотические выражения для поля скоростей жидкости являются равномерно пригодными, является конечным. Причина этого в особенностях математической модели и используемых в модели математических методов расчета неизвестных величин. Представляет интерес оценить величину временного интервала равномерной пригодности. Если его величина невелика, то возникает вопрос о ценности данной математической модели для теоретического описания волновых движений в вязкой несжимаемой электропроводной жидкости или модификации данной математической модели для построения равномерно пригодных выражений для поля скоростей в жидкости на большем интервале времени расчета.

Сказанное относится и к задаче, решенной в предыдущем разделе по алгоритму, предложенному в [52], решение которой также имеет ограниченный временной интервал применимости.

1. Постановка задачи. Математическая модель, в которой рассматривается движение вязкой жидкости, вызванное волной конечной амплитуды на ее поверхности, предполагает, что жидкость плотностью ρ заполняет в поле тяжести с ускорением свободного падения g в декартовых координатах полубесконечный объем $z < 0$. Сверху на проводящую жидкость действует электрическое поле напряженностью E_0 , вектор которого направлен вниз. По поверхности жидкости в положительном направлении оси Ox бежит плоская волна малой амплитуды a .

В асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде волны было получено аналитическое выражение для горизонтальной компоненты поля скоростей жидкости:

$$u(x, z, t) = \varepsilon u_1(x, z, t) + \varepsilon^2 (u_2^+(x, z, t) + U_2(z, t)); \quad (1)$$

$$\varepsilon = \frac{a}{\alpha}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}},$$

где γ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; $u_1(x, z, t)$ и $u_2^+(x, z, t)$ — периодические функции времени, амплитуды которых экспоненциально убывают:

$$u_1 \sim \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t); \quad u_2^+ \sim \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot t),$$

где S — комплексная частота волны, причем $\text{Re } S < 0$ (волны на поверхности затухают); $U_2(z, t)$ — аperiodическая убывающая функция времени со скоростью убывания менее, чем $\sim \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t)$.

Таким образом, асимптотическое выражение (1) имеет смысл, если

$$\varepsilon u_1(x, z, t) \gg \varepsilon^2 U_2(z, t). \quad (2)$$

При больших значениях времени t условие (2) нарушается и тогда выражение (1) не имеет смысла.

Целью данного рассмотрения является определение момента времени $t = T^*$, такого что

$$T^* = T(z^*) = \min_{z < 0} T(z); \quad (3) \quad \varepsilon \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \lambda} u_1(x, z, T(z)) = \varepsilon^2 U_2(z, T(z)), \quad (4)$$

где λ – длина бегущей по поверхности жидкости волны, x_0 – любое число. При этом величина T^* будет гарантированной оценкой сверху для момента времени, при котором асимптотическое выражение (1) теряет смысл.

2. Метод решения. Сначала определяются выражения левой и правой части (4) при $z = z^*$. Выражение для левой части:

$$\varepsilon \max_{x_0 \leq x \leq x_0 + \lambda} u_1(x, z^*, T^*) = \varepsilon \alpha \left| S + 2k^2 \nu \right| \text{Exp}(k z^*) \text{Exp}(\text{Re } S \cdot T^*), \quad (5)$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости; k – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$).

Выражение для правой части (4) при $z = z^*$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 U_2(z^*, T^*) = \varepsilon^2 \frac{\alpha^2 \text{Re } r}{w_0} \cdot \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot T^*) \cdot \left(\text{Exp}(w_0 z^*) \times \right. \\ \left. \times \text{Erfc} \left(\frac{-z^*}{2\sqrt{\nu T^*}} - w_0 \sqrt{\nu T^*} \right) - \text{Exp}(-w_0 z^*) \cdot \text{Erfc} \left(\frac{-z^*}{2\sqrt{\nu T^*}} + w_0 \sqrt{\nu T^*} \right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} r = - \frac{k^2 \nu \text{Im } q}{(k^2 + q\bar{q}) \cdot \left| 3k^2 - q^2 + 2k\bar{q} \right|^2} \cdot (14k^7 + 2k^6 q - 21k^5 q^2 - 2k^4 q^3 + 3k^3 q^4 + \\ + 13k^5 q\bar{q} + 4k^4 q^2 \bar{q} - 30k^3 q^3 \bar{q} - 10k^2 q^4 \bar{q} + 6kq^5 \bar{q} + 2q^6 \bar{q} - 7k^3 q^2 \bar{q}^2 - 16k^2 q^3 \bar{q}^2 + \end{aligned}$$

$$+3kq^4\bar{q}^{-2} + 2q^5\bar{q}^{-2} + 3kq^3\bar{q}^{-3} + 2q^4\bar{q}^{-3} \Big);$$

$$w_0 = \sqrt{\frac{S + \bar{S}}{\nu}}; \quad q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}; \quad \bar{q} = \sqrt{k^2 + \frac{\bar{S}}{\nu}},$$

где \bar{S} – комплексно-сопряженная частота волны.

Будем полагать, что

$$z^* = -d^* \cdot \sqrt{\nu} \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon}; \quad (7)$$

$$T(z) = X_0(z) \cdot \ln \frac{1}{\varepsilon} + X_1(z) \cdot \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + X_2(z) + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}\right), \quad (8)$$

где d^* , $X_0(z)$, $X_1(z)$, $X_2(z)$ – неизвестные, подлежащие определению из равенства выражений (5) и (6). Учитывая асимптотические выражения (7) и (8), заменим выражение (6) его асимптотической формой:

$$\varepsilon^2 U_2(z^*, T^*) = \varepsilon^2 \frac{8\alpha^2 \operatorname{Re} r}{\sqrt{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^{*2}}{4\nu T^*}\right) \cdot \left(\frac{(\nu T^*)^{3/2}}{z^{*2} - 8 \operatorname{Re} S \cdot \nu T^{*2}}\right).$$

Форма искомого асимптотического выражения для $T(z)$ (8) принимается исходя из того, что оно должно удовлетворять выражениям (3)–(4) и что асимптотическое поведение при $t \rightarrow \infty$ функций $u_1(x, z, t)$ и $U_2(z, t)$ имеет вид

$$u_1 \sim \exp(\operatorname{Re} S \cdot t); \quad U_2 \sim \frac{1}{\sqrt{t}},$$

то есть огибающая периодической функции $u_1(x, z, t)$ убывает со временем по модулю как экспонента, а функция $U_2(z, t)$ убывает со временем как степенная.

Асимптотическая форма величины z^* (7) выбрана из следующих соображений. Пусть z^* определяется как

$$z^* = -d^* \cdot \sqrt{\nu} \cdot F(\varepsilon), \quad (9)$$

где $F(\varepsilon)$ – неизвестная функция, подлежащая определению. Рассмотрим следующие варианты вида функции F , определяющие различное асимптотическое поведение величины z^* :

$$1) F(\varepsilon) = 1 \text{ или } F(\varepsilon) = \ln \ln \frac{1}{\varepsilon};$$

$$2) F(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon};$$

$$3) F(\varepsilon) \gg \ln \frac{1}{\varepsilon} \text{ или } \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \ll F(\varepsilon) \ll \ln \frac{1}{\varepsilon} \text{ или}$$

$$1 \ll F(\varepsilon) \ll \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \text{ или } F(\varepsilon) \ll 1.$$

Подстановка выражения (9) для перечисленных выше трех вариантов вида функции F , а также выражения (8) в (3)–(4) дает следующие результаты.

Если $F(\varepsilon) = 1$ или $F(\varepsilon) = \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}$, то величина z^* не доставляет минимума функции $T(z)$.

В случае когда $F(\varepsilon) \gg \ln \frac{1}{\varepsilon}$, или $\ln \ln \frac{1}{\varepsilon} \ll F(\varepsilon) \ll \ln \frac{1}{\varepsilon}$, или $1 \ll F(\varepsilon) \ll \ln \ln \frac{1}{\varepsilon}$, или $F(\varepsilon) \ll 1$, минимум $T(z)$ достигается при $d^* = 0$. При этом

$$T^* = \frac{1}{-\operatorname{Re} S} \cdot \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln X \right) + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right);$$

$$X = \frac{\sqrt{\pi \cdot (-\operatorname{Re} S)} \cdot |S + 2k^2 \nu|}{\alpha \sqrt{\nu} \cdot \operatorname{Re} r}.$$

В случае когда $F(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon}$, минимум $T(z)$ достигается при

$$d^* = \frac{2k\sqrt{\nu}}{k^2 \nu - \operatorname{Re} S}.$$

При этом

$$T^* = \frac{1}{k^2 \nu - \operatorname{Re} S} \cdot \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln X \right) + O\left(\frac{\ln^2 \ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right);$$

$$X = \frac{\sqrt{\pi} \cdot (k^2 \nu - 2 \operatorname{Re} S) \cdot |S + 2k^2 \nu|}{2\alpha\sqrt{\nu} \cdot \sqrt{k^2 \nu - \operatorname{Re} S} \cdot \operatorname{Re} r}.$$

Очевидно, что если $F(\varepsilon) = \ln \frac{1}{\varepsilon}$, то T^* достигает своего наименьшего значения.

3. Результат. Формула для критического момента времени, при котором имеет место нарушение равномерной пригодности асимптотических выражений для поля скоростей в жидкости, имеет вид

$$T^* = \frac{1}{k^2 \nu - \operatorname{Re} S} \cdot \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \ln \ln \frac{1}{\varepsilon} + \ln X \right) + O\left(\frac{\ln^2 (\ln(1/\varepsilon))}{\ln(1/\varepsilon)} \right), \quad (10)$$

где

$$X = \frac{\sqrt{\pi} \cdot (k^2 \nu - 2 \operatorname{Re} S) \cdot |S + 2k^2 \nu|}{2\alpha\sqrt{\nu} \cdot \sqrt{k^2 \nu - \operatorname{Re} S} \cdot \operatorname{Re} r}; \quad (11) \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}};$$

$$r = - \frac{k^2 \nu \operatorname{Im} q}{(k^2 + q\bar{q}) \cdot |3k^2 - q^2 + 2k\bar{q}|^2} \cdot (14k^7 + 2k^6 q - 21k^5 q^2 - 2k^4 q^3 + 3k^3 q^4 + \\ + 13k^5 q\bar{q} + 4k^4 q^2 \bar{q} - 30k^3 q^3 \bar{q} - 10k^2 q^4 \bar{q} + 6kq^5 \bar{q} + 2q^6 \bar{q} - 7k^3 q^2 \bar{q}^2 - 16k^2 q^3 \bar{q}^2 + \\ + 3kq^4 \bar{q}^2 + 2q^5 \bar{q}^2 + 3kq^3 \bar{q}^3 + 2q^4 \bar{q}^3);$$

$$q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}}; \quad \bar{q} = \sqrt{k^2 + \frac{\bar{S}}{\nu}}.$$

4. Анализ результата. Анализ включает определение степени влияния различных факторов на величину T^* и, как следствие,

на степень равномерной пригодности асимптотических выражений для поля скоростей в жидкости.

Анализ проводится в предположении, что жидкостью является вода. Объем воды находится в поле земного тяготения (ускорение свободного падения $g = 981 \text{ см/сек}^2$). Везде, где это специально не оговорено, внешнее электрическое поле полагается отсутствующим (напряженность поля $E_0 = 0$). Также во всех случаях, кроме специально оговоренных, предполагается, что температура воды равна 20°C .

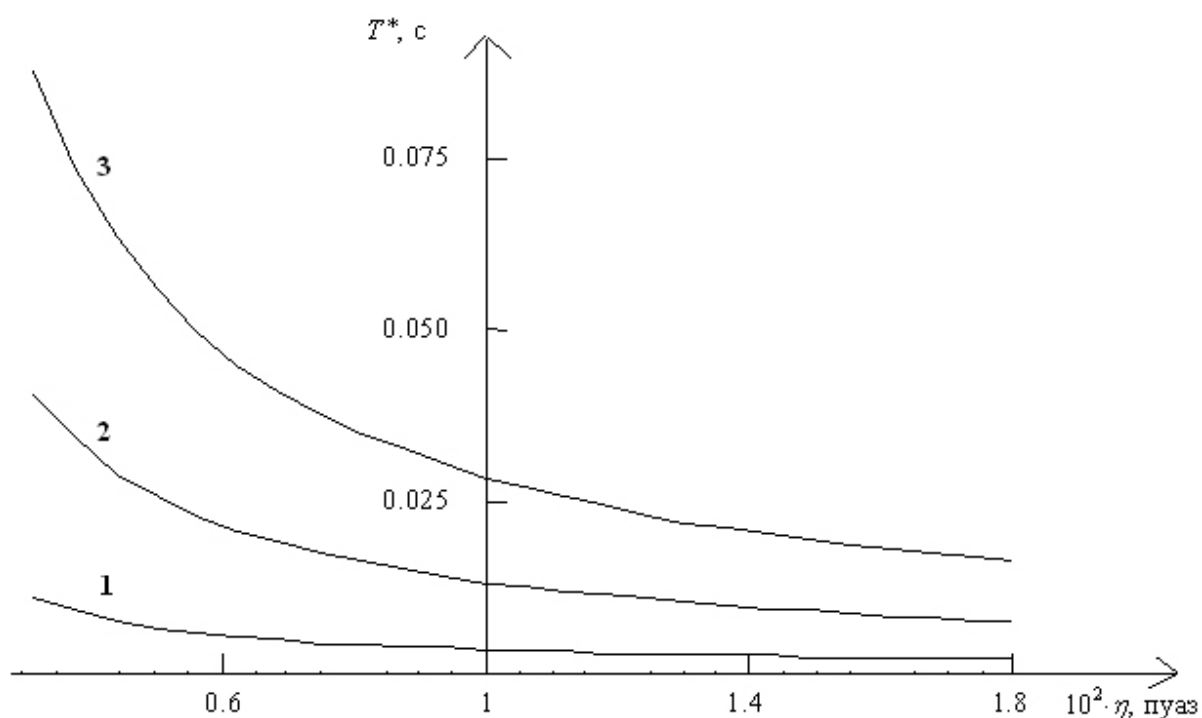


Рис. 1. Зависимость критического момента времени T^ от вязкости при различных значениях длины волны: 1 – $\lambda = 0,05 \text{ см}$; 2 – $\lambda = 0,1 \text{ см}$; 3 – $\lambda = 0,2 \text{ см}$. Относительная амплитуда волны – отношение (a/λ) – во всех трех случаях полагается равной $(2\pi)^{-1}$*

При этом значения основных параметров жидкости следующие: $\rho = 0,99823 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 72,8 \text{ дин/см}$, $\eta = 0,01004 \text{ пуаз}$; $a_{отн}$ – относительная амплитуда волны на поверхности воды, определяемая отношением

$$a_{отн} = \frac{a}{\lambda},$$

может меняться от 0 до максимального значения, равного $(2\pi)^{-1}$.

На рис. 1 приведены зависимости критического момента времени T^* от вязкости. Предполагается, что для всех трех кривых

$$a_{отн} = \frac{1}{2\pi},$$

то есть каждая из трех кривых соответствует волнам на поверхности воды, профили которых в первом приближении по амплитуде подобны друг другу. Подобие профилей волн характеризуется тем, что крутизна гребней волн одинаковая, а профили волн отличаются друг от друга только масштабом.

На основании данных рис. 1 можно говорить о том, что с ростом вязкости значение критического момента времени T^* уменьшается. Из этого следует вывод о том, что с ростом вязкости степень равномерной пригодности выражений для поля скоростей снижается. С другой стороны, рост масштаба волн приводит также и к росту значения T^* , то есть для волн большего масштаба выражения для поля скоростей являются более равномерно пригодными. Данный факт также иллюстрируется графиком на рис. 2, где показана зависимость T^* от длины волны при разных значениях относительной амплитуды. Из рис. 2 также можно видеть, что для волн с меньшей относительной амплитудой, то есть с более пологими гребнями волн, выражения для поля скоростей являются более равномерно пригодными.

На рис. 3 показана зависимость критического момента времени T^* от длины волны при разной температуре воды. При изменении температуры воды изменяются и значения ее основных параметров, такие как плотность, вязкость, коэффициент поверхностного натяжения. Значения параметров воды при разных температурах приведены в таблице 1.

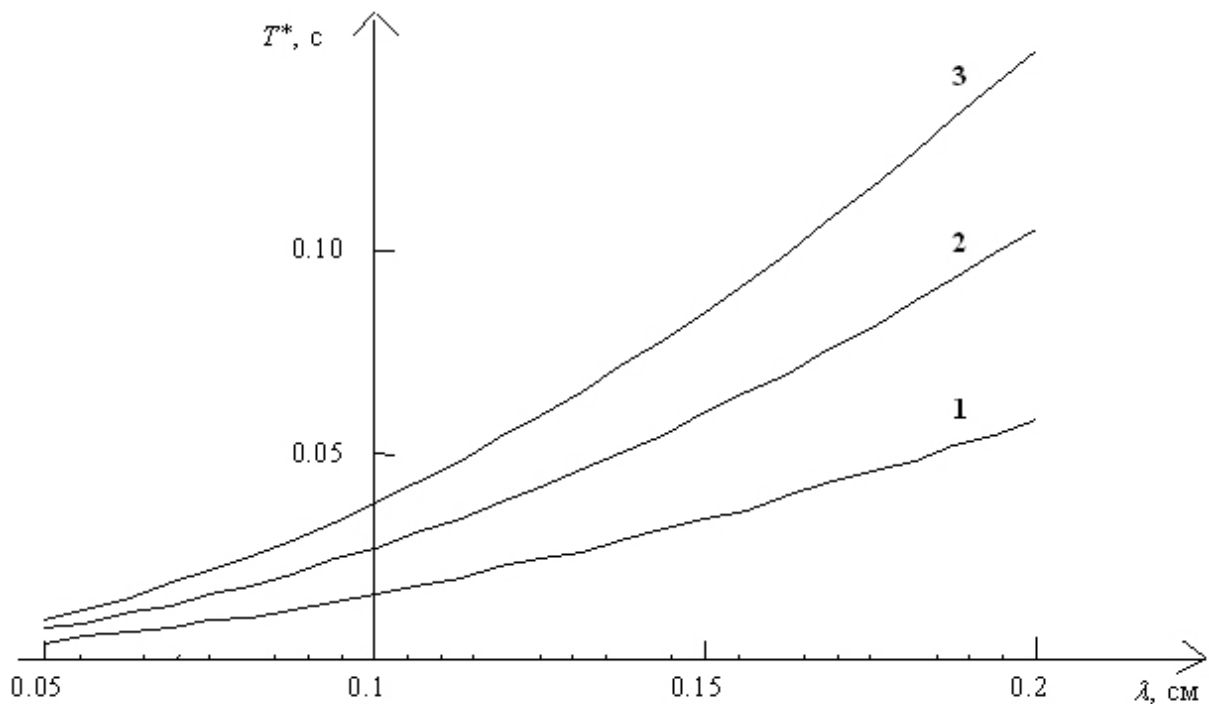


Рис. 2. Зависимость критического момента времени T^* от длины волны при различных значениях относительной амплитуды волн: 1 – $(a/\lambda) = (2\pi)^{-1}$; 2 – $(a/\lambda) = (8\pi)^{-1}$; 3 – $(a/\lambda) = (32\pi)^{-1}$

Таблица 1

Значения параметров воды при различных температурах

Температура, °C	Плотность воды, г/см ³	Коэффициент поверхностного натяжения воды, дин/см	Вязкость воды, пуаз
0	0,99987	75,60	0,01797
20	0,99823	72,80	0,01004
30	0,99567	71,18	0,00803
60	0,98824	66,18	0,00470
90	0,96534	60,75	0,00317

Как можно увидеть из рис. 3, рост температуры приводит к росту значения критического момента времени T^* , то есть к росту степени равномерной пригодности выражений для поля скоростей. По данным табл.1 видно, что с изменением температуры в

диапазоне от 0°C до 90°C значение вязкости воды изменяется в 5,7 раз, в то время как значения плотности и коэффициента поверхностного натяжения воды изменяются соответственно только в 1,04 и 1,25 раза. Это дает основания утверждать, что с ростом температуры воды наиболее влияющим фактором роста равномерной пригодности является снижение вязкости воды. Данный вывод подтверждается графиком на рис. 1.

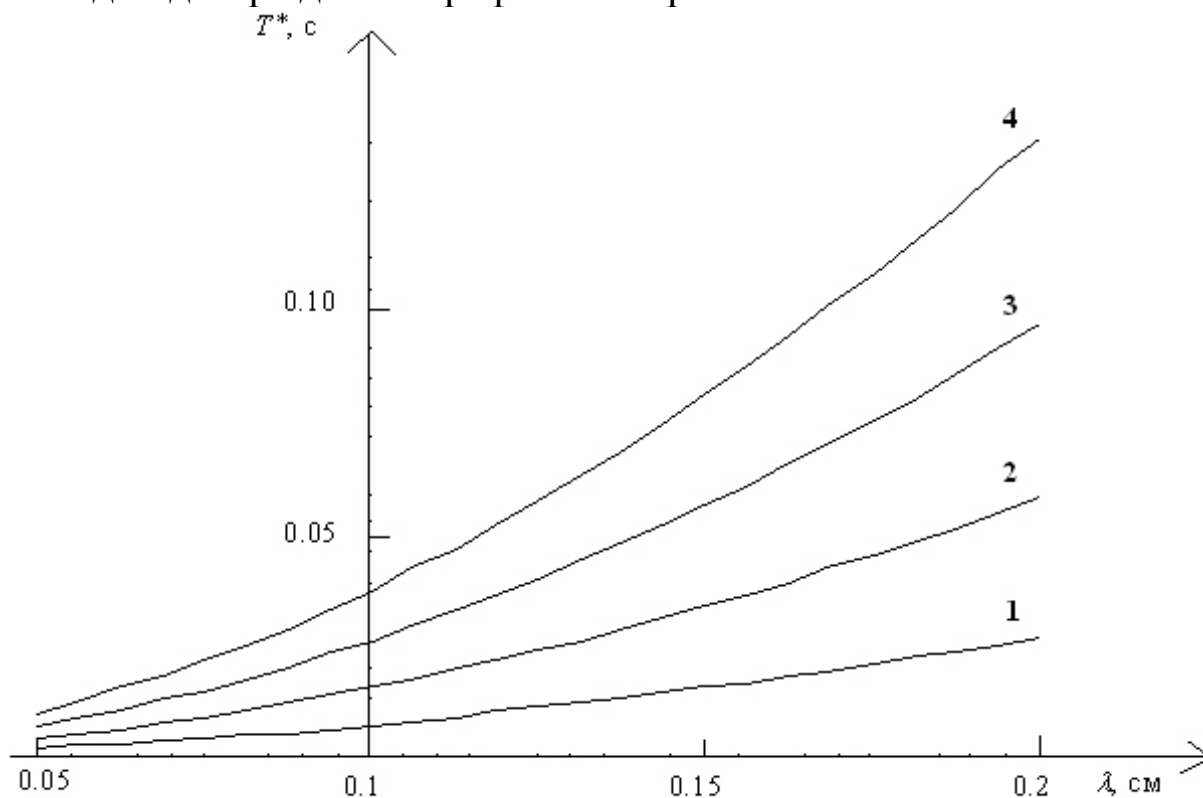


Рис. 3. Зависимость критического момента времени T^ от длины волны при различных температурах жидкости:
 1 – $t = 0^{\circ}\text{C}$; 2 – $t = 30^{\circ}\text{C}$; 3 – $t = 60^{\circ}\text{C}$; 4 – $t = 90^{\circ}\text{C}$*

2.3. О возможности зажигания коронного разряда у гребней волн

В разделе (3.1) было получено выражение для напряженности электрического поля над плоской свободной поверхностью слоя вязкой электропроводной жидкости конечной толщины. Указанное асимптотическое выражение представляет собой разложение по малой амплитуде бегущей по свободной поверхности жидко-

сти волны с точностью до величин второго порядка малости и в декартовой системе координат имеет вид

$$\vec{E}(x, z, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -E_0 \end{pmatrix} - a k E_0 \exp(\operatorname{Re} S \cdot t - k z) \cdot \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cdot \vec{n}_x \\ 0 \\ \cos(\theta) \cdot \vec{n}_z \end{pmatrix} -$$

$$- a^2 k^2 E_0 \exp(2 \operatorname{Re} S \cdot t - 2k \cdot z) \times \begin{pmatrix} \sin(2\theta) + 4 \frac{|Z_1|}{k} \cdot \sin(2\theta - \operatorname{Arg} Z_1) \cdot \vec{n}_x \\ 0 \\ \cos(2\theta) + 4 \frac{|Z_1|}{k} \cdot \cos(2\theta - \operatorname{Arg} Z_1) \cdot \vec{n}_z \end{pmatrix};$$

$$\theta = \theta(x, t) = k x - \operatorname{Im} S \cdot t;$$

$$Z_1 = \frac{\nu}{2\Delta_{Z_1}} (16k^2 \nu \rho w_1 (4k^2 + w_1^2) \cdot R_{11} + 2ik \nu \rho w_1 (12k^2 + w_1^2) \cdot R_{13} + \nu \rho w_1 (16k^4 - w_1^4) \times$$

$$\times R_{22} \cdot \operatorname{Ch} dw_1 + 2ik \nu \rho (16k^4 - w_1^4) \cdot R_{21} \cdot \operatorname{Sh} dw_1 - 8k^2 \nu \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{22} \cdot \operatorname{Ch} 2dk -$$

$$- 8ik^2 \nu \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{21} \cdot \operatorname{Sh} 2dk - \nu \rho w_1 ((80k^4 + 8k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot R_{11} + 2ik(12k^2 + w_1^2) \times$$

$$\times R_{13}) \cdot \operatorname{Ch} 2dk \operatorname{Ch} dw_1 + 2k \nu \rho ((16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot R_{11} + 2ik(4k^2 + 3w_1^2) \cdot R_{13}) \times$$

$$\times \operatorname{Sh} 2dk \cdot \operatorname{Sh} dw_1 - 2k w_1 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121} \cdot \operatorname{Sh} 2dk \operatorname{Ch} dw_1 +$$

$$+ 4k^2 (4k^2 - w_1^2) \cdot R_{121} \cdot \operatorname{Ch} 2dk \operatorname{Sh} dw_1);$$

$$\Delta_{Z_1} = \rho S \cdot (16k^2 \nu^2 w_1 (4k^2 + w_1^2) - w_1 (\nu^2 (80k^4 + 8k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot \operatorname{Ch} 2dk + \omega_1^2 \cdot \operatorname{Sh} 2dk) \times$$

$$\times \operatorname{Ch} dw_1 + 2k (\omega_1^2 \cdot \operatorname{Ch} 2dk + \nu^2 (16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) \cdot \operatorname{Sh} 2dk) \cdot \operatorname{Sh} dw_1);$$

$$\omega_1^2 = 2g k \left(1 + 4 \frac{\gamma}{\rho g} k^2 - \frac{E_0^2}{2\pi\rho g} k \right); \quad w_1 = \sqrt{4k^2 + \frac{2S}{\nu}}; \quad q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}};$$

$$R_{11} = \frac{\nu k}{2(9k^2 - q^2)(-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq)} \cdot (4k^2 q \cdot (5k^2 + q^2) - q \times \\ \times (31k^4 + 10k^2 q^2 - q^4) \cdot \operatorname{Ch} dk \operatorname{Ch} dq + k \cdot (3k^4 + 22k^2 q^2 - q^4) \cdot \operatorname{Sh} dk \operatorname{Sh} dq);$$

$$R_{121} = -\frac{E_0^2 k^2}{16\pi} + \frac{(k^2 - q^2)^2 \nu^2 \rho}{4} - \frac{\rho((k^2 + q^2) \cdot \sigma_1^2 - 2q^2 \cdot \sigma_2^2)}{8} + \frac{k \rho}{2(9k^4 - 10k^2 q^2 + q^4)} \times \\ \times (k \cdot ((9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \operatorname{Ch} dk \operatorname{Ch} dq + 4kq \cdot (3k^2 + q^2) \cdot \operatorname{Sh} dk \operatorname{Sh} dq) \cdot \sigma_1^2 + \\ + q \cdot (4kq \cdot (3k^2 + q^2) \cdot \operatorname{Ch} dk \operatorname{Ch} dq + (9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \operatorname{Sh} dk \operatorname{Sh} dq) \cdot \sigma_2^2 + \\ + (q \cdot (21k^4 + 14k^2 q^2 - 3q^4) \cdot \operatorname{Sh} dk \operatorname{Ch} dq + k \cdot (9k^4 + 22k^2 q^2 + q^4) \cdot \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq) \cdot \sigma_1 \sigma_2);$$

$$R_{13} = \frac{i \nu k^2}{(9k^2 - q^2)(-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq)} \cdot (q \cdot (31k^4 + q^4) - 2q \times \\ \times (22k^4 + 11k^2 q^2 - q^4) \cdot \operatorname{Ch} dk \operatorname{Ch} dq + 2k^3 \cdot (3k^2 + 13q^2) \cdot \operatorname{Sh} dk \operatorname{Sh} dq);$$

$$R_{21} = \frac{i k ((3k^4 + 6k^2 q^2 - q^4) \cdot \sigma_1^2 + 8k^2 q^2 \cdot \sigma_2^2)}{4\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$R_{22} = -\frac{4k^4 q \cdot \sigma_1 \sigma_2}{\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$\sigma_1 = -\frac{i \nu (-2kq \operatorname{Sh} dk + (k^2 + q^2) \operatorname{Sh} dq)}{-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq}; \quad \sigma_2 = -\frac{i \nu (2k^2 \operatorname{Ch} dk - (k^2 + q^2) \operatorname{Ch} dq)}{-q \operatorname{Ch} dq \operatorname{Sh} dk + k \operatorname{Ch} dk \operatorname{Sh} dq};$$

где ρ – плотность жидкости, ν – вязкость жидкости, γ – коэффициент поверхностного натяжения жидкости, d – толщина слоя

жидкости, g – ускорение свободного падения, E_0 – величина напряженности внешнего электрического поля на бесконечно большой высоте над поверхностью жидкости, a – амплитуда волны, распространяющейся по свободной поверхности жидкости, k – волновое число ($k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны), S – комплексная частота волны.

В то же время в разделе (2.1) получена форма свободной поверхности вязкой электропроводной жидкости, обусловленная бегущей по поверхности жидкости волной в виде следующего асимптотического разложения по малой амплитуде волны:

$$\xi(x, t) = a \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(\theta) + 2a^2 \cdot |Z_1| \cdot \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(2\theta - \text{Arg } Z_1).$$

При этом аналитическое выражение для абсолютной величины напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости, искаженной бегущей поверхностной волной, с точностью до величин второго порядка малости имеет вид

$$\begin{aligned} |\vec{E}_\xi(x, t)| = E_0 \cdot (1 + a \cdot k \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Cos}(\theta) - \\ - \frac{1}{4} a^2 k^2 \cdot \text{Exp}(2 \text{Re } S \cdot t) \times (1 - |\zeta_1| \cdot \text{Cos}(2\theta - \text{Arg } \zeta_1))) \Big); \end{aligned} \quad (1)$$

$$\zeta_1 = 16 \cdot \frac{Z_1}{k} + 1.$$

Для оценки возможности возникновения на гребнях волн коронного разряда необходимо знать максимальное значение напряженности электрического поля на поверхности жидкости.

Для определения максимума напряженности поля на поверхности жидкости необходимо производную выражения (1) по θ приравнять нулю. При этом получим

$$2 \cdot \text{Sin}(\theta) + ak \cdot |\zeta_1| \cdot \text{Exp}(\text{Re } S \cdot t) \cdot \text{Sin}(2\theta - \text{Arg } \zeta_1) = 0. \quad (2)$$

Искомое значение θ для точки максимума выражения (1) будем искать в виде

$$\theta_* = \pi n + a \cdot \theta_1.$$

Подставляя данное выражение в (2) и выделяя слагаемые первого порядка малости, получим выражение для θ_1 . При этом выражение для точки максимума (1) будет иметь вид

$$\theta_* = 2\pi n + \frac{1}{2} \cdot ak \cdot \operatorname{Im} \zeta_1 \cdot \operatorname{Exp}(\operatorname{Re} S \cdot t); \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $|\vec{E}_\xi(x, t)|$ в точке максимума θ_* – пиковое значение – с точностью до величин второго порядка малости будет следующим:

$$E_{\text{пик}}(t) = E_0 \cdot (1 + a k \cdot \operatorname{Exp}(\operatorname{Re} S \cdot t) + 4a^2 k \cdot \operatorname{Re}(Z_1) \cdot \operatorname{Exp}(2 \operatorname{Re} S \cdot t)).$$

Данное выражение является формулой для зависимости максимума напряженности электрического поля на поверхности жидкости от времени.

На рис. 1–2 показано, как распределяется величина напряженности электрического поля на поверхности жидкости вдоль направления распространения волны (по координате x). Тут же для сравнения приведены профили волн на поверхности жидкости, которые одновременно являются распределениями величины возмущения свободной поверхности жидкости от равновесного состояния (состояния покоя) по направлению распространения волны.

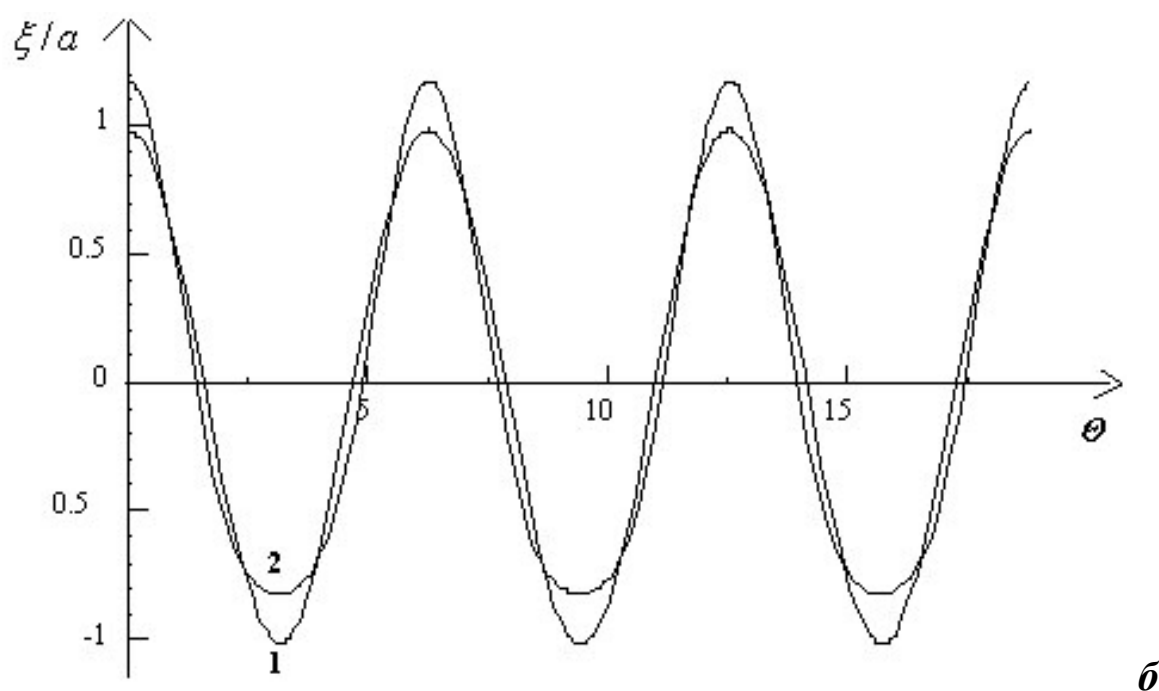
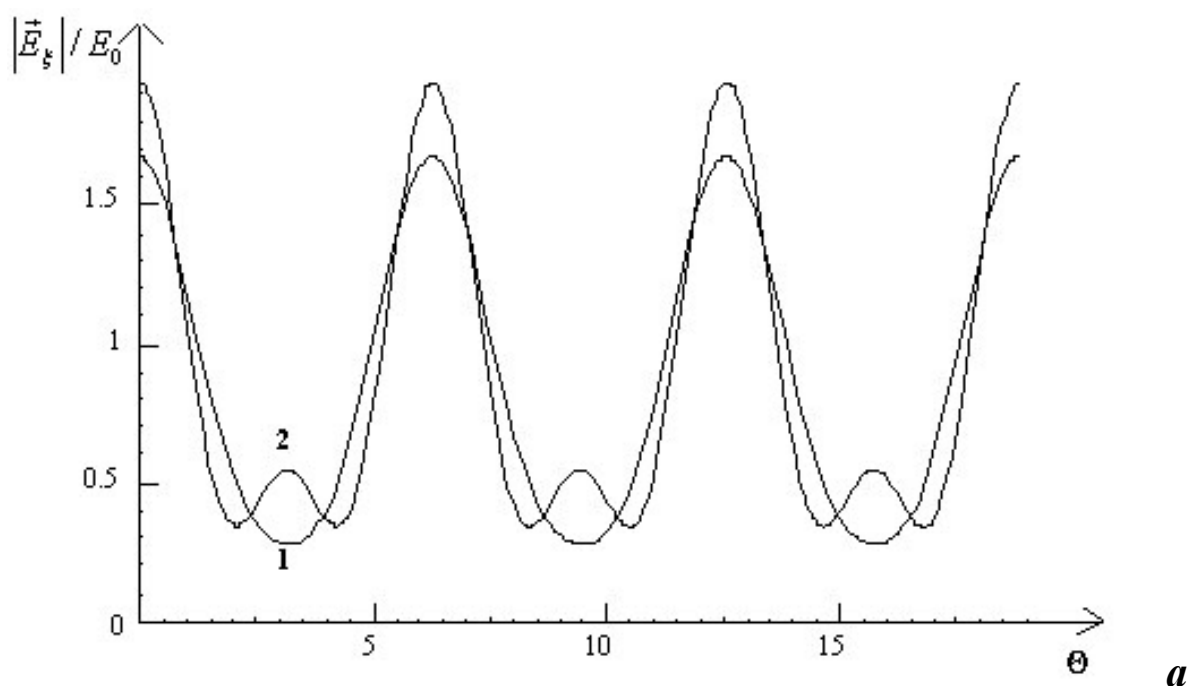
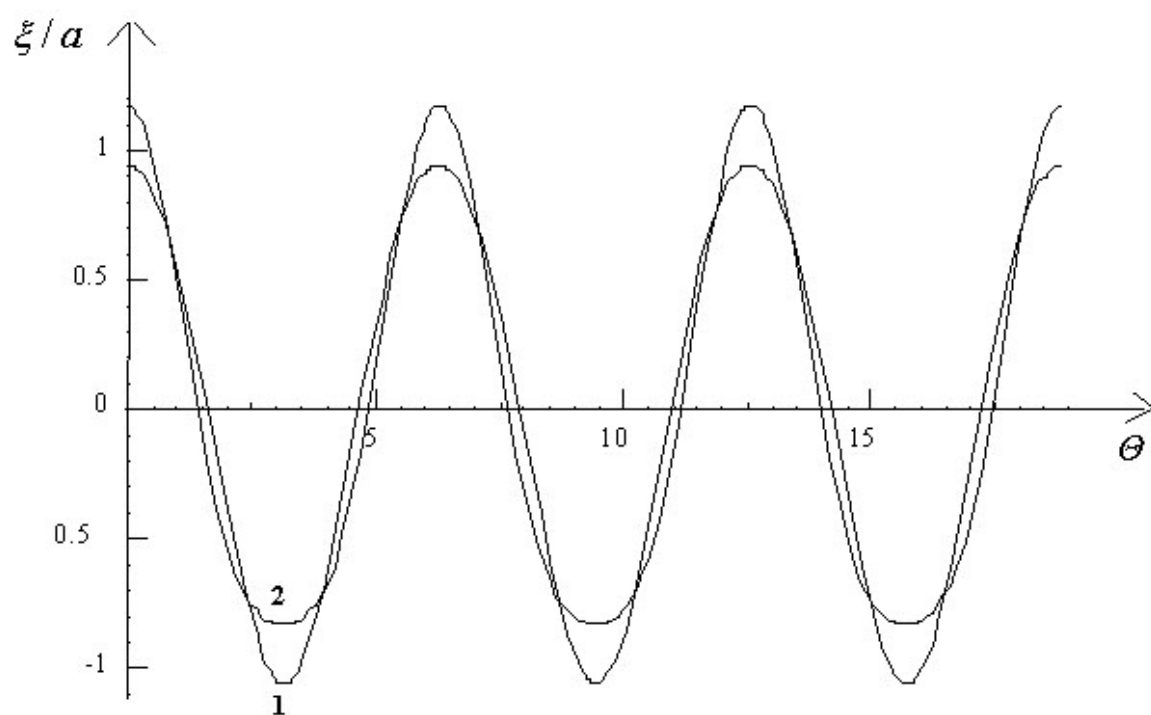
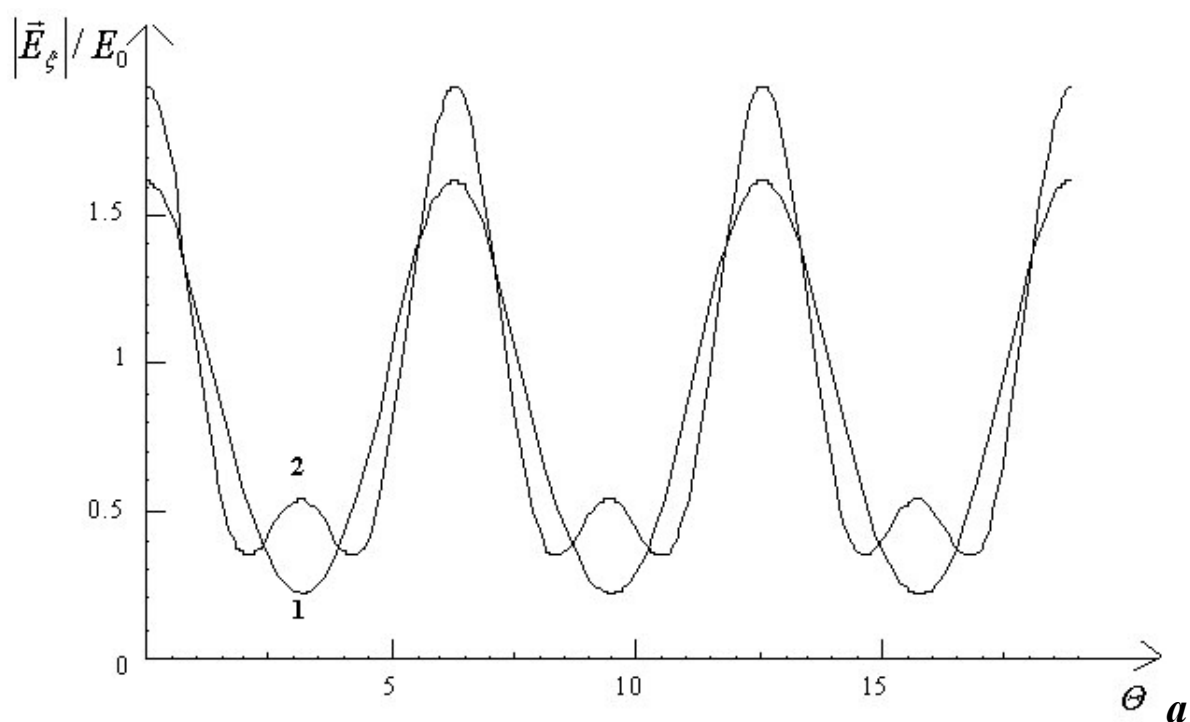


Рис. 1. Профили волн (б) и величины напряженности электрического поля (а) на поверхности жидкости вдоль направления распространения волн при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля W : 1 – $W = 7,63$; 2 – $W = W_* \approx 17,19$. W_* – критическое для реализации неустойчивости значение параметра W при длине волны $\lambda = 0,1$ см



б

Рис. 2. Профили волн (б) и величины напряженности электрического поля (а) на поверхности жидкости вдоль направления распространения волн при различных значениях длины волны: 1 – $\lambda = 0,05$ см; 2 – $\lambda = 0,15$ см

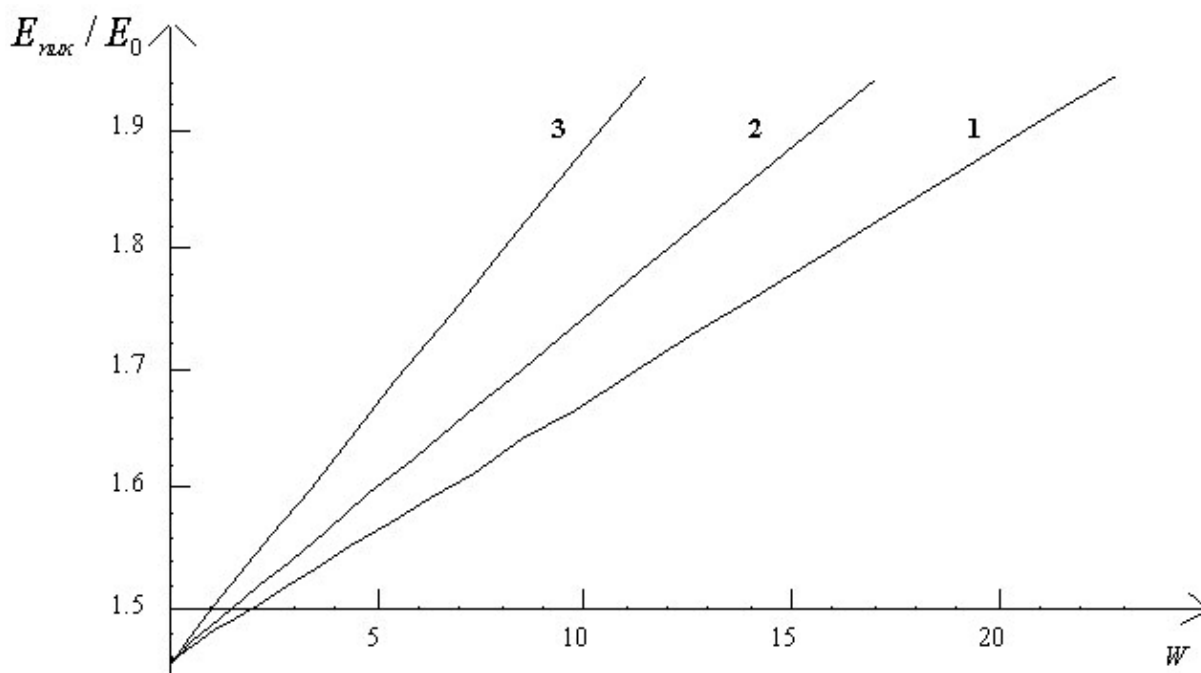


Рис. 3. Зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от параметра Тонкса–Френкеля W при различных значениях длины волны: 1 – $\lambda = 0,075$ см; 2 – $\lambda = 0,1$ см. 3 – $\lambda = 0,15$ см

На рис. 3 – 5 приведены зависимости пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости при различных значениях величины внешнего электрического поля E_0 , длины волны λ , а также температуры жидкости. Во всех графиках зависимостей на рис. 1–5 за исключением специально оговоренных случаев в качестве жидкости рассматривается вода при температуре 20°C. При этом значения основных параметров жидкости следующие: $\rho = 0,99823$ г/см³, $\gamma = 72,8$ дин/см, $\eta = 0,01004$ пуаз. Толщина слоя жидкости везде полагается равной 0,4 см. Рассматриваются волны на поверхности жидкости капиллярного типа с длиной волны порядка 0,1 см. Амплитуда волны полагается пропорциональной длине волны. Коэффициент пропорциональности определяется соотношением

$$a = \frac{0,7}{2\pi} \cdot \lambda.$$

Безразмерная амплитуда волны $(a \cdot k) = 0,7$.

Величина напряженности электрического поля на поверхности жидкости на рис.1–5 представлена в единицах относительно величины E_0 . Профили волн, профили величины напряженности поля на поверхности жидкости, зависимости пиковых значений напряженности поля на поверхности жидкости от различных параметров построены для момента времени $t = 0$.

На рис. 1 показаны профили волн и величины напряженности поля на поверхности жидкости при различных значениях величины внешнего электрического поля, величина которого характеризуется значением параметра Тонкса–Френкеля, определяемого как

$$W = \frac{E_0^2}{4\pi\sqrt{\rho g \gamma}}.$$

Длина волны в зависимостях на рис. 1 полагается равной 0,1 см. Из рис. 1 видно, что напряженность электрического поля у гребней волн увеличивается по сравнению с напряженности E_0 .

На рис. 2 показано, как влияет длина волны на распределение величины напряженности электрического поля по поверхности возмущенной жидкости. Профили волны и величины напряженности поля на данном рисунке построены при значении параметра Тонкса – Френкеля $W = 11,33$. Для волн длины $\lambda = 0,15$ см данное значение параметра неустойчивости Тонкса – Френкеля является критическим для реализации неустойчивости по отношению к поверхностному заряду, а для волн длины $\lambda = 0,05$ см – докритическим. Из данного рисунка нетрудно видеть, что с увеличением длины волны на поверхности жидкости имеет место также и рост пиковых значений напряженности поля на поверхности жидкости.

Из рис. 1 – 2 видно, что пики напряженности электрического поля на поверхности жидкости почти совпадают с вершинами гребней волн, что подтверждает тот факт, что коронный разряд имеет тенденцию возникать именно на вершинах гребней волн.

Зависимости профилей величины напряженности электрического поля на поверхности жидкости, как и зависимости профилей волн от толщины слоя жидкости не приводятся. Более глубокий анализ показывает, что вид профилей волн и профилей вели-

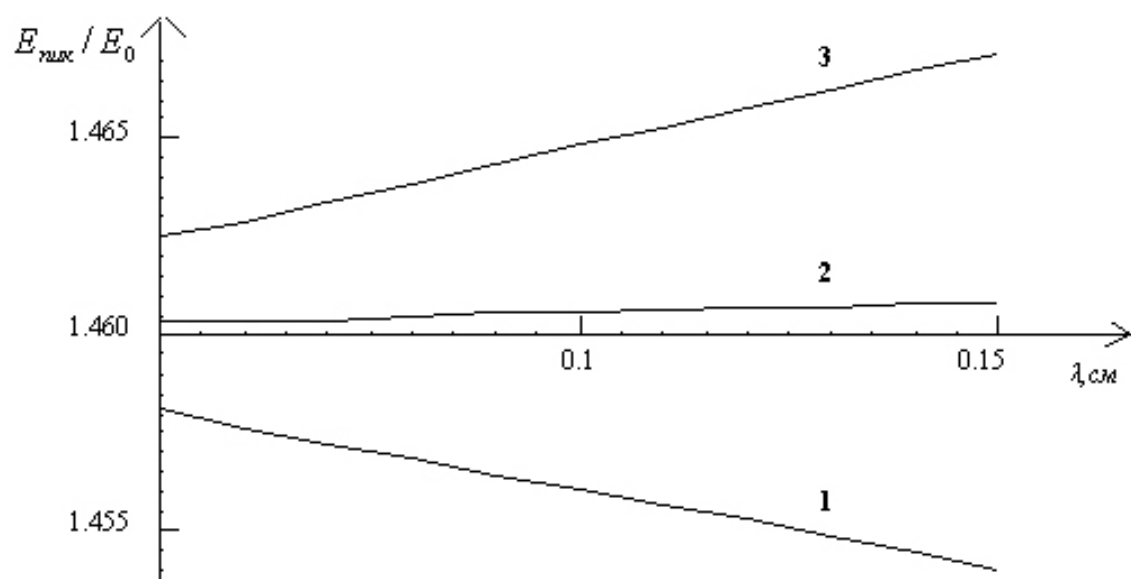
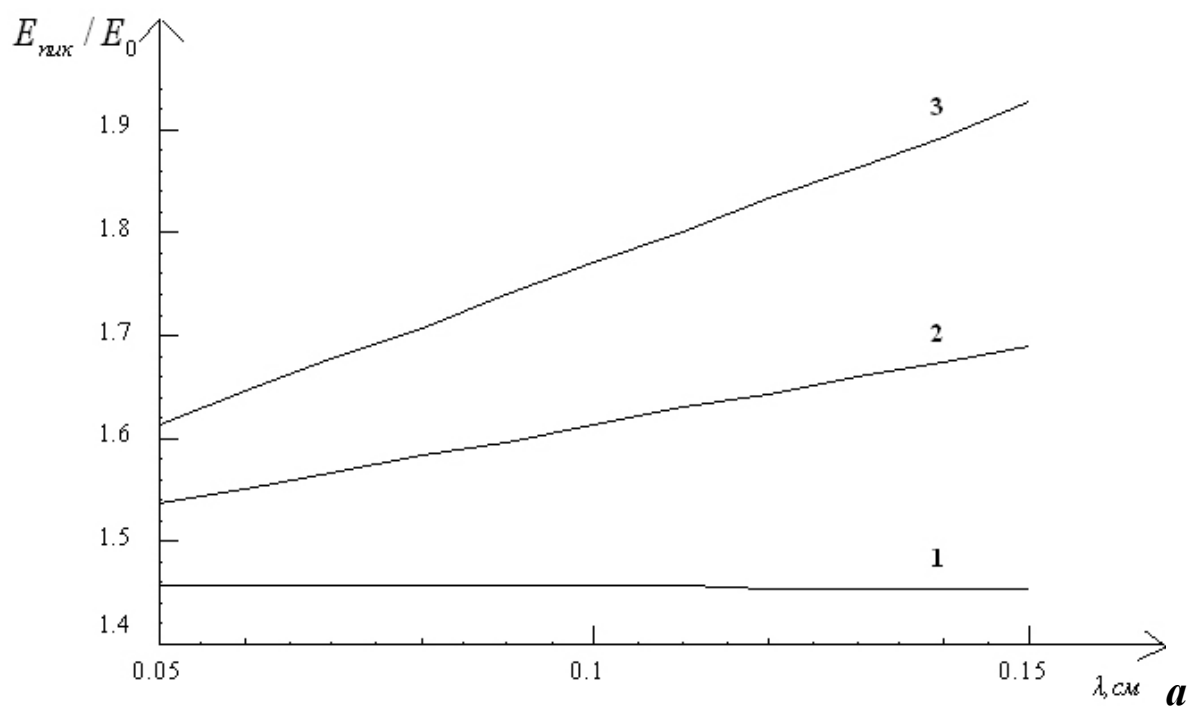
чины напряженности поля на поверхности жидкости практически не зависит от толщины слоя жидкости.

При изменении температуры жидкости вид профилей волн и значений напряженности поля на поверхности жидкости меняется незначительно. При этом основным фактором влияния температуры на вид профилей является изменение коэффициента поверхностного натяжения жидкости при изменении ее температуры. Изменение вязкости, а также плотности жидкости при изменении температуры практически не оказывает влияния на вид профилей волн и величины напряженности поля на поверхности жидкости.

На рис. 3 показаны зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от величины параметра Тонкса–Френкеля W при различных длинах волн. Зависимости на указанном графике построены в пределах значения W от 0 до критического для реализации неустойчивости значения, которое при разных длинах волн различно.

Из рис. 3 видно, что максимумы относительных пиковых значений напряженности на поверхности жидкости для различных длин волн совпадают, на данном рисунке они все равны примерно 1,946. Следует обратить внимание на то, что зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от W являются почти линейными.

На рис. 4 приведены зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от длины волны при различных значениях параметра неустойчивости Тонкса – Френкеля. Из рис. 4 видно, что зависимости относительных пиковых значений напряженности поля на поверхности жидкости от длины волны являются почти линейными. С ростом длины волны возрастает и соответствующее относительное пиковое значение напряженности поля на поверхности жидкости. Только при малых значениях напряженности внешнего электрического поля E_0 или вообще при его отсутствии наблюдается снижение величины относительной пиковой напряженности поля на поверхности жидкости с ростом длины волны.



б

Рис. 4 Зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от длины волны при различных значениях параметра Тонкса–Френкеля W : 1) рис. 4а: 1 – $W = 0$; 2 – $W = 5,5$; 3 – $W = 11$; 2) рис.4б: 1 – $W = 0$; 2 – $W = 0,15$; 3 – $W = 0,3$

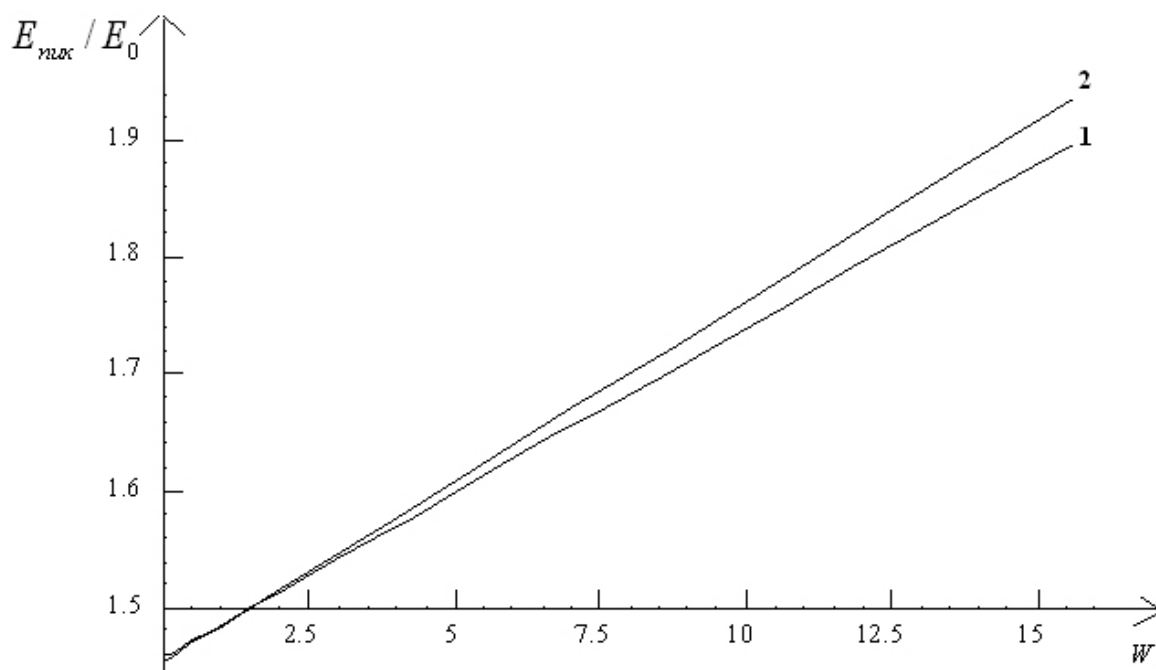


Рис. 5. Зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от параметра Тонкса–Френкеля W при различных температурах жидкости: 1 – $T = 0^\circ\text{C}$; 2 – $T = 90^\circ\text{C}$

На рис. 5 приведены зависимости относительных пиковых значений напряженности электрического поля на поверхности жидкости от величины параметра неустойчивости Тонкса–Френкеля W при различных температурах жидкости. Здесь длина волны полагается равной 0,1 см. Данные зависимости построены для воды при температуре 0°C и 90°C . При нормальном атмосферном давлении 0°C – температура замерзания воды, а 90°C близко к температуре кипения воды. Значения основных параметров жидкости при температуре 0°C : $\rho = 0,99987 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 75,6 \text{ дин/см}$, $\eta = 0,01797 \text{ пуаз}$. Значения основных параметров жидкости при температуре 90°C : $\rho = 0,96534 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 60,75 \text{ дин/см}$, $\eta = 0,00317 \text{ пуаз}$.

Зависимости, приведенные на рис. 5, иллюстрируют степень влияния температуры жидкости на величину пикового значения напряженности электрического поля на поверхности жидкости практически во всем диапазоне температур, где вода существует в жидком состоянии. В частности, из данного рисунка видно, что влияние температуры на величину пикового значения напряжен-

ности поля очень слабое. Более глубокий анализ показывает, что основным влияющим фактором при изменении температуры является изменение коэффициента поверхностного натяжения. Изменение вязкости, плотности жидкости с изменением температуры практически не оказывают влияния на величину относительного пикового значения напряженности электрического поля на поверхности жидкости.

Как было показано выше, на распределение величины электрического поля по заряженной поверхности слоя жидкости конечной толщины практически не оказывают влияние вязкость жидкости и толщина слоя жидкости. В этой связи при исследовании механизмов и возможностей зажигания коронного разряда на вершинах гребней волн на заряженной поверхности жидкости во внешнем электростатическом поле вполне допустимо рассматривать математические модели идеальной бесконечно глубокой жидкости.

Глава 3. Линейное взаимодействие волн

3.1. Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей

Введение. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца заряженной границы раздела двух идеальных несмешивающихся жидкостей различных плотностей, каждая из которых заполняет полубесконечное пространство, а верхняя жидкость движется с постоянной скоростью U параллельно границе раздела, как отмечалось в первой главе, представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике и химической технологии и достаточно подробно исследована как экспериментально, так и теоретически. Тем не менее некоторые вопросы, связанные с особенностями реализации такой неустойчивости остаются пока невыясненными. Сказанное, в частности, относится к более реалистичной ситуации, когда в отличие от классической идеализированной схемы верхняя жидкость имеет конечную толщину. Эта ситуация представляет интерес и в связи с проблемой раскачки ветром волн на поверхности воды. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца как теоретическая модель этого феномена дает существенно завышенные значения критической скорости ветра, при которой начинается рост волн. Расчеты с учетом вязкостей воды и воздуха, проведенные Майлзом [33, 69] в рамках представлений о пограничном слое, дают существенно лучшую оценку критической для начала роста волн скорости ветра. Согласно теории Майлза причиной раскачки волн является сдвиговое течение воздуха в пограничном слое со скоростью, являющейся функцией вертикальной координаты, движение же воздуха за пределами пограничного слоя на раскачку

волн влияния не оказывает. Как известно [34 – 35] толщина пограничного слоя является малой величиной, пропорциональной корню квадратному из кинематической вязкости воздуха. В этой связи естественно задаться вопросом о направлении изменения критических условий неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, т.е. неустойчивости границы раздела двух идеальных (невязких) сред, когда верхняя из них имеет конечную толщину.

1. Исследование проведем на простейшей модели идеальных несжимаемых жидкостей, когда верхняя диэлектрическая жидкость имеет толщину h и плотность ρ_1 , а нижняя идеально проводящая жидкость с плотностью ρ_2 заполняет в поле сил тяжести \mathbf{g} полубесконечное пространство $z < 0$ ($\mathbf{g} \parallel \mathbf{n}_z$, а \mathbf{n}_z есть орт декартовой оси OZ , перпендикулярной границе раздела; плоскость XOY совпадает с невозмущенной границей раздела верхней и нижней сред). Примем, что на невозмущенной капиллярным движением границе раздела имеется электрический заряд, распределенный с постоянной плотностью σ .

Проанализируем устойчивость капиллярных волн в такой системе, решая задачу для гармонических потенциалов поля скоростей движения в верхней ψ_1 и нижней ψ_2 жидкостях в декартовой системе координат

$$\Delta\psi_j = 0; \quad j = 1, 2 \quad (1)$$

с граничными условиями

$$z = h: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\rho_1 \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \rho_1 g \zeta + \frac{1}{2} \rho_1 [(\nabla\psi_1)^2 - U^2] - \alpha_1 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0, \quad (3)$$

$$z = 0: \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z} \approx U \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial z} \approx \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad (5)$$

$$\rho_1 \left\{ \frac{\partial \psi_1}{\partial t} + g\xi + \frac{1}{2} [(\nabla \psi_1)^2 - U^2] \right\} = \rho_2 \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial t} + g\xi \right] - P_\sigma - \alpha_2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0, \quad (6)$$

где $\zeta(x, t)$ – возмущение свободной поверхности верхнего слоя; $\xi(x, t)$ – возмущение границы раздела сред, связанное с капиллярным волновым движением; U – постоянная скорость движения верхней жидкости относительно нижней, направление которой определяет ориентацию оси OX ; α_1 и α_2 – коэффициенты поверхностного натяжения свободной поверхности и границы раздела; $P_\sigma = 4\pi\epsilon^{-1}\sigma^2 k\xi$ – электростатическое давление на границу раздела сред, происходящее из-за нарушения капиллярным движением жидкости однородного распределения электростатического заряда на границе раздела [23]; ϵ – диэлектрическая проницаемость верхней жидкости.

Потенциал поля скоростей, связанного с направленным движением верхней жидкости, имеет вид $x \cdot U$, а полный потенциал поля скоростей движения верхней жидкости запишем в виде суперпозиции:

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \psi_1^0(\mathbf{r}, t),$$

где компонента $\psi_1^0(\mathbf{r}, t)$ описывает капиллярное волновое движение в верхней жидкости.

Капиллярное движение порождается тепловым движением молекул жидкости и характеризуется весьма малыми амплитудами $\zeta_0 \sim (kT/\alpha_1)^{1/2}$ и $\xi_0 \sim (kT/\alpha_2)^{1/2}$; k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура.

2. Зададимся целью вывести дифференциальные уравнения, описывающие временную эволюцию амплитуд фиксированных мод капиллярных волн на свободной поверхности верхней жидкости и на границе раздела сред в результате действия давления электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей. Учтем, что потенциал поля скоростей в нижней среде при бесконечном удалении от границы раздела должен убывать до нуля. Это означает, что $\psi_2(\vec{\mathbf{r}}, t) \sim \exp(kz)$. Примем далее, что зависимость от координаты z потенциала поля скоростей в слое верхней жидкости конечной толщины должна иметь вид

$$\psi_1^0(\mathbf{r}, t) \sim (A_1(t)\exp(kz) + A_2(t)\exp(-kz)). \quad (7)$$

Используя (7) и граничные условия, получим соотношения

$$z = 0: \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1^0}{\partial z} = kG(A_1, A_2)\psi_1^0; \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial z} = k\psi_2; \quad (8)$$

$$z = h: \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1^0}{\partial z} = kH(A_1, A_2, kh)\psi_1^0;$$

$$G(A_1, A_2) = \frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2};$$

$$H(A_1, A_2, kh) = \frac{A_1(t)\exp(kh) - A_2(t)\exp(-kh)}{A_1(t)\exp(kh) + A_2(t)\exp(-kh)}.$$

$$G = \frac{H - \text{th}(kh)}{1 - H \cdot \text{th}(kh)}. \quad (9)$$

Несложно видеть, что при $\text{th}(kh) > 1$ и $1 > H \cdot \text{th}(kh)$ знаки коэффициентов G и H будут различны. Коэффициенты G и H можно считать не зависящими от времени t , если принять, что зависимости A_1 и A_2 от t идентичны друг другу.

Примем теперь, что возмущения свободной поверхности верхней жидкости $\zeta(x, t)$, связанные с капиллярным волновым движением, имеют периодический вид

$$\zeta \sim \exp(-ikx), \quad \xi \sim \exp(-ikx), \quad (10)$$

и, подставляя (8) – (10) в граничные условия (2) и (4), (5), найдем

$$z = h: \psi_1^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{kH} \left(U \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right) = \frac{1}{kH} \left(-ikU\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right);$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \frac{1}{kH} \left(-ikU\zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right); \quad (11)$$

$$z=0: \quad \psi_1^0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{kG} \left(U \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right) = \frac{1}{kG} \left(-ikU\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right);$$

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = x \cdot U + \frac{1}{kG} \left(-ikU\xi + \frac{\partial \xi}{\partial t} \right); \quad (12)$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{k} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (13)$$

где i – мнимая единица.

Учтем также, что

$$\nabla \psi_1 = \mathbf{U} + \nabla \psi_1^0, \quad (\nabla \psi_1)^2 \approx U^2 + 2U \nabla \psi_1^0 \equiv U^2 + 2U \frac{\partial}{\partial x} \psi_1^0. \quad (14)$$

Подставим теперь (10) – (14) в динамические граничные условия (3) и (6) и в линейном по ζ и ξ приближении получим искомые дифференциальные уравнения, описывающие эволюцию амплитуд капиллярных волн на свободной поверхности слоя верхней жидкости и на границе раздела сред:

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - 2ikU \frac{\partial \zeta}{\partial t} + (H\omega_0^2 - k^2 U^2) \zeta = 0, \quad (15)$$

$$\omega_0^2 \equiv gk + \alpha_1 \rho_1^{-1} k^3,$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - 2ik\rho U \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\rho G \omega_*^2 + \rho k^2 U^2) \xi = 0,$$

$$\omega_*^2 \equiv \rho_1^{-1} [gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_2 k^3 - 4\pi \varepsilon^{-1} \sigma^2 k^2],$$

$$\rho \equiv \rho_1 / (G\rho_2 - \rho_1). \quad (16)$$

Уравнения (15) и (16) являются обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, и их решения легко выписываются в виде

$$\zeta = \zeta_0 \operatorname{Re} \left[\exp \left\{ i t \left[k U \pm \left(H k g + H \alpha_1 \rho_1^{-1} k^3 \right)^{1/2} \right] \right\} \right], \quad (17)$$

$$\xi = \xi_0 \operatorname{Re} \left[\exp \left\{ i t \left[-k \rho U \pm \left(G \rho (\omega_*^2 + \rho \rho_2 \rho_1^{-1} k^2 U^2) \right)^{1/2} \right] \right\} \right], \quad (18)$$

где ζ_0 и ξ_0 – начальные значения амплитуд капиллярных волн, выражение $\operatorname{Re}[f]$ означает выделение вещественной части от функции f .

3. Физический смысл полученных решений определяется знаками подкоренных выражений в показателях экспонент, которые в свою очередь зависят от знаков коэффициентов $G = G(A_1, A_2)$ и $H = H(A_1, A_2, kh)$, введенных в соотношения (8) и (9).

Так, при $H > 0$ из (17) получим, что движения свободной поверхности слоя верхней жидкости будут волновыми при любых значениях физических параметров, характеризующих жидкость, а частота волн определится выражением, стоящим в (17) в показателе экспоненты, в квадратных скобках. В соответствии с эффектом Доплера частота волн будет линейной функцией скорости направленного движения верхней среды как целого. Неустойчивость свободной поверхности верхней жидкости возможна лишь при $H > 0$ и, видимо, может быть вызвана лишь взаимодействием с движениями границы раздела сред. Однако в линейной постановке задачи такая неустойчивость не проявляется.

Более сложным, согласно (18), будет спектр капиллярных движений, порождаемых границей раздела сред. При больших толщинах слоя верхней жидкости коэффициент $G < 0$ (при этом параметр ρ также отрицателен) и реализуется ситуация, рассмотренная в [26], когда условия неустойчивости границы раздела сред определяются комбинацией неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца и Тонкса – Френкеля. Решение (18) будет чисто периодическим в области значений физических параметров задачи, для которой выражение, стоящее в (18) под знаком радикала, положительно, т.е. при малых поверхностных плотностях заряда σ на границе раздела сред и при малых скоростях U движения верхней среды как целого. По мере увеличения σ и U выражение, стоящее под знаком радикала, изменит свой знак и из-под корня выйдет мнимая единица. В этом случае положительное

значение радикала определит инкремент неустойчивости ветви волн с частотой krU , бегущих по поверхности раздела сред, а отрицательное значение радикала определит декремент затухания другой ветви волновых движений, имеющих ту же частоту krU .

При уменьшении толщины слоя верхней жидкости растет коэффициент $G(A_1, A_2)$ и при некотором значении h он становится положительным. Если величина G находится в диапазоне $[0; \rho_1/\rho_2]$, то параметр ρ остается отрицательным и в решении (18) из-под радикала снова выходит мнимая единица. Область неустойчивости волнового движения границы раздела при этом снова сменится областью устойчивости. При значениях $G < \rho_1/\rho_2$ неустойчивость границы раздела сред может быть вызвана лишь достаточно большой плотностью поверхностного заряда σ , поскольку движение верхней среды как целого параллельно границе раздела оказывает в такой ситуации стабилизирующее влияние на границу.

Следует отметить, что ситуация, в которой знаменатель в выражении для определения ρ приближается нулю, является аналогом известного эффекта «мертвого моря» [70] и соответствует значительному росту амплитуды волн на границе раздела сред.

Итак, при конечной толщине слоя верхней жидкости h в рассматриваемой двухслойной системе несмешивающихся жидкостей возможно существование нескольких различных зон значений поверхностной плотности заряда σ на границе раздела сред, скорости U движения верхней среды как целого, в которых волновые движения, порождаемые границей раздела сред, неустойчивы.

Рассмотрим, однако, некоторые асимптотические ситуации.

4. В пределе весьма толстого слоя верхней жидкости («толстый» слой определим условием $kh > 6$) волны, генерируемые границей раздела и свободной поверхностью, не взаимодействуют между собой. Как известно, глубина проникновения волнового движения, генерируемого свободной поверхностью, внутрь жидкости порядка длины волны $h \sim \lambda \equiv 2\pi/k$ [70]. Поэтому в рассматриваемой двухслойной системе взаимодействия волн, порождаемых свободной поверхностью верхнего слоя и границей раздела сред, следует ожидать только при $kh < 6$ (что и подтвержда-

ется, как будет показано ниже, численными расчетами по соответствующему дисперсионному уравнению). В пределе $kh > 6$ для коэффициента H несложно получить оценку $H \approx 1$, и по свободной поверхности бегут волны, определяемые решением (17) при $H \approx 1$. На границе раздела в рассматриваемой ситуации можно принять, что волны имеют такой же вид, как и в задаче, когда верхний слой ограничен сверху жесткой плоской поверхностью, на которой выполняется условие

$$z = h: \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0, \quad (19)$$

получающееся из (2) при $\zeta \equiv 0$.

Зависимость потенциала поля скоростей течения в верхней жидкости $\psi_1^0(\mathbf{r}, t)$ в этом случае зависит от координаты z по закону $\sim \text{ch}(k(h - z))$, а коэффициент G определится соотношением

$$G \equiv -thkh.$$

Выражение для временной зависимости амплитуд волн на границе раздела принимает теперь вид

$$\xi = \xi_0 \text{Re} \left[\exp \left\{ it \left[\frac{\rho_1 k U}{\rho_2 thkh + \rho_1} \pm \left(\frac{\rho_1 thkh}{\rho_2 thkh + \rho_1} \left(\omega_*^2 - \frac{\rho_2 k^2 U^2}{\rho_2 thkh + \rho_1} \right) \right)^{1/2} \right] \right\} \right],$$

и критические условия реализации неустойчивости границы раздела легко выписываются:

$$gk(\rho_2 - \rho_1) + \alpha_2 k^3 - 4\pi\epsilon^{-1}\sigma^2 k^2 - \frac{\rho_1 \rho_2 k^2 U^2}{\rho_2 thkh + \rho_1} = 0.$$

Из этого соотношения видно, что в соответствии с общефизическими представлениями о причинах возникновения неустойчивости Кельвина – Гельмгольца критическое для начала развития неустойчивости значение скорости U увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости (толщина слоя верхней жидкости при этом должна оставаться достаточно большой, чтобы было справедливым условие (19)).

5. В другом предельном случае $kh \ll 6$, когда взаимодействие волн велико и является определяющим, картина будет существенно иной. Рассмотрим ситуацию, когда слой верхней жидкости настолько тонок, что поле скоростей капиллярных движений в нем слабо зависит толщины слоя h . При этом можно принять, что коэффициенты G и H близки друг к другу по абсолютной величине. В рассматриваемой линейной по малым возмущениям ζ и ξ модели взаимодействие волн может реализоваться только резонансным способом, т.е. в случае равенства частот и волновых чисел у взаимодействующих волн. Предположим, что граница раздела сред неустойчива и в соответствии с (18) совершает колебания с частотой $k\rho U$, амплитуда которых экспоненциально изменяется во времени со скоростью, определяемой величиной радикала в показателе экспоненты.

Примем, что в слое верхней жидкости капиллярные движения незатухающие, волновые, т.е. $H > 0$, а граница раздела сред пусть будет неустойчива в смысле комбинации неустойчивостей Кельвина – Гельмгольца и Тонкса – Френкеля [26] (т.е. $G < 0$). Очевидно, что когда H и G имеют противоположные знаки, взаимодействие волн на свободной поверхности весьма тонкого слоя и границе раздела сред проявляется наиболее отчетливо, так как волны находятся в противофазе. Потребуем выполнения равенства частот волновых движений (17) и (18):

$$kU \pm (Hkg + H\alpha\rho_1^{-1}k^3)^{1/2} = -kU \frac{\rho_1}{G\rho_2 - \rho_1}. \quad (20)$$

Учтем, что согласно предположению $G \approx H$, и получим из (20) квадратное алгебраическое уравнение относительно неизвестной константы H :

$$H^2 - HL + R = 0, \quad (21)$$

$$L \equiv kU^2(g + \alpha_1\rho_1^{-1}k^2)^{-1} - 2\rho_1\rho_2^{-1}, \quad R \equiv (\rho_1\rho_2^{-1})^2.$$

Рассмотрим для простоты ситуацию, когда $L > R$. При этом оба корня уравнения положительны и их можно представить в виде

$$H_1 \approx L - RL^{-1}, \quad H_2 \approx RL^{-1}. \quad (22)$$

Поскольку согласно (18) (при $G \approx -H$) величины инкрементов неустойчивостей, соответствующих различным корням H_j , приблизительно пропорциональны $H_j^{1/2}$, а корни H_1 и H_2 имеют разные порядки величин, то рассматриваемые движения легко различимы.

При произвольных соотношениях между R и L уравнение (21) может иметь корни разных знаков, а также и комплексно сопряженные. Комплексные значения H_j будут соответствовать сильному взаимодействию волновых движений обеих поверхностей, при котором в неустойчивые движения границы раздела сред вовлекаются и волны, генерируемые свободной поверхностью верхнего слоя жидкости.

Проведенный анализ является существенно качественным и базируется на ряде допущений и упрощений. Поэтому представляется целесообразным сопроводить его исследованием эволюции реализующихся капиллярных движений (при варьировании физических параметров системы) на основе численного анализа соответствующего дисперсионного уравнения.

6. Будем исследовать решение задачи (1) – (6) в виде

$$\psi_1 = (A_1 \exp(kz) + A_2 \exp(-kz)) \cos(kx - \omega t) + Ux,$$

$$\psi_2 = B \exp(kz) \cos(kx - \omega t),$$

$$\zeta = C \sin(kx - \omega t), \quad \xi = D \sin(kx - \omega t).$$

Подставляя эти выражения в граничные условия (2) – (6) и приравнявая нулю определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных амплитудах A_1 , A_2 , B , C , D , несложно получить дисперсионное уравнение задачи [71]. В безразмерных

переменных, в которых $\rho_2 = \alpha_2 = g = 1$ (а значит, и капиллярная постоянная для нижней жидкости, выбранная в качестве характерного линейного пространственного масштаба, также равна единице), искомое дисперсионное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned}
 & [1 + \rho \operatorname{th}(kh)]\omega^4 - 2Uk[2\rho \operatorname{th}(kh) + 1]\omega^3 + \left[\rho \operatorname{th}(kh) \left[6(Uk)^2 - \frac{k}{\rho} \left(1 + \frac{\alpha k^2}{\rho} \right) \right] + \right. \\
 & + k[1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk] - (Uk)^2 \left. \right] \omega^2 - 2k^2 U [2\rho k U^2 \operatorname{th}(kh) - (1 + k^2 + \alpha k^2 - Wk)] \omega - \\
 & - k^2 \left[\rho \operatorname{th}(kh) \left[1 + \frac{\alpha k^2}{\rho} + U^4 k^2 + \left(\frac{\alpha k^2}{\rho} + 1 \right) (1 - k^2 + Wk) \right] + U^2 k [1 + k^2 - Wk - \rho] \right] = 0
 \end{aligned}$$

$$W \equiv 4\pi\sigma^2 \varepsilon^{-1}, \quad \rho \equiv \rho_1, \quad \alpha \equiv \alpha_1. \quad (23)$$

7. На рис. 1-4 приведены результаты численного исследования по (23) влияния толщины верхнего движущегося жидкого слоя на закономерности развития неустойчивости в виде зависимостей действительной $\operatorname{Re}\omega = \operatorname{Re}\omega(U)$ и мнимой $\operatorname{Im}\omega = \operatorname{Im}\omega(U)$ компонент комплексной частоты от величины безразмерной скорости U . На приведенных рисунках вещественная часть комплексной частоты определяет частоты волновых движений жидкости, а мнимая – инкременты неустойчивости (в области $\operatorname{Im}\omega > 0$) и декременты затухания (в области $\operatorname{Im}\omega < 0$).

Ветви дисперсионного уравнения с номерами 1-3 на рис. 1 (рассчитанного при $h = 5$) описывают капиллярные движения, порождаемые границей раздела сред. Ветви с номерами 4 и 5 описывают капиллярные волновые движения, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости. На рис. 1 эти ветви являются параллельными прямыми, сориентированными (в соответствии с эффектом Доплера) под некоторым углом к оси абсцисс (оси U). Очевидно, что ветвь 4 описывает волну, распространяющуюся по направлению U , а ветвь 5 соответствует такой же волне, бегущей в противоположном направлении.

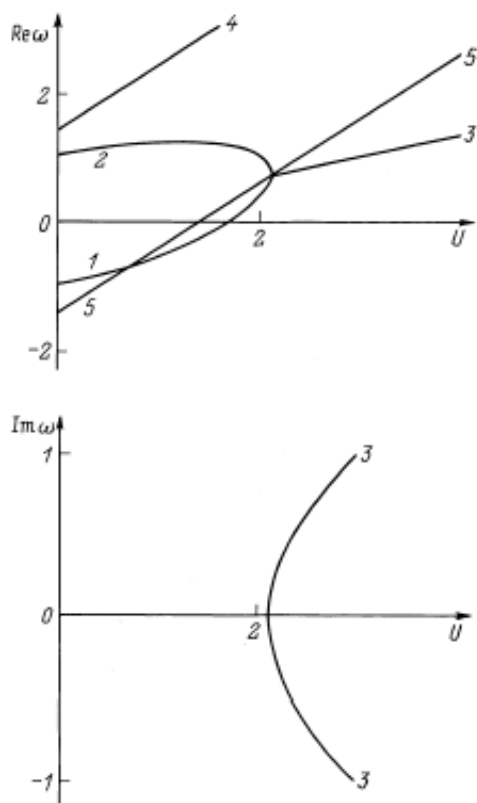


Рис. 1. $k=1$; $\alpha=0.5$; $\rho=0.5$; $W=0$

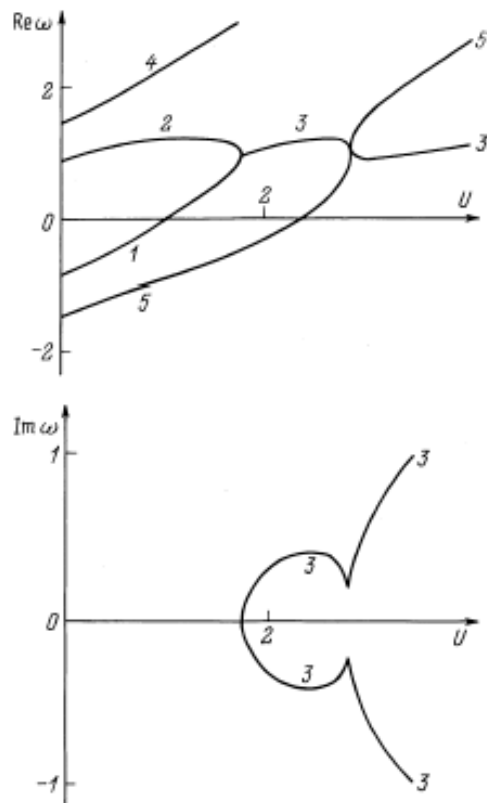


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но при $h=1$

Из рис. 1 видно, что, как и отмечалось выше, при достаточно большой безразмерной толщине слоя верхней жидкости волны, порождаемые свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела, не взаимодействуют между собой, а закономерности реализации неустойчивости Кельвина – Гельмгольца (характеризуемой ветвью 3) не отличаются от классического варианта с бесконечной толщиной верхней жидкости $h \rightarrow \infty$. Согласно рис. 1 при некотором значении скорости движения верхней среды $U=U_*$ ветви волновых движений 1 и 2 сливаются, образуя два волновых же движения 3, амплитуда одного из которых экспоненциально затухает со временем с декрементом, определяемым отрицательной частью мнимой компоненты ветви 3, а другого экспоненциально нарастает с инкрементом, определяемым положительной частью мнимой компоненты ветви 3.

При уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости (рис. 2 – 4) до значений $h \sim 1$ ветви 1 – 3 начинают взаимодействовать с ветвями 4 и 5 с образованием новых составных

движений 6-10 и с деформированием ветвей 1, 2, 4. Причем движения 4, 6, 7, 9 являются волновыми незатухающими, а движения 8 и 10 содержат как периодически экспоненциально затухающие (для которых $\text{Im}\omega < 0$), так и периодически экспоненциально нарастающие (неустойчивые) ветви (для которых $\text{Im}\omega > 0$). Неустойчивое движение 10 соответствует классической неустойчивости Кельвина – Гельмгольца, и для него критическая скорость начала реализации неустойчивости U_* увеличивается с уменьшением толщины слоя верхней жидкости (рис. 1 – 4). Неустойчивое движение 8 обязано своим происхождением взаимодействию капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред. Как видно из рис. 3 – 4, при уменьшении безразмерной толщины слоя верхней жидкости h область реализации неустойчивого движения 8 в отличие от движения 10 смещается в сторону меньших значений скорости верхней жидкости U_* , а величина его инкремента при этом снижается.

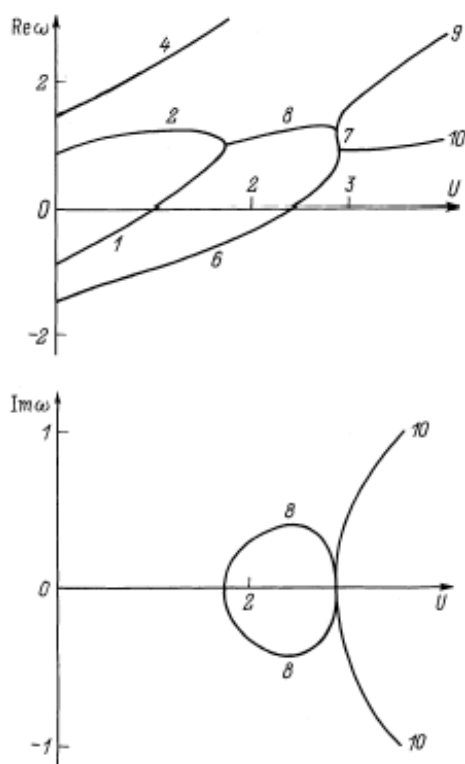


Рис.3. $h = 0.9$

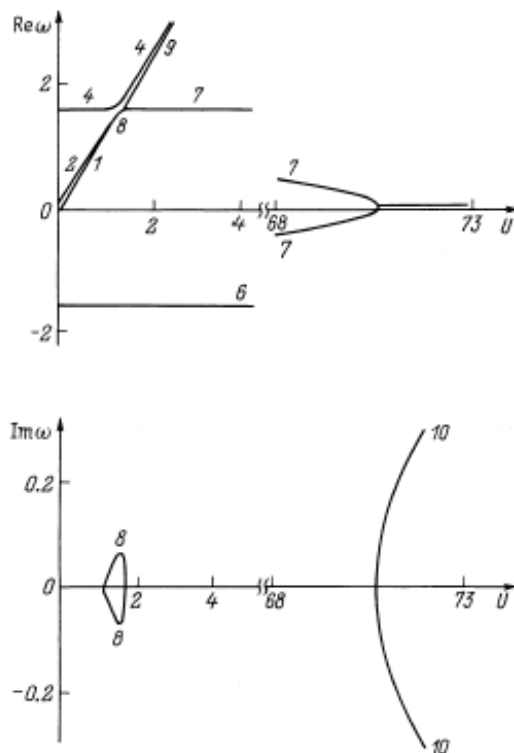


Рис.4. $h = 0.001$

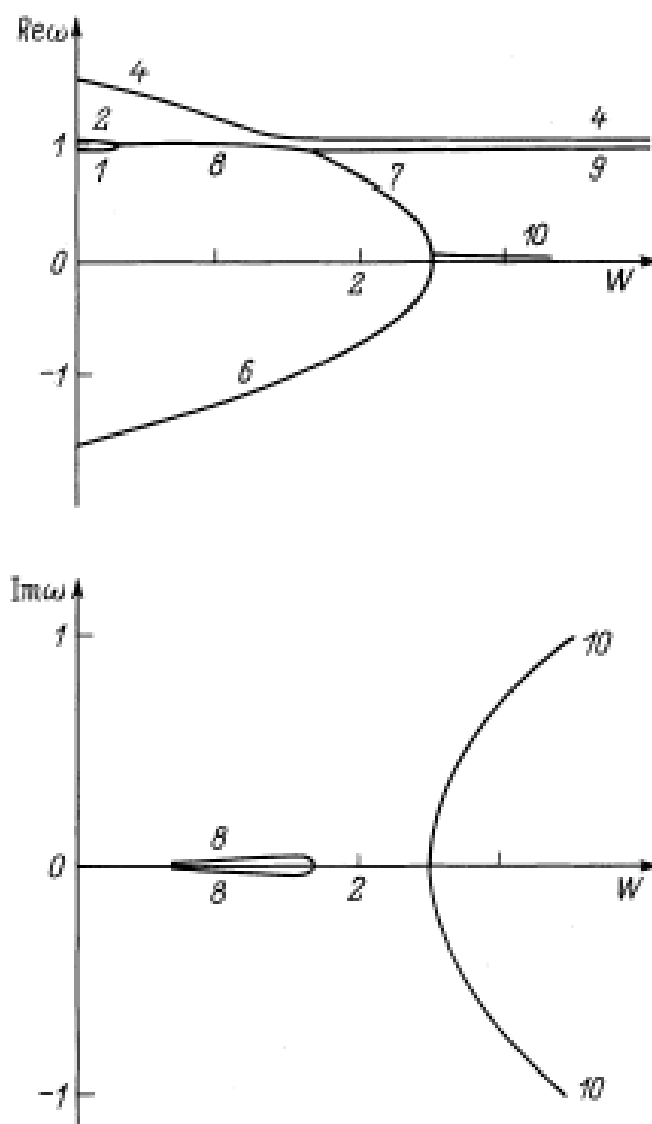


Рис. 5. $h = 0.0001$; $U = 1$

На рис. 5 приведены результаты расчета по дисперсионному уравнению (23) зависимости действительной $\text{Re}\omega(W)$ и мнимой $\text{Im}\omega(W)$ компонент комплексной частоты от величины параметра W , характеризующего устойчивость заряженной поверхности жидкости по отношению к собственному заряду (т.е. возможность реализации неустойчивости Тонкса – Френкеля), построенные при $U = 1$ и $h = 0.0001$. Нумерация приведенных ветвей такая же, как и на предыдущих рисунках, Ветвь 10 описывает аперiodическую неустойчивость Тонкса – Френкеля (вызванную весьма большими значениями поверхностного заряда на границе раздела), развивающуюся на фоне колебательной неустойчивости

Кельвина – Гельмгольца (происходящей из-за разрыва поля скоростей на границе раздела сред). Численные расчеты показывают, что выделение самостоятельного движения δ , вызванного взаимодействием волн, порождаемых разными поверхностями (по той же схеме, что и на рис. 2, 3), происходит при безразмерных толщинах слоя верхней жидкости, измеряемых сотыми долями единицы.

На рис.4 – 5 видно, что при уменьшении толщины слоя верхней жидкости скорости, критические для реализации неустойчивости границы раздела, порождаемой взаимодействием волн, имеющих разное происхождение, снижаются, как и величина инкремента неустойчивости. Наличие на границе раздела сред некомпенсированного электрического заряда усиливает этот эффект.

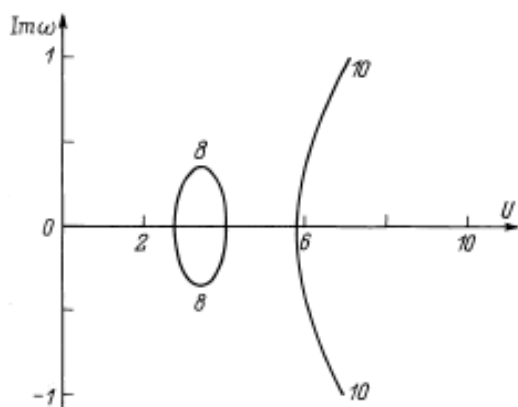
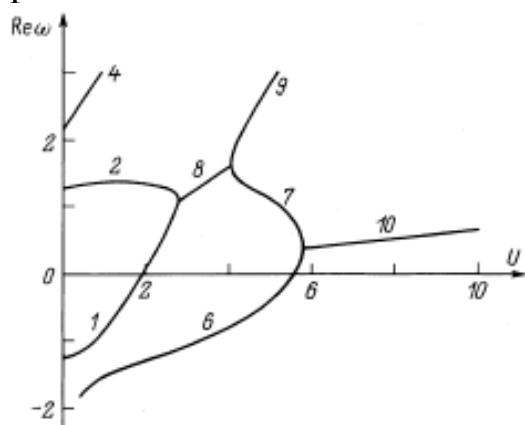


Рис.6. $k=1$; $\alpha=0.5$; $\rho=0.1$; $h=0.9$; $W=0$

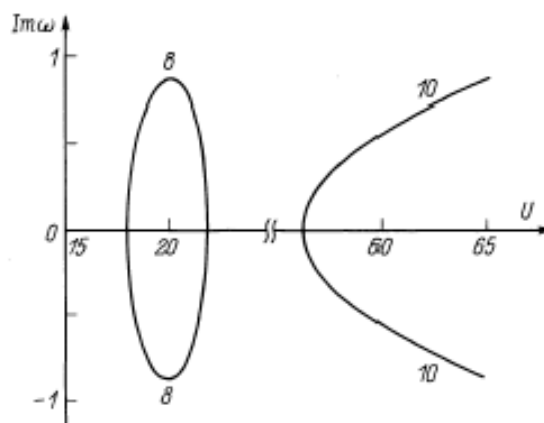
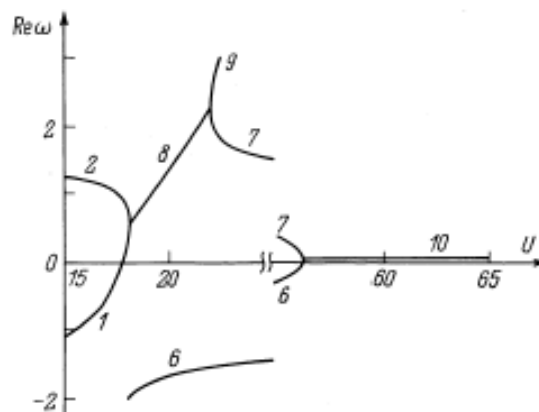


Рис.7. То же. Что на рис. 6, при $\rho=0.001$

На рис.6 – 7 приведены зависимости действительной $\text{Re} \omega(U)$ и мнимой $\text{Im} \omega(U)$ компонент комплексной частоты от величины

безразмерной скорости U , рассчитанные при постоянной толщине слоя верхней жидкости, но различных значениях безразмерной плотности верхней среды. Нумерация и смысл приведенных ветвей такие же, как и на рис. 3 – 4 (ветвь 4 на рис. 7 вышла за пределы приведенной области значений величин). Видно, что с уменьшением плотности верхней среды (с уменьшением ρ) области значений безразмерной скорости U , в которых реализуются неустойчивости, описываемые ветвями 8 и 10, смещаются в сторону увеличения и расстояние между ними увеличивается. Интересно, что при этом величина инкремента неустойчивости, порожденной взаимодействием волн (ветвь 8), существенно увеличивается, сравниваясь с величиной инкремента ветви 10.

Согласно численным расчетам (рис. 3, 6) уменьшение плотности верхней среды приводит к увеличению значения толщины верхнего слоя, при котором формируется в виде самостоятельного движения 8, порожденное взаимодействие волн.

Заключение. При толщинах слоя верхней жидкости, меньших капиллярной постоянной нижней жидкости, имеет место взаимодействие капиллярных движений, порождаемых свободной поверхностью верхней жидкости и границей раздела сред, приводящее к появлению дополнительной, ранее неизвестной колебательной неустойчивости. Критические условия ее реализации снижаются с уменьшением толщины слоя, хотя при этом снижается и величина инкремента. Наличие на границе раздела сред нескомпенсированного электрического заряда усиливает этот эффект.

Сравнение результатов проведенного выше численного анализа дисперсионного уравнения (23) с результатами качественного рассмотрения в разделах 2 – 5 показывает, что взаимодействие различных ветвей капиллярных волновых движений между собой в матфизическом смысле в используемой линейной постановке задачи реализуется через граничные условия.

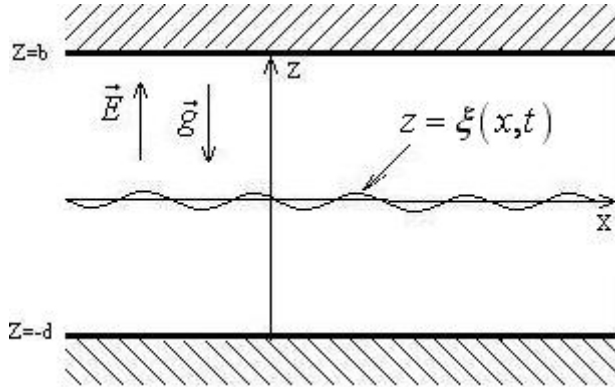
3.2. Взаимодействие с дном волн в слое вязкой жидкости конечной толщины

В этом разделе снова вернемся к задаче, детально разобранной в предыдущей главе для нелинейных волн, но проведем рассмотрение в линейном приближении, исследуя неустойчивость волн бесконечно малой амплитуды на более физической основе с детальным анализом дисперсионного уравнения, обращая внимание на взаимодействие волн на поверхности слоя вязкой жидкости с твердым дном.

1. Будем решать задачу о расчете спектра капиллярных волн на граничащей с вакуумом плоской заряженной поверхности идеально проводящей жидкости конечной глубины d с плотностью ρ , вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ , в поле тяжести g и в электростатическом поле. Верхняя среда обладает диэлектрической проницаемостью ϵ . Напряженность электрического поля E у поверхности жидкости определяется разностью потенциалов между электродами: нижним, расположенным при $z = -d$, на котором лежит слой жидкости, поддерживаемым при потенциале $\Phi_1 = 0$, и параллельным ему противоэлектродом, отстоящим от поверхности жидкости на b , имеющим потенциал $\Phi_2 = V$.

Расположим декартову систему координат так, чтобы ось z была направлена вертикально в верх $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$ (\mathbf{n}_z — орт декартовой координаты z), а ось x — по направлению движения плоской капиллярной волны $\propto \exp(st + ikx)$. Примем также, что плоскость $z = 0$ совпадает со свободной невозмущенной поверхностью жидкости (s — комплексная частота, k — волновое число, t — время, i — мнимая единица). Пусть функция $\xi(x, t) = \xi_0 \exp(st + ikx)$ описывает малое возмущение равновесной плоской поверхности жидкости, вызванное тепловым капиллярным волновым движением весьма малой ($\xi_0 \propto (kT/\gamma)^{1/2}$) амплитуды; k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей движения жидкости, вызванного возмущением $\xi(x, t)$, имеющее тот же порядок малости.

Для упрощения дальнейших рассуждений обезразмерим все величины на их характерные значения, принимая $g = \rho = \gamma = 1$,



$$d_* = \left(\frac{\rho g}{\gamma} \right)^{-1/2}, \quad v_* = \left(\frac{\gamma^3}{\rho^3 g} \right)^{1/4},$$

$$k_* = \left(\frac{\rho g}{\gamma} \right)^{1/2}, \quad s_* = \left(\frac{\rho g^3}{\gamma} \right)^{1/2},$$

$$W_* = \sqrt{\rho g \gamma}.$$

Линеаризованная система уравнений гидродинамики вязкой жидкости (за всеми безразмерными величинами сохраняем прежние обозначения), описывающая движение жидкости в анализируемой системе, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{U}) + \nu \Delta \mathbf{U} + \mathbf{g}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad (2)$$

$$z = -d: \quad \mathbf{U} = 0, \quad (3)$$

$$z = 0: \quad -\frac{\partial \xi(x, t)}{\partial t} + U_z = 0, \quad (4)$$

$$z = 0: \quad \mathbf{n} \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0, \quad (5)$$

$$z = 0: \quad -P(\mathbf{U}) + \rho g \xi + 2\rho \nu \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{div} E_i = 0, \quad E_i = -\nabla \Phi_i \quad (i=1, 2), \quad (7)$$

$$z = -d: \quad \Phi_1 = 0, \quad (8)$$

$$z = d: \quad \Phi_2 = V, \quad (9)$$

$$z = \xi: \quad \Phi_1 = \Phi_2, \quad (10)$$

$P(\mathbf{U})$, $P_E(\xi)$, $P_\sigma(\xi)$ – добавки к давлению электрических сил и давлению сил поверхностного натяжения, вызванные возмущением поверхности ξ , имеющие первый порядок малости по ξ ; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ – единичные вектора нормали и касательной к поверхности жидкости; индекс 1 относится к жидкости, 2 – к внешней среде.

2. Двумерность задачи (возмущение формы поверхности $\xi(x, t)$ и поле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ считаем не зависящими от координаты y) позволяет провести скаляризацию задачи на основе теоремы Гельмгольца, вводя потенциал поля скоростей $\phi(\mathbf{r}, t)$ и функцию тока $\psi(\mathbf{r}, t)$ [6],

$$\mathbf{U} = \hat{\mathbf{N}}_1 \phi + \hat{\mathbf{N}}_2 \psi, \quad \hat{\mathbf{N}}_1 \equiv \nabla, \quad \hat{\mathbf{N}}_2 \equiv [\nabla, \mathbf{n}_y], \quad (11)$$

\mathbf{n}_y – орт декартовой координаты y ; $\hat{\mathbf{N}}_1$ и $\hat{\mathbf{N}}_2$ – векторные дифференциальные операторы, удовлетворяющие соотношениям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа. Эрмитовый оператор $\hat{\mathbf{N}}_1$ выделяет потенциальную часть движения, а антиэрмитовый $\hat{\mathbf{N}}_2$ – вихревую.

Подставляя разложение (11) в векторные уравнения (1), (2) и приняв собственные значения операторов $\hat{\mathbf{N}}_1 \hat{\mathbf{N}}_2$ и $\hat{\mathbf{N}}_2 \hat{\mathbf{N}}_1$ отличными от нуля, получим систему скалярных уравнений

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - \nu \Delta \psi = 0, \quad (12)$$

$$\Delta \phi = 0, \quad (13)$$

$$P(\mathbf{U}) = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g z. \quad (14)$$

Подставляя разложение (11) в (3) – (6), преобразуем граничные условия для векторного поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ в граничные

условия для скалярных функций $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$. Условие (3) на нижнем электроде преобразуется в условия

$$z = -d: \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0, \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (16)$$

Условия (4) – (6) на свободной поверхности жидкости примут вид

$$z = 0: \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (17)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad (18)$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \xi + 2\rho v \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right\} - P_E(\xi) + P_\sigma(\xi) = 0. \quad (19)$$

Система уравнений (12) – (14) с граничными условиями (15) – (19) представляет гидродинамическую часть задачи в скаляризованном виде.

Чтобы удовлетворить динамическому граничному условию для нормальных компонент тензора напряжений (19), следует воспользоваться выражением для $P_E(\xi)$, полученным в предыдущей главе, и известным выражением для добавки к давлению сил поверхностного натяжения P_σ , имеющим в линейном по ξ приближении вид

$$P_\sigma(\xi) \approx -\sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

3. Ограниченные периодические по x решения системы (12), (13) в декартовой системе координат будем искать в форме

$$\varphi = (C_1 \operatorname{sh}(kz) + C_2 \operatorname{ch}(kz)) \exp(st - ikx), \quad (20)$$

$$\psi = (C_3 \operatorname{sh}(qz) + C_4 \operatorname{ch}(qz)) \exp(st - ikx), \quad (21)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, s – комплексные величины.

Подстановка (23), (24) в граничные условия (15) – (19) приводит к однородной системе пяти линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных констант $C_1, C_2, C_3, C_4, \xi_0$:

$$GC_1 + 2\rho v q C_3 + F\xi_0 = 0,$$

$$2\rho v k C_2 + GC_4 = 0,$$

$$-C_1 \operatorname{sh}(kd) + C_2 \operatorname{ch}(kd) - C_3 \operatorname{sh}(qd) + C_4 \operatorname{ch}(qd) = 0,$$

$$kC_1 \operatorname{ch}(kd) - kC_2 \operatorname{sh}(kd) + qC_3 \operatorname{ch}(qd) - qC_4 \operatorname{sh}(qd) = 0,$$

$$C_2 + C_4 - s\xi_0 = 0,$$

где

$$G = \frac{\rho v}{k} (k^2 + q^2), \quad q^2 = k^2 + s/v,$$

$$F = \rho g + \gamma k^2 - \frac{\varepsilon E_0^2}{4\pi} k \operatorname{cth}(kb).$$

Необходимым и достаточным условием существования нетривиального решения полученной системы уравнений является равенство нулю ее определителя, составленного из коэффициентов, стоящих при искомым величинах C_i и ξ_0 :

$$\begin{vmatrix} G & 0 & 2\rho vq & 0 & F \\ 0 & 2\rho vq & 0 & G & 0 \\ -\text{sh}(kd) & \text{ch}(kd) & -\text{sh}(qd) & \text{ch}(qd) & 0 \\ k\text{ch}(kd) & -k\text{sh}(kd) & q\text{ch}(kd) & -q\text{sh}(qd) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -s \end{vmatrix} = 0.$$

Это условие дает дисперсионное отношение для спектра капиллярных движений жидкости в анализируемой системе:

$$\begin{aligned} &4qk^2(k^2 + q^2) + (k^2 + q^2)^2(k\text{sh}(kd)\text{sh}(qd) - q\text{ch}(kd)\text{ch}(qd)) + \\ &+ 4k^3q(q\text{sh}(kd)\text{sh}(qd) - k\text{ch}(kd)\text{ch}(qd)) - \\ & - \frac{Z(k)}{v^2}(q\text{ch}(qd)\text{sh}(kd) - k\text{ch}(kd)\text{ch}(qd)) = 0, \end{aligned} \quad (22)$$

$$Z(k) \equiv k + k^3 - Wk^2\text{cth}(kb), \quad W = \frac{\epsilon E_0^2}{4\pi}, \quad E_0 = -V/b.$$

В предельном случае бесконечно глубокой идеальной жидкости (22) записывается совсем просто:

$$s^2 = \frac{k}{\rho}(\epsilon E_0^2 k \text{cth}(kb) - \rho g - \gamma k^2)$$

и определяет критические условия реализации НТФ. Это соотношение аналогично выражению, полученному в [23] для идеальной, идеально проводящей жидкости и отличающемуся от него лишь множителем $\text{cth}(kb)$, учитывающим конечность расстояния до верхнего электрода. Это незначительное, на первый взгляд, обстоятельство приводит к интересным физическим последствиям, а именно указывает на зависимость критических условий реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости от расстояния до верхнего противоэлектрода b , которая становится заметной при k сравнимом с b .

4. Численный анализ дисперсионного соотношения (22) показывает, что оно имеет бесконечное однопараметрическое семейство решений (количество ветвей с номерами большими чем 3, и с ординатами, увеличивающимися по абсолютной величине по мере увеличения номера ветви бесконечно) (рис. 1) в отличие от дисперсионного соотношения для жидкости бесконечной глубины [3], спектр капиллярных движений которого описывается кривыми 1 – 3 на рис. 1. С математической точки зрения это обстоятельство связано с появлением в рассматриваемой ситуации в дисперсионном уравнении гиперболических функций от комплексной частоты.

С физической точки зрения появление бесконечного семейства аperiodически сильно затухающих движений связано с отражением движущейся жидкости от дна. Кривая 2 на рис. 1, в области $\text{Re } s > 0$, определяет инкремент неустойчивости заряженной поверхности жидкости (инкремент неустойчивости Тонкса – Френкеля). Кривая 1 описывает затухающее волновое движение. Кривая 3, так же как и часть кривой 2, в области $\text{Re } s < 0$ определяет затухающие аperiodические движения жидкости. Все новые по сравнению со случаем бесконечно глубокой жидкости ветви дисперсионного соотношения определяют вихревые сильно аperiodически затухающие движения.

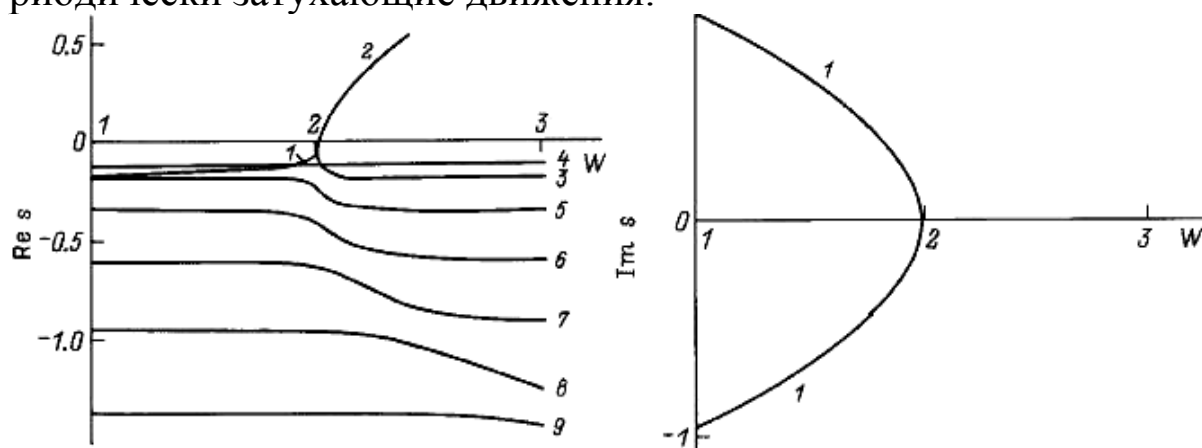


Рис.1. Зависимости вещественной и мнимой компонент безразмерной частоты s капиллярного движения жидкости от величины безразмерного параметра W характеризующего давление электрического поля на свободную поверхность жидкости. $b = 10, k = 1, \nu = 0.1, d = 5$

Влияние конечности толщины слоя на параметры движений жидкости существенно сказывается, когда она становится сравнимой с длиной волны, как это видно из рис. 2, 3, где приведены зависимости комплексной частоты от волнового числа для докритических и закритических значений электрического поля у поверхности жидкости. На рис. 2б приведена левая часть рис. 2а в более крупном масштабе, чтобы было видно, как происходит переход от состояния устойчивых капиллярных движений жидкости к неустойчивости Тонкса – Френкеля, которая реализуется при $W > 2$. При этом часть ветви 2, касающаяся при $k=1$ оси абсцисс поднимается над нею и дает инкремент нарастания неустойчивости Тонкса – Френкеля, как это видно из рис. 3, где приведена Зависимость $\text{Re } s = \text{Re } s(k)$ при $W = 4$.

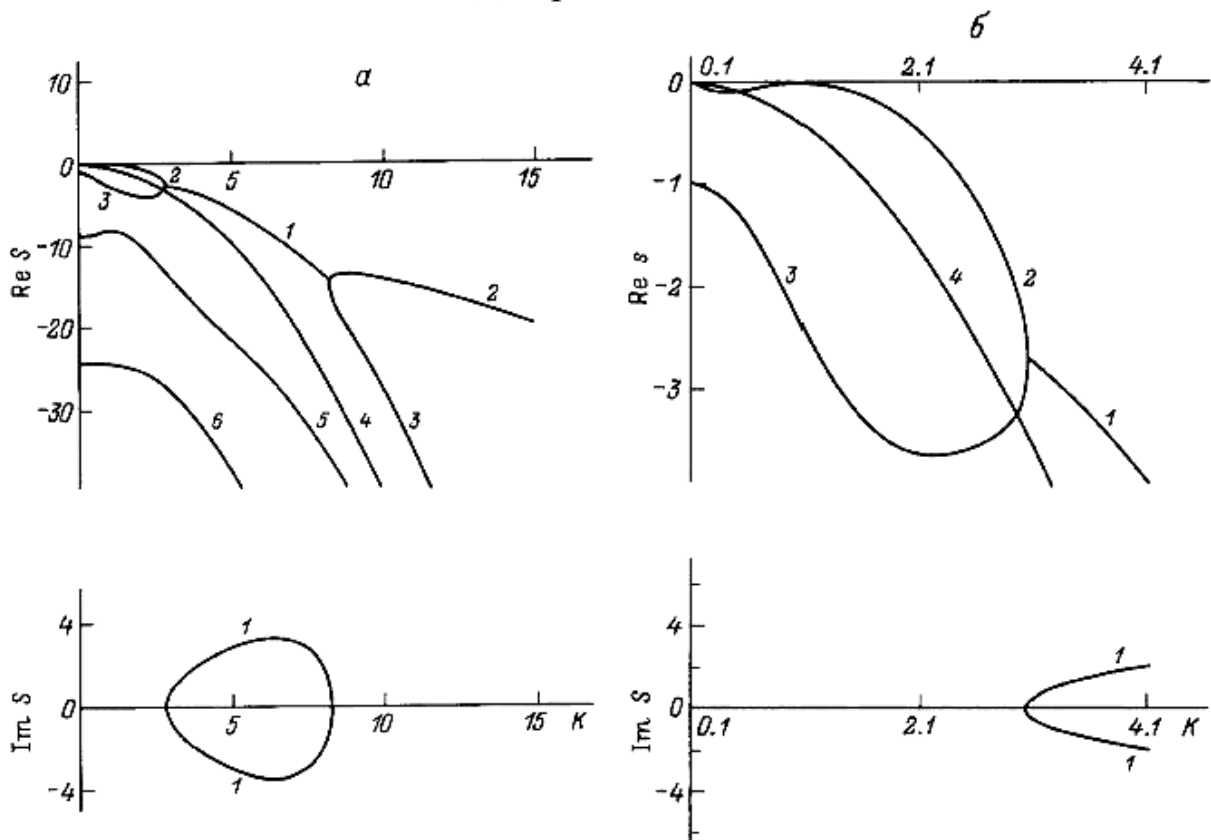


Рис. 2. Зависимости вещественной и мнимой компонент частоты S от волнового числа k при $b=10, \nu=0.4, d=1, W=2$ — (а); увеличенную часть рис. 2а — (б)

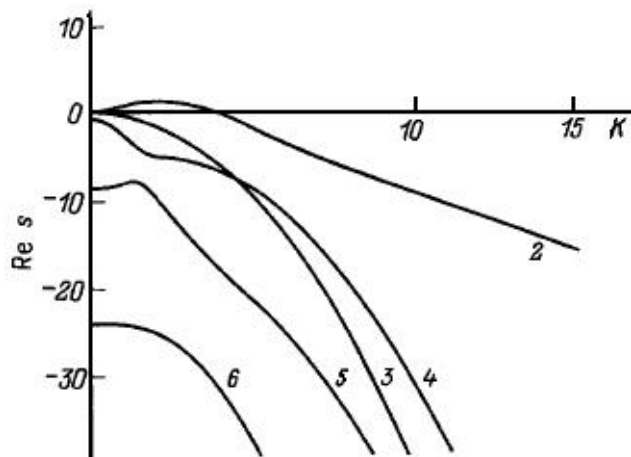


Рис. 3. Зависимости вещественной компоненты s от волнового числа k при $b=10, \nu=0.4, d=1, W=4$

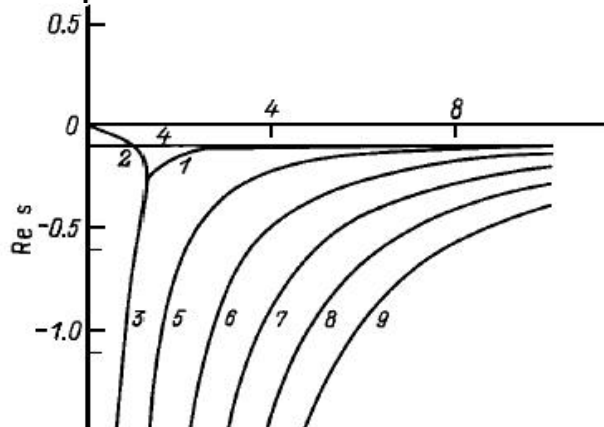


Рис. 4. Зависимости вещественной и мнимой компонент s от глубины слоя жидкости d для $k=1, b=10, \nu=0.1, W=1.9$.

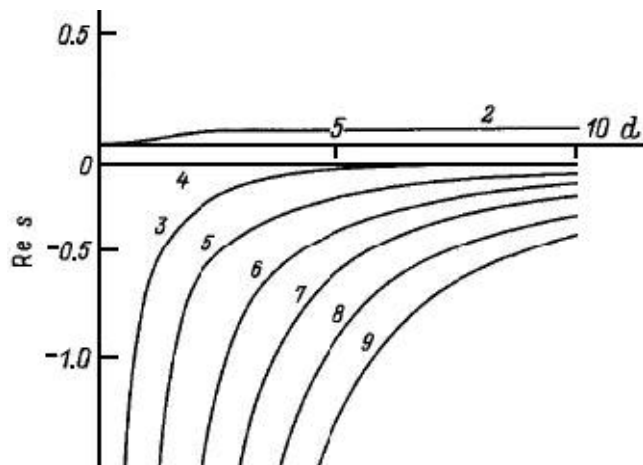
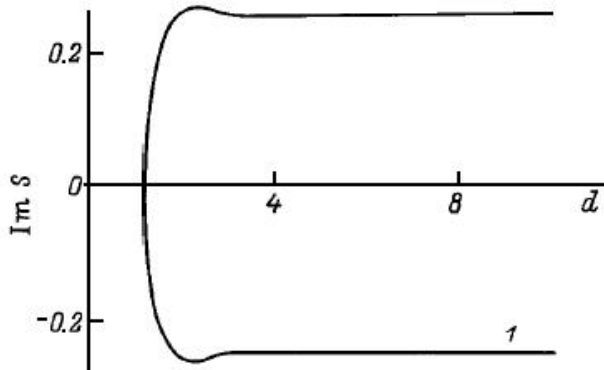


Рис. 5. Зависимости вещественной компоненты s от глубины слоя жидкости d для $k=1, b=10, \nu=0.1, W=2.02$

На рис. 4, 5 приведены зависимости комплексной частоты от глубины слоя жидкости d для $k=1$ при докритическом ($W=1.9$) и закритическом ($W=2.02$) значениях электрического поля у поверхности жидкости. Видно, что и инкремент неустойчивости Тонкса – Френкеля, и частоты капиллярных волн, и декременты затухания апериодических вихревых движений жидкости зависят от d . Причем эта зависимость наиболее существенна при $d < 2$. Расчеты зависимости комплексной частоты от вязкости в докритическом и закритическом режимах показывают, что с увеличением вязкости декременты затухающих движений растут и инкремент неустойчивости Тонкса – Френкеля убывает.

Тот факт, что на условие существования капиллярных волн влияют и вязкость, и толщина слоя, подтверждает и зависимость, приведенная на рис. 6, которая для $k=1$ (кривая 1) и 10 (кривая 2) при фиксированной толщине слоя определяет характерную вязкость полного исчезновения капиллярного волнового движения. Геометрическое место точек, находящееся выше кривой, соответствует ситуации, когда капиллярное волновое движение с данным волновым числом отсутствует, ниже кривой оно существует. Как видно из графика, влияние толщины слоя становится незаметным при $d < \lambda$ и слабо сказывается при $d > \lambda$.

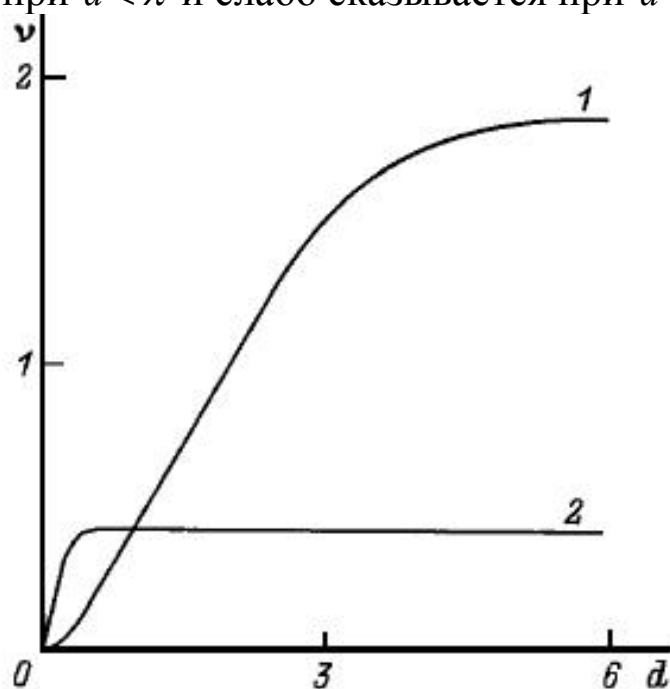


Рис. 6. Зависимости вязкости от толщины слоя жидкости, при которой прекращается капиллярное волновое движение, при $b=10, W=2.02$; $k=1$ (1), 10 (2)

Из выше изложенного анализа следует, что уменьшение толщины заряженного слоя жидкости до величины, сравнимой с рассматриваемой длиной волны, приводит к увеличению декрементов всех затухающих движений жидкости и к снижению инкремента неустойчивости Тонкса – Френкеля. Уменьшение толщины слоя жидкости приводит так же к сужению спектра реализующихся в нем волновых движений за счет ограничения как со стороны высоких, так и со стороны низких значений волновых чисел, характеризующих движения, принимающие участие в реализации неустойчивости Тонкса – Френкеля. Волновое число наиболее неустойчивой моды увеличивается с увеличением напряженности электрического поля у поверхности жидкости и с уменьшением толщины слоя.

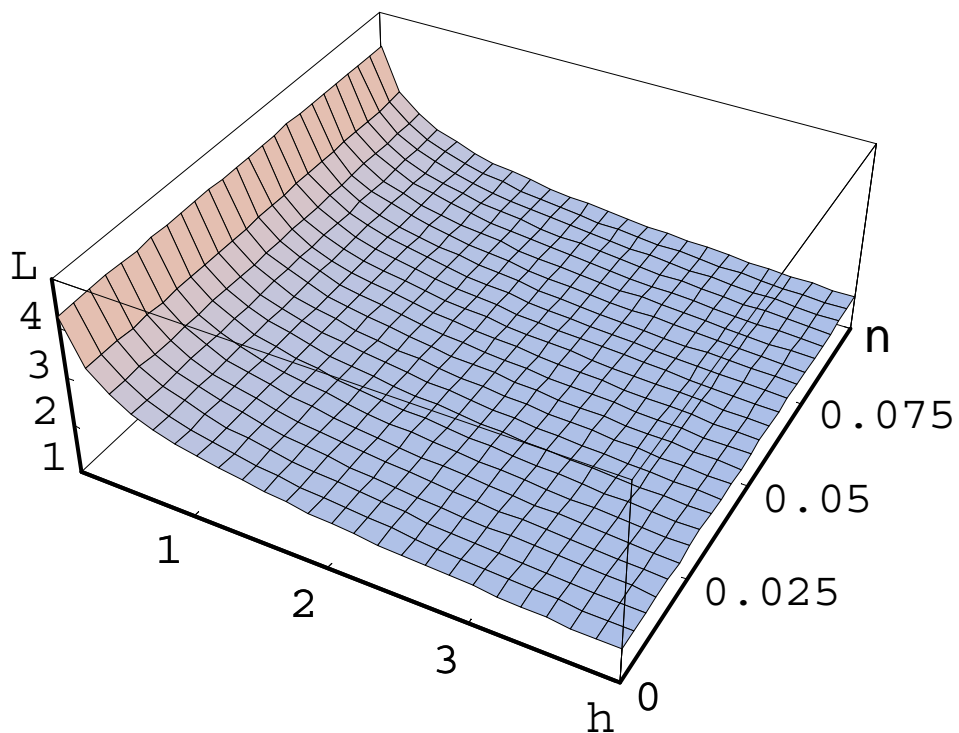
5. Взаимодействие волн с дном. В рассмотренной задаче пространственная скорость убывания по мере удаления от свободной поверхности в глубину вихревого движения (скорость убывания функции ψ в (21)), порождаемого в вязкой жидкости волной, бегущей по ее свободной поверхности, определяется параметром

$$q = k \sqrt{1 + \frac{s}{\nu \cdot k^2}},$$

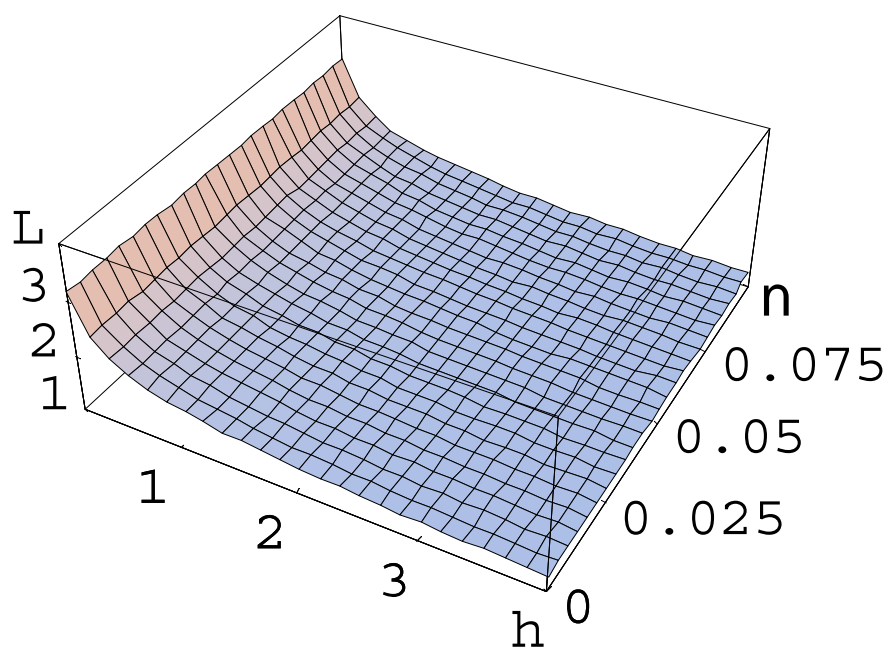
который можно найти из дисперсионного уравнения (22). В бесконечно глубокой жидкости затухание вихревого движения связано с действием вязкости в объеме жидкости. В слое вязкой жидкости конечной толщины на величину параметра q будет оказывать влияние и затухание на твердом дне. Из общефизических соображений очевидно, что q^{-1} для волны фиксированной длины должен расти с уменьшением толщины слоя h . Чтобы исследовать данный феномен в пределе малой вязкости найдем отношение обсуждаемого параметра для слоя жидкости конечной толщины q_h^{-1} к его значению для бесконечно глубокой жидкости q_∞^{-1} :

$$L \equiv \frac{q_{\infty}}{q_h} = \sqrt{\frac{\nu \cdot k^2 + \sqrt{4\nu^2 \cdot k^4 - (k + k^3 - W \cdot k^2)}}{\nu \cdot k^2 + \sqrt{4\nu^2 \cdot k^4 - (k + k^3 - W \cdot k^2)} \cdot th(kh)}}.$$

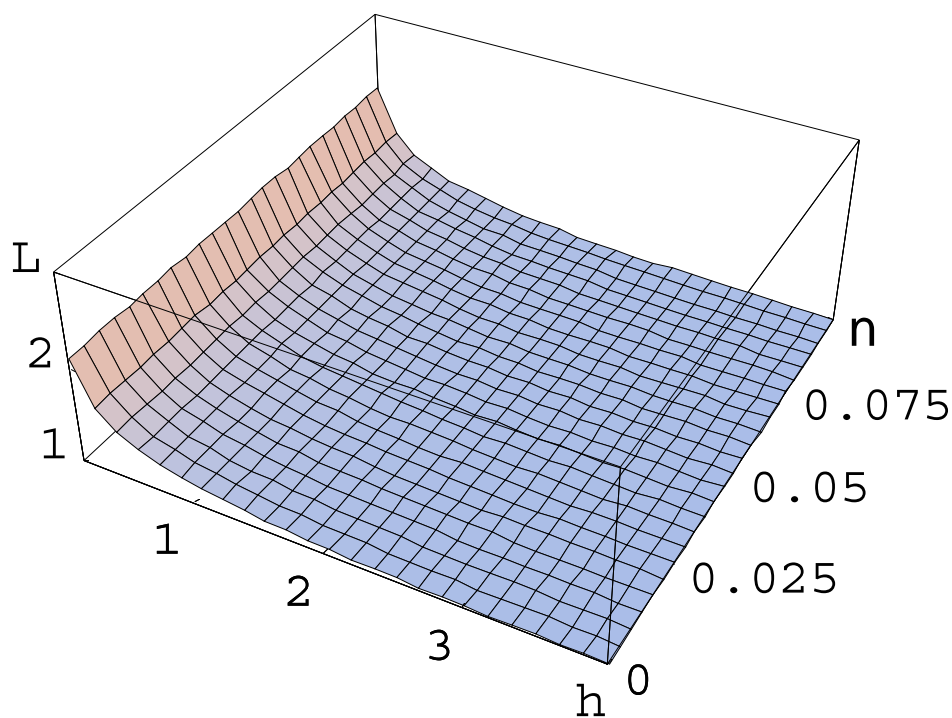
На рис. 7 приведены рассчитанные по (23) зависимости $L = L(\nu, k, h)$.



a



б



В

Рис.7. Зависимость отношения характерных линейных масштабов пространственного убывания вихревого движения в слое конечной толщины и в бесконечно глубокой жидкости L от толщины слоя h и вязкости жидкости при различных волновых числах: а) $k = 0.03$; б) $k = 0.1$; в) $k = 0.5$

Из приведенных рисунков видно что в одном и том же диапазоне изменения толщины слоя величина L с уменьшением волнового числа (с увеличением длины волны) возрастает зависимость L от величины коэффициента вязкости в использованном приближении малой вязкости практически незаметна.

Заключение. В слое вязкой жидкости конечной толщины на затухании волнового движения существенно сказывается влияние твердого дна.

Литература

1. Baily, A.G. Electrostatic atomization of liquids (revue) / A.G. Baily // Sci. Prog., Oxf. 1974. – V. 61. – P. 555-581.
2. Коженков, В.И. Электродинамическое распыление жидкости (обзор) / В.И. Коженков, Н.А. Фукс // Успехи химии. – 1976. – Т. 45, № 12. – С. 2274–2284.
3. Бураев, Т.К. Исследование процесса распыления жидкостей в электрическом поле / Т.К. Бураев, И.П. Верещагин, Н.М. Пашин // Сильные электрические поля в технологических процессах. – М.: Энергия, 1979. – № 3. – С. 87–105.
4. Габович, М.Д. Жидкометаллические источники ионов (обзор) / М.Д. Габович // УФН. – 1983. – Т. 140, № 1. – С. 137–151.
5. Дудников, В.Г., Шабалин, А.Л. Электродинамические источники ионных пучков (обзор): Препринт 87-63 ИЯФ СО АН СССР. – Новосибирск, 1987. – 66 с.
6. Fenn, J.B. Electrospray ionization for mass spectrometry of large biomolecules (revue) / J.B. Fenn, M. Mann, C.K. Meng et al. // Science. – 1989. – V. 246, № 4926. – P. 64–71.
7. Григорьев, А.И. Закономерности рэлеевского распада заряженной капли / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1991. – Т. 61, вып. 3. – С. 19–28.
8. Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А. Классификация режимов работы электродинамических источников жидко-капельных пучков (обзор): Препринт ИМРАН № 25. Ярославль. – 1993. – 118 с.
9. Григорьев, А.И. Капиллярные неустойчивости заряженной поверхности капель и электродиспергирование жидкостей (обзор) / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // Изв. РАН. МЖГ. – 1994. – № 3. – С. 3–22.
10. Дьячук, В.А. Коронный разряд с обводненной градины, основной механизм инициирования молнии / В.А. Дьячук, В.М. Мучник // ДАН СССР. – 1979. – Т. 248, №1. – С. 60–63.

11. Grigor'ev, A.I. The possible physical mechanism of initiation and growth of lightning / A.I. Grigor'ev, S.O. Shiryayeva // *Physica Scripta*. – 1996. – V. 54. – P. 660–666.

12. Григорьев, А.И. О возможном механизме возникновения огней св. Эльма / А.И. Григорьев, О.А. Синкевич // *ЖТФ*. – 1984. – Т. 54, вып.7. – С. 1276–1283.

13. Grigor'ev, A.I. Ball lightning and St. Elmo's fire as forms of thunderstorm activity / A.I. Grigor'ev, I.D. Grigor'eva, S.O. Shiryayeva // *J. Sci. Exploration*. – 1991. – № 2. – P. 1–28.

14. Григорьева, И.Д. Капиллярные электростатические неустойчивости и физическая природа огней св. Эльма и шаровой молнии как форм проявления грозовой активности: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / И.Д. Григорьева. – Ярославль. 1994.

15. Григорьев, А.И. Капиллярные электростатические неустойчивости / А.И. Григорьев // *Соросовский образовательный журнал*. – 2000. – Т. 6, № 6. – С. 37–43.

16. Голованов, А.С. Аналитический и численный расчет физико-математической модели огней св. Эльма: Дис. ... канд. физ.-мат. наук / А.С. Голованов. – Ярославль, 2001.

17. Григорьев, А.И. Шаровая молния / А.И. Григорьев. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 220 с.

18. Белоножко, Д.Ф. Капиллярные колебания вязкоупругой среды под влиянием постоянного внешнего воздействия / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // *ЖТФ*. – 2000. – Т. 70, вып. 11. – С. 15–23.

19. Григорьев А.И. Электростатический механизм формирования волнового микрорельефа на поверхности полупроводника, распыляемого ионным пучком / А.И. Григорьев // *ПЖТФ*. – 2000. – Т. 26, вып. 21. – С. 89–94.

20. Войцеховский, Б.В. Свечение в потоке заряженных капель / Б.В. Войцеховский, Б.Б. Войцеховский // *Письма ЖЭТФ*. – 1976. – Т. 23, № 1. – С. 37–39.

21. Lord Rayleigh/ On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity // *Phil. Mag.* – 1882. – V. 14. – P. 184–186.

22. Tonks, L. A Theory of liquid surface rupture by uniform electric field / L. Tonks // *Phys. Rev.* – 1935. – V. 48. – P. 562–568.

23. Френкель, Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме / Я.И. Френкель // ЖЭТФ. – 1936. – Т. 6, № 4. – С. 348–350.

24. Войцеховский, Б.Б. Огни Эльма и свечение на предметах в облаке электрически заряженных капель / Б.Б. Войцеховский // ДАН СССР. – 1982. – Т. 262, № 1. – С. 84–88.

25. Лозанский, Э.Д. Теория искры / Э.Д. Лозанский, О.Б. Фирсов. – М: Атомиздат, 1975. – 272 с.

26. Григорьев, А.И. Неустойчивость заряженной плоской поверхности тангенциального разрыва двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, вып. 2. – С. 23–34.

27. Григорьев, А.И. Параметрическая стабилизация заряженной границы раздела двух сред, подверженной действию неустойчивости Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца / А.И. Григорьев, А.С. Голованов, Ю.Б. Кузьмичев // ЭОМ. – 1999. – № 5. – С. 24–29.

28. Любимов, Д.В. Об устойчивости поверхности раздела жидкостей при касательных вибрациях / Д.В. Любимов, М.В. Ханнер, М.М. Шоц // Изв. РАН. МЖГ. – 1998. – № 3. – С. 25–31.

29. Григорьев, А.И. Неустойчивость заряженной плоской границы раздела сред по отношению к тангенциальному разрыву на ней зависящего от времени поля скоростей / А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 1. – С. 24–26.

30. Григорьев, А.И. Параметрическая раскачка неустойчивости заряженной плоской поверхности жидкости на фоне неустойчивости Кельвина – Гельмгольца / А.И. Григорьев, А.С. Голованов // ЖТФ. – 2002. – Т. 72, вып. 11. – С. 28–34.

31. Найфе, А. Введение в методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир. 1984. – 535 с.

32. Григорьев, А.И. О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей слабо заряженной капли / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, М.В. Волкова // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 11. – С. 31–36.

32. Григорьев, А.И. О возможности зажигания коронного разряда в окрестности нелинейно-осциллирующей во внешнем электростатическом поле электропроводной капли / А.И. Гри-

горьев, С.О. Ширяева, М.В. Волкова // ЖТФ. – 2005. – Т. 75, вып. 7. – С. 40–47.

33. Miles J.W. // Appl. Mech. Rev. – 1962. – V. 15, № 9. – P. 685–687.

34. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости / Д.Ф. Белоножко, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев. – Ярославль: ЯрГУ, 2006. – 298 с.

35. Белоножко, Д.Ф. К формулировке теории пограничного слоя, связанного с волновым движением на свободной поверхности жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2007. – Т. 77, вып. 8. – С. 40–47.

36. Сретенский, Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М: Наука, 1977. – 696 с.

37. Ширяева, С.О. Эффект динамического поверхностного натяжения и капиллярное волновое движение на заряженной поверхности жидкости / С.О. Ширяева, О.А. Григорьев, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 1996. – Т. 66, вып. 10. – С. 31–46.

38. Ширяева, С.О. О влиянии эффекта релаксации поверхностного натяжения на спектр движений жидкости с заряженной свободной поверхностью / С.О. Ширяева, О.А. Григорьев // ЖТФ. – 2000. – Т. 70, вып. 6. – С. 31–36.

39. Алиев, И.Н. О волнах, распространяющихся по плоской поверхности вязкой проводящей жидкости в электрическом поле / И.Н. Алиев, А.В. Филиппов // Магнитная гидродинамика. – 1989. – № 4. – С. 94–98

40. Григорьев, А.И. Механизм развития неустойчивости заряженной поверхности жидкости / А.И. Григорьев, О.А. Григорьев, С.О. Ширяева // ЖТФ. – 1992. – Т. 62, № 9. – С. 12–21

41. Григорьев, А.И. Капиллярные колебания и неустойчивость Тонкса – Френкеля слоя жидкости конечной толщины / А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, В.А. Коромыслов, Д.Ф. Белоножко // ЖТФ. – 1997. – Т. 67, № 9. – С. 12–21

42. Курочкина, С.А. Об устойчивости тонкой пленки вязкой жидкости по отношению к поверхностному заряду / С.А. Курочкина, Д.Ф. Белоножко // Электронная обработка материалов. – 2003. – № 5. – С. 34–38.

43. Ширяева, С.О. Электростатическая неустойчивость заряженной поверхности слоя жидкости конечной толщины / С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, В.А. Коромыслов, Д.Ф. Белоножко // Электронная обработка материалов. – 1996. – № 3–4. – С. 71–73.

44. Белоножко, Д.Ф. Эффект влияния заряда на структуру спектра капиллярных волн в тонком слое вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, М.И. Муничев, С.О. Ширяева // Письма в ЖТФ. – 1996. – Т. 22, вып. 10. – С. 84–89.

45. Ильичев, А.Т. Уединенные волны в средах с дисперсией и диссипацией (обзор) / А.Т. Ильичев // Изв. РАН. МЖГ. – 2000. – № 2. – С. 3–27.

46. Gonzalez, A. Kortweg-de-Vries-Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids / A. Gonzalez, A. Castellanos // Phys. Rev. E. – 1994. – V. 49, № 4. – P. 2935–2940.

47. Gonzalez, A. Nonlinear electrohydrodynamic waves on films falling down an inclined plane / A. Gonzalez, A. Castellanos // Phys. Rev. E. – 1996. – V. 53, № 4. – P. 3573–3578.

48. Жакин, А.И. Нелинейные волны на поверхности заряженной жидкости. Неустойчивость, ветвление и нелинейные равновесные формы заряженной поверхности / А.И. Жакин // Изв. АН СССР. – 1984. – № 3. – С. 94–102.

49. Крылов, В.С. К теории волнового движения тонких пленок жидкости / В.С. Крылов, В.П. Воротилин, В.Г. Левич // ТОХТ. – 1969. – Т. 3, № 4. – С. 499–507.

50. Белоножко, Д.Ф. Об устойчивости волновых течений в тонких слоях жидкости с заряженной свободной поверхностью. Часть 2. Периодические волны конечной амплитуды в вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, А.В. Климов, С.О. Ширяева, С.А. Курочкина // Электронная обработка материалов. – 2004. – № 4 – С. 66–78.

51. Белоножко, Д.Ф. Асимптотическое решение задачи о нелинейных волнах в вязкой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.О. Ширяева // Письма в ЖТФ. – 2002. – Т. 28, вып. 19. – С. 1–9.

52. Белоножко, Д.Ф. Волны конечной амплитуды на поверхности вязкой глубокой жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // ЖТФ. – 2003. – Т. 73, вып. 4. – С. 28–37.

53. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные движения вязкой жидкости со свободной поверхностью / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев // Изв. РАН. МЖГ. – 2003. – № 2. – С. 184–192.

54. Белоножко, Д.Ф. Нелинейные периодические волны на заряженной поверхности вязкой электропроводной жидкости / Д.Ф. Белоножко, А.И. Григорьев, С.А. Курочкина, С.А. Санасян // Электронная обработка материалов. – 2004. – № 2. – С. 27–31.

55. Lick, W. Nonlinear wave propagation in fluids / W. Lick // Ann. Rev. of Fluid Mech. – 1970. – V. 2. – P. 113–136.

56. Hammack, J.L. Resonant interactions among surface water waves / J.L. Hammack, D.M. Henderson // Ann. Rev. of Fluid Mech. – 1993. – V. 25. – P. 55–97.

57. Dias, F. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves / F. Dias, C. Kharif // Ann. Rev. Fluid Mech. – 1999. – V. 31. – P. 301–346.

58. Wilton, J.R. On Deep water waves / J.R. Wilton // Phil. Mag. – S. 6. – 1914. – V. 27, № 158. – P. 395–394.

59. Wilton, J.R. On ripples / J.R. Wilton // Phil. Mag. – S. 6. – 1915. – V. 29, № 173. – P. 689–700.

60. Bretherton, F.P. Resonant interaction between waves. The case of discrete oscillations / F.P. Bretherton // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 20, pt. 3. – P. 457–479.

61. Simons, W.F. A variational method for weak resonant wave interactions / W.F. Simons // Proc. Roy. Soc. – Ser. A. – V. 309. – P. 551–575.

62. McGoldrick, L.F. Resonant interactions among capillary-gravity waves / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1965. – V. 21, pt. 2. – P. 305–331.

63. McGoldrick, L.F. An experiment on second-order capillary gravity resonant wave interactions / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 40, pt.2. – P. 251–271.

64. McGoldrick, L.F. On Wilton's ripples: special case of resonant interactions / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42, pt. 1. – P. 193–200.

65. McGoldrick, L.F. On the rippling of small waves: a harmonic nonlinear nearly resonant interaction / L.F. McGoldrick // J. Fluid Mech. – 1972. – V. 52, pt.4. – P. 723–751.

66. Nayfeh, A.H. Triple- and quintuple-dimpled wave profiles in deep water / A.H. Nayfeh // The Phys. of Fluids. – 1970. – V. 13, № 3. – P. 545–550.

67. Nayfeh, A.H. Third-harmonic resonance in the interaction of capillary and gravity waves / A.H. Nayfeh // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 48, pt. 2. – P. 385–395.

68. Nayfeh, A.H. The method of multiple scale and non-linear dispersive waves / A.H. Nayfeh // J. Fluid Mech. – 1971. – V. 48, pt. 3. – P. 463–475.

69. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2 / П. Ле Блон, Л. Майсек. – М.: Мир, 1981. – 365 с.

70. Сретенский, Л.Н. Теория волновых движений жидкости / Л.Н. Сретенский. – М.: Наука, 1977. – 696 с.

71. Левич, В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г. Левич. – М.: Физматгиз, 1959. – 699 с.

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Параметрические волны.....	9
<i>1.1 Физико-математическая модель огней св. Эльма</i>	<i>9</i>
<i>1.2. Действие электростатических неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца на заряженную границу двух сред.....</i>	<i>15</i>
<i>1.3. Дестабилизация заряженной границы раздела двух сред, подверженной действию неустойчивостей Тонкса – Френкеля и Кельвина – Гельмгольца при наличии переменной во времени компоненты поля скоростей верхней среды.....</i>	<i>43</i>
<i>1.4. Параметрические волны на границе раздела двух несмешивающихся жидкостей различных плотностей, когда ее коэффициент поверхностного натяжения является функцией времени.....</i>	<i>51</i>
Глава 2. Нелинейные волны в слое жидкости конечной глубины	59
<i>2.1. Нелинейные волны в слое вязкой жидкости конечной глубины</i>	<i>59</i>
<i>2.2. Оценка асимптотической пригодности выражений для поля скоростей жидкости в математической модели волн на плоской свободной поверхности вязкой жидкости</i>	<i>110</i>
<i>2.3. О возможности зажигания коронного разряда у гребней волн</i>	<i>119</i>

Глава 3. Линейное взаимодействие волн	132
3.1. <i>Линейное взаимодействие волн на заряженной границе раздела сред при наличии тангенциального разрыва поля скоростей.....</i>	<i>132</i>
3.2. <i>Взаимодействие с дном волн в слое вязкой жидкости конечной толщины</i>	<i>148</i>
Литература.....	161

Научное издание

Григорьев Александр Иванович
Климов Андрей Владиславович
Черникова Светлана Васильевна
Присяжнюк Антон Васильевич

**Параметрические и нелинейные волны
на заряженной поверхности жидкости**

Редактор, корректор Л.Н. Селиванова
Компьютерная верстка И.Н. Ивановой

Подписано в печать 14.09.2007 г. Формат 60×84/16.
Бумага тип. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10,0. Уч.-изд.л. 9,36.
Тираж 75 экз. Заказ .

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ
Ярославский государственный университет
150000 Ярославль, ул. Советская, 14

Отпечатано
ООО «Ремдер» ЛР ИД № 06151 от 26.10.2001.
г. Ярославль, пр. Октября, 94, оф.37, тел.(4852) 73-35-03

