

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

**Рабочая программа дисциплины**

**Комбинаторная оптимизация**

Направление подготовки (специальности)  
02.03.01 Математика и компьютерные науки

Направленность (профиль)  
«Программирование, алгоритмы и анализ данных»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 26 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины «Комбинаторная оптимизация» являются: изучение основных алгоритмов комбинаторной оптимизации, оценки трудоемкости и сложности алгоритмов, знакомство с эвристическими и стохастическими методами оптимизации. формирование математической культуры студента, фундаментальная подготовка по одному из основных разделов дискретной математики, овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования при решении теоретических и прикладных задач.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Данная дисциплина относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Для успешного изучения этой дисциплины необходимы знания и умения, приобретенные в результате освоения школьного курса математики, а также разделов из математического анализа и алгебры.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

| Формируемая компетенция<br>(код и формулировка)                                                                                                                                                                                     | Индикатор достижения компетенции<br>(код и формулировка)                                                                                                                                                                        | Перечень планируемых результатов обучения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Профессиональные компетенции</b>                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>ПК-3</b><br>Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, промышленности и бизнесе, с учетом возможностей современных информационных технологий и программирования и компьютерной техники. | <b>И-ПК-3.2</b><br>Умеет использовать методы проектирования и производства программного продукта, принципы построения, структуры и приемы работы с инструментальными средствами, поддерживающими создание программного продукта | <b>Знать:</b><br>- основные задачи комбинаторной оптимизации, методы их решения, стохастические алгоритмы оптимизации, моделирование случайных процессов.<br><b>Уметь:</b><br>- применять основные алгоритмы оптимизации на практике, определять сложность наиболее распространенных алгоритмов оптимизации.<br><b>Владеть навыками:</b><br>-методами оценивания трудоемкости алгоритмов комбинаторной оптимизации, алгоритмами сортировки и алгоритмами генерирования типовых распределений случайных величин. |

## 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет **2** зачетных единицы, **72** акад. часов.

| №<br>п/п | Темы (разделы)<br>дисциплины,<br>их содержание | Семестр | Виды учебных занятий,<br>включая самостоятельную<br>работу студентов,<br>и их трудоемкость<br>(в академических часах) |              |              |              |                             |                           | Формы текущего<br>контроля успеваемости<br><br>Форма промежуточной<br>аттестации<br>(по семестрам) |
|----------|------------------------------------------------|---------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|--------------|--------------|-----------------------------|---------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
|          |                                                |         | Контактная работа                                                                                                     |              |              |              |                             | самостоятельная<br>работа |                                                                                                    |
|          |                                                |         | лекции                                                                                                                | практические | лабораторные | консультации | аттестационные<br>испытания |                           |                                                                                                    |
| 1        | Вводная лекция.                                | 7       | 2                                                                                                                     |              |              |              |                             | 2                         | Задания для<br>самостоятельной работы                                                              |
| 2        | Основные понятия<br>комбинаторики.             | 7       | 2                                                                                                                     | 1            |              |              | 1                           |                           |                                                                                                    |
| 3        | Пересчет и производящие<br>функции.            | 7       | 3                                                                                                                     | 1            |              |              |                             | 2                         | Задания для<br>самостоятельной работы                                                              |
| 4        | Развитие методов<br>пересчета.                 | 7       | 3                                                                                                                     | 2            |              |              | 1                           | 3                         | Контрольная работа 1                                                                               |
| 5        | Алгоритмы и их сложность.                      | 7       | 3                                                                                                                     | 1            |              |              |                             | 2                         | Задания для<br>самостоятельной работы                                                              |
| 6        | Сортировка и поиск.                            | 7       | 3                                                                                                                     | 2            |              |              | 1                           |                           |                                                                                                    |
| 7        | Оптимизационные задачи<br>на графах.           | 7       | 3                                                                                                                     | 2            |              |              |                             | 2                         | Задания для<br>самостоятельной работы                                                              |
| 8        | Алгоритмы на графах.                           | 7       | 3                                                                                                                     | 2            |              |              | 1                           |                           |                                                                                                    |
| 9        | Потоковые алгоритмы.                           | 7       | 3                                                                                                                     | 2            |              |              |                             |                           |                                                                                                    |
| 10       | Паросочетания.                                 | 7       | 3                                                                                                                     | 1            |              |              | 2                           | 3                         | Контрольная работа 2                                                                               |
| 11       | Приближенные и<br>стохастические алгоритмы.    | 7       | 4                                                                                                                     | 2            |              |              |                             | 2                         | Задания для<br>самостоятельной работы                                                              |
|          |                                                |         |                                                                                                                       |              |              |              | 0,3                         | 1,7                       | Зачет                                                                                              |
|          | ИТОГО                                          |         | 32                                                                                                                    | 16           |              |              | 6                           | 0,3                       | 17,7                                                                                               |

### Содержание разделов дисциплины:

#### 1. Вводная лекция.

Комбинаторные алгоритмы и задачи оптимизации. Сложность алгоритмов. Эвристические алгоритмы оптимизации. Перспективы.

#### 2. Основные понятия комбинаторики.

Основные понятия комбинаторики. Генерирование перестановок, генерирование подмножеств, генерирование разбиений множеств. Пересчет, перечисление, классификация, оптимизация.

#### 3. Пересчет и производящие функции.

Производящие функции и конечноразностные операторы. Основные последовательности и формулы для пересчета. Формулы включения – исключения. Задача о встречах, беспорядки и совпадения.

#### 4. Развитие методов пересчета.

Парадокс «дней рождения». Противоречивые перестановки. Задача о супружеских парах (задача Люка). Латинские квадраты и их приложения.

#### 5. Алгоритмы и их сложность.

Алгоритмы и их классификация по сложности. Оценки времени и пространства для простейших алгоритмов. Машина Тьюринга. Недетерминированная машина Тьюринга. Классы P и NP.

## **6. Сортировка и поиск**

Поиск и сортировка. Сложность задачи сортировки.

Поиск с возвратом. Внутренняя сортировка. Оптимальная сортировка. Внешняя сортировка.

## **7. Оптимизационные задачи на графах.**

Машинное представление графов и сетей. Числовые функции на графах. Поиск в ширину и поиск в глубину в графе. Поиск по упорядоченной таблице и поиск по бинарному дереву. Цифровой поиск. Хеширование.

## **8. Алгоритмы на графах**

Минимальный остов. Алгоритмы Краскала и Прима. Задачи о кратчайших путях в сетях. Число внутренней и внешней устойчивости. Хроматическое число графа. Алгоритмы Форда-Фалкерсона, Дейкстры, Флойда. Сетевые графики, потоки и разрезы в сетях.

## **9. Потокотокые алгоритмы**

Теорема Форда-Фалкерсона и алгоритм Форда - Фалкерсона построения максимального потока. Задача о потоке минимальной стоимости. Прямой и двойственный алгоритм ее решения. Транспортная задача. Простой граф. Покрытие и паросочетание.

## **10. Паросочетания**

Паросочетания в двудольных графах. Алгоритм Хопкрофта – Карпа построения наибольшего паросочетания. Венгерский алгоритм построения оптимального паросочетания. Задача разбиения на минимальное число паросочетаний

## **11. Приближенные и стохастические алгоритмы.**

Равномерно распределенные случайные числа. Оценка качества генератора псевдослучайной последовательности. Некоторые типовые датчики псевдослучайных чисел. Моделирование распределений. Задача коммивояжера. Алгоритмы с гарантированной оценкой точности для задачи коммивояжера. Метод ветвей и границ. Локальные методы оптимизации

## **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** -- дает первое целостное представление о предмете и ориентирует студента в системе обучения дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. В процессе лекции систематически создаются проблемные ситуации, когда студентам предлагается самостоятельно доказать то или иное математическое утверждение, являющееся фрагментом основной темы лекции.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний по предложенному алгоритму.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:  
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»

[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>

- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>

- Электронная библиотечная система «Консультант студента»

<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Пападимитриу Х. Комбинаторная оптимизация: Алгоритмы и сложность. / Х. Пападимитриу, К. Стайглиц. Пер. с англ. - М.: Мир, 1985. - 510 с.: ил.
2. Клековкин Г. А. Введение в перечислительную комбинаторику: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2022. <https://reader.lanbook.com/book/206609>
3. Баранов В. И., Стечкин Б. С. Экстремальные комбинаторные задачи и их приложения - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2004. <https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922104934-SCN0000/000.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Ноден П. Алгебраическая алгоритмика: с упражнениями и решениями.: учебник для вузов. / П. Ноден, К. Китте; пер. с фр. В. А. Соколова; под ред. Л. С. Казарина; Науч.-метод. совет по прикладной математике УМО ун-тов - М.: Мир, 1999. - 719 с.
2. Кристофидес Н. Теория графов: алгоритмический подход. / Н. Кристофидес; пер. с англ - М.: Мир, 1978. - 432 с.
3. Кнут Дональд Э. Искусство программирования: Учеб.пособие.. Т.3, Сортировка и поиск. / Дональд Э.Кнут; Пер.с англ.Под общ.ред.Ю.В.Козаченко - 2-е изд.,испр.и доп. - М.-СПб.-Киев: Вильямс, 2000. - 822с.
4. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ.Учеб.пособие. / Кормен Т.,Лейзерсон Ч.,Ривест Р. - М.: МЦНМО, 2001. - 955с.
5. Кофман А. Введение в прикладную комбинаторику: пер. с фр. / А. Кофман - М.: Наука, 1975. - 479 с.

6. Долгов, А. И. Алгоритмизация прикладных задач : учеб. пособие / А. И. Долгов. - 3-е изд. , стереотип. - Москва : ФЛИНТА, 2021. - 136 с. - ISBN 978-5-9765-0086-2. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : <https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN97859765008620921.html>

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

### **Автор(ы):**

Доцент, к.ф-м.н.

Д. В. Гринёв

**Приложение № 1 к рабочей программе дисциплины  
«Комбинаторная оптимизация»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущего контроля успеваемости  
и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания и иные материалы,  
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Контрольная работа № 1 (один из вариантов)**

1. Дана последовательность чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Показать, что за время  $O(n \log n)$  можно определить, есть ли в последовательности два одинаковых числа.
2. Как выполнить вычисление многочлена степени  $n$  в точке за  $O(n)$  операций? Написать программу.
3. Массив содержит все последовательные натуральные числа от 1 до  $N$ , кроме одного. Написать алгоритм нахождения пропущенного числа, требующий  $O(N)$  операций.
4. Найти формулу для вычисления  $n$ -го числа Фибоначчи.
5. Скольких гостей надо пригласить на встречу, чтобы оказалось, что по меньшей мере трое из них родились в один день?
6. Пусть исходный массив отсортирован в порядке возрастания. Каким будет время сортировки с помощью кучи? А если в порядке убывания?

**Контрольная работа № 2 (один из вариантов)**

1. Как рассортировать 1000 целых натуральных чисел, не превосходящих 100000 за время порядка 1000?
2. Пусть дан массив  $n$  записей, которые надо отсортировать по ключу, принимающему значения 0 и 1. Придумайте алгоритм сортировки с линейным временем работы, требующий  $O(1)$  памяти т.е. не зависящей от размера массива. Можно ли воспользоваться этим алгоритмом для сортировки по  $b$ -битовому ключу за время  $O(bn)$ ?
3. Можно ли удалить элемент из множества, представленного связанным списком, за время  $O(1)$ ? А добавить элемент?
4. Придумайте нерекурсивную процедуру, работающую линейное время, которая печатает ключи всех вершин двоичного дерева.
5. Пусть в связанном списке каждый элемент хранится вместе с его ключом  $k$  и хеш-значением  $h(k)$ . Ключ представляет собой длинную последовательность символов. Как можно упростить поиск элемента с данным ключом?
6. Покажите, что в графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда входящая степень каждой вершины равна ее исходящей степени.
7. Найти дискретное преобразование Фурье последовательности  $(0, 1, 2, 3)$ .

## Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Комбинаторная оптимизация»

### Методические указания для студентов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Комбинаторная оптимизация» являются лекции, практические и лабораторные занятия, причем в достаточном объеме. Это связано с тем, что комбинаторная оптимизация представляет собой особый математический материал, лежащий на стыке различных математических дисциплин, с помощью которых математики решают довольно сложные и нетривиальные практические задачи. По всем темам предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка навыков работы с математическим аппаратом и алгоритмами оптимизации.

Особенность дисциплины состоит в ее существенно более междисциплинарный характер по сравнению с другими дисциплинами и явно выраженный прикладной аспект. Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. В течение всего обучения на лекциях предлагаются нестандартные задачи, решая которые студент может повысить свой уровень освоения теоретического материала. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы комбинаторной оптимизации. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с аппаратом алгебры в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде 2 контрольных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце изучения дисциплины студенты сдают зачет. Оценка выставляется по итогам тестирования и краткого собеседования по его результатам.

Освоить вопросы, излагаемые в процессе изучения дисциплины «Комбинаторная оптимизация» самостоятельно студенту крайне сложно. Это связано со сложностью и абстрактностью изучаемого материала и большим объемом курса. Поэтому посещение всех аудиторных занятий является совершенно необходимым. Без упорных и регулярных занятий в течение семестра сдать зачет и экзамен по итогам изучения дисциплины в каждом семестре студенту практически невозможно.