

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова**

Кафедра компьютерной безопасности и математических методов обработки информации

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

20 июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Математическая логика и теория алгоритмов**

Направление подготовки (специальности)  
10.05.01 Компьютерная безопасность

Направленность (профиль)  
«Математические методы защиты информации»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена  
на заседании кафедры  
от 14 апреля 2023 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК  
математического факультета  
протокол № 9 от 3 мая 2023 г.

## 1. Цели освоения дисциплины

Дисциплина "Математическая логика и теория алгоритмов" обеспечивает приобретение фундаментальных знаний и умений в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом, содействует фундаментализации образования, развитию логического мышления и формированию математического и общенаучного мировоззрения. Целью изучения дисциплины является овладение базовыми понятиями и методами математической логики, ознакомление с их применениями в информатике, в частности, для верификации программ, изучение основ теории алгоритмов, установление существования алгоритмически неразрешимых проблем и значение этого фундаментального факта теории алгоритмов для алгоритмической практики, компьютерных наук и защиты информации, ознакомление с базовыми подходами к оценке сложности алгоритмов и задач и некоторыми приемами построения эффективных алгоритмов.

## 2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина "Математическая логика и теория алгоритмов" относится к базовой части образовательной программы. Она играет исключительно важную роль для общематематической подготовки специалиста. При ее изучении существенно используются знания, полученные при изучении математических дисциплин "Математический анализ", "Алгебра", "Аналитическая геометрия", "Теория чисел", "Информатика". Знания, умения и навыки, полученные при изучении дисциплины "Математическая логика и теория алгоритмов", используются обучаемыми при изучении общепрофессиональных и специальных дисциплин математического и компьютерного циклов.

## 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
<b>Общепрофессиональные компетенции</b>	
<b>ОПК-2</b> Обладает способностью корректно применять при решении профессиональных задач аппарат математического анализа, геометрии, алгебры, дискретной математики, математической логики, теории алгоритмов, теории вероятностей, математической статистики, теории информации, теоретико-числовых методов	<b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"><li>- основные понятия математической логики</li><li>- описание синтаксиса языков логики и исчисления высказываний, логики и исчисления предикатов,</li><li>- понятие интерпретации, значения термина в интерпретации и истинностного значения формулы в интерпретации,</li><li>- понятие вывода и вывода из множества гипотез в исчислении высказываний и исчислении предикатов, формулировки теорем дедукции, адекватности и непротиворечивости, два подхода к математическому уточнению интуитивного понятия "алгоритм",</li><li>- определение машины Тьюринга, вычислимости и правильной вычислимости,</li></ul>

	<p>- понятия примитивно рекурсивной, рекурсивной и частично рекурсивной функции, примеры алгоритмически неразрешимых задач.</p> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- строить истинностные таблицы для формул ЛВ,</li> <li>- доказывать теоремы дедукции, адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний и исчисления предикатов,</li> <li>- устанавливать выводимость формул в исчислении высказываний и исчислении предикатов,</li> <li>- устанавливать примитивную рекурсивность и рекурсивность арифметических функций.</li> </ul> <p><b>Владеть навыками:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>- установления выводимости формул в ИВ и ИП,</li> <li>- написания программ для машин Тьюринга, оценки временной и емкостной сложностей Тьюринговых алгоритмов, сводимости алгоритмических проблем.</li> </ul>
--	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### 4. Структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, **144** акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция	5	2	2				2	Устный опрос Реферат
2	Логика высказываний и логика предикатов	5	2	4		1		2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос
3	Булевы функции	5	2	2				2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос
4	Логические исчисления. Исчисление высказываний.	5	2	2				2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос
5	Исчисление предикатов	5	3	3				5	Задания для самостоятельной работы Контрольная работа
6	Метод резолюций	5	2	2		1		2	Задания для самостоятельной работы

7	Применения математической логики в информатике.	5	4	2		1		2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос Реферат
8	Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов.	5	4	4				2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос Реферат
9	Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость.	5	4	4		1		2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос Реферат
10	Сложность алгоритмов и вычислений оценки	5	4	4		1		2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос Реферат
11	Сложностная классификация переборных задач	5	4	4				2	Задания для самостоятельной работы Устный опрос Реферат
12	Теория алгоритмов и компьютерная практика	5	3	3		2		4	Устный опрос Реферат
						2	0.5	33.5	экзамен
	<b>Всего</b>		<b>36</b>	<b>36</b>		<b>9</b>	<b>0.5</b>	<b>62.5</b>	

### Содержание разделов программы

#### 1. Вводная лекция

История развития математической логики и теории алгоритмов. Математическая логика и основания математики. Теория алгоритмов и принципиальные возможности вычислительных машин. Сложность алгоритмов и ее значение для практики.

#### 2. Логика высказываний и логика предикатов

Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тождественно истинные и выполнимые формулы. Булевы алгебры. Алгебра высказываний и алгебра подмножеств множества как примеры булевых алгебр. Предикаты на множестве и их связь с отношениями. Логические операции над предикатами. Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации. Оценки. Значение терма и формулы на оценке при данной интерпретации. Выполнимые, тождественно истинные и тождественно ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.

#### 3. Булевы функции

Булевы функции и функции многозначной логики, их представление термами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами логики высказываний и многочленами Жегалкина. Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики. Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.

#### 4. Логические исчисления. Исчисление высказываний.

Общее понятие о логическом исчислении. Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез. Теорема дедукции. Теорема Э. Поста о полноте для исчисления высказываний. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теоремы адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний.

### **5. Исчисление предикатов.**

Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез. Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам. Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов. Теоремы непротиворечивости и адекватности для исчисления предикатов. Элементы теории моделей. Теорема А.И.Мальцева о компактности и ее приложения. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.

### **6. Метод резолюций.**

Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Секвенциальный и натуральный вывод в исчислении предикатов. Эрбановские интерпретации. Теорема Эрбрана. Сколемовская стандартная форма. Семантические деревья. Метод резолюций для логики предикатов. Унификация. Теорема о наиболее общем унификаторе. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов. Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах. Основные понятия логического программирования: хорновские дизъюнкты, SLD - резолюция. Методика составления и реализация логических программ.

### **7. Применения математической логики в информатике.**

Исчисление Хоара для доказательства корректности компьютерных программ. Логико-математические подходы к верификации компьютерных программ. Операционная семантика. Оценки для интерпретаций языков. Значение терма и формулы на данной оценке. Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.

### **8. Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов.**

Интуитивное понятие алгоритма и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия алгоритма. Вычислимые функции. Представляющая функция алгоритма. Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга- Поста-Черча. Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции. Тезис Черча. Правильная вычислимость любой частично рекурсивной функции. Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции. Нормальные алгоритмы А.А.Маркова. Примеры. Принцип нормализации А.А.Маркова. Композиция нормальных алгоритмов. Связь нормальных алгоритмов с машинами Тьюринга и частично рекурсивными функциями.

### **9. Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость.**

Нумерация слов в счетном алфавите и арифметизация алгоритмов. Соотношения между классами примитивно рекурсивных, общерекурсивных и частично рекурсивных функций. Примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем: проблема остановки для машин Тьюринга (The halting problem for Turing machines), проблема самоприменимости для машин Тьюринга. Примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач из математической логики, теории алгоритмов, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии,

математического анализа и теории конечных автоматов. Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.

#### **10. Сложность алгоритмов и вычислений.**

Подходы к оценкам сложности алгоритмов и вычислений. Модели вычислений. Сложность вычисления на машине Тьюринга. Временная и емкостная меры сложности. Свойства функций сложности. Нижние оценки. Сложность проблемы распознавания выполнимости для булевых функций (The satisfiability problem for boolean functions, SAT-problem, SAT). Сложность проблемы распознавания функциональной полноты системы булевых функций, сложность проблем вхождения в классы самодвойственных, монотонных и линейных функций. Существование сколь угодно сложно вычислимых функций.

#### **11. Сложностная классификация переборных задач.**

Класс PTIME задач, детерминировано решаемых с полиномиальной сложностью. Класс NPTIME задач, решаемых с полиномиальной сложностью на недетерминированной машине Тьюринга. Полиномиальная сводимость. NP-полные и NP-трудные задачи.

#### **12. Теория алгоритмов и компьютерная практика.**

Вычислительные возможности современных компьютеров. Математическая модель компьютера – машина с произвольным доступом к памяти (МПД). RAM-A machine with random access to memory. МПД - вычислимые функции и их связь с частично рекурсивными функциями.

### **5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Практическое занятие** – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

## **6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);
- Adobe Acrobat Reader.

## **7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)**

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)
- Электронная библиотечная система «Лань» <https://e.lanbook.com>
- Электронная библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронная библиотечная система «Консультант студента»  
<https://www.studentlibrary.ru>

## **8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. М. М. Глухов, А. Б. Шишков Математическая логика. Дискретные функции. Теория алгоритмов: учебное пособие — Санкт-Петербург: Лань, 2021.  
<https://matematika76.ru/fm/глухов.pdf>
2. Дурнев В. Г. Элементы теории множеств и математической логики: учеб. пособие - Ярославль, ЯрГУ, 2009. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20090231.pdf>
3. М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов - СПб., Лань, 2022.  
<https://reader.lanbook.com/book/247400>
4. Дурнев В. Г. Элементы теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов - Ярославль, ЯрГУ, 2008. <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20080230.pdf>
5. Дурнев, В. Г., Материалы по дисциплине Теория алгоритмов и сложность вычислений : метод. указания / В. Г. Дурнев ; Яросл. гос. ун-т, Ярославль, ЯрГУ, 2010 <http://www.lib.uniyar.ac.ru/edocs/iuni/20100268.pdf>
6. И. А. Лавров, Л. Л. Максимова Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов – М: ФИЗМАТЛИТ, 2002.  
<https://www.studentlibrary.ru/ru/doc/ISBN5922100262-SCN0000/000.html>

### **б) дополнительная литература**

1. Князьков, В. С. Введение в теорию автоматов / Князьков В. С. , Волченская Т. В. - Москва : Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ", 2016. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL : [https://www.studentlibrary.ru/book/intuit\\_089.html](https://www.studentlibrary.ru/book/intuit_089.html)
2. А. Ахо, Дж. Хопкрофт, Дж. Ульман. Построение и анализ вычислительных алгоритмов. М.: "Мир", 1979.
3. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М.: "Мир". 1994.
4. Н. Катленд. Вычислимость. Введение в теорию рекурсивных функций. М.: "Мир". 1983.
5. С. К. Клини. Введение в метаматематику. М.: "ИЛ". 1957.
6. А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. Математическая логика. Дополнительные главы. М.: МГУ, 1984.
7. А. И. Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: "Наука", 1986.
8. А. А. Марков. Элементы математической логики. М.: МГУ. 1984.
9. Б. А. Трахтенброт. Алгоритмы и вычислительные автоматы. М.: "Советское радио". 1974.
10. Ч. Чень, Р. Ли. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. М.: "Наука", 1983.
11. Г. Д. Эббинхауз, К. Якобс, Ф.К. Ман, Г. Хермес. Машины Тьюринга и рекурсивные функции. М.: "Мир", 1972.
12. Герасимов А. С. Курс математической логики и теории вычислимости. СПб., ЛЕМА, 2011.

## **9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа и практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

### **Автор(ы):**

Профессор, доктор физ.-матем. наук

Дурнев В.Г.



**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины  
«Математическая логика и теория алгоритмов»**

**Фонд оценочных средств  
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов  
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,  
используемые в процессе текущей аттестации**

**Домашние задания по теме № 2 "Логика высказываний и логика предикатов"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 47 из параграфа 1 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1.1 - 1.29 из параграфа 1 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

Задания для самостоятельного решения № 1- 45 из параграфа 5 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 5.1 - 5.42 из параграфа 5 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

**Домашние задания по теме № 3 "Булевы функции"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 36 из параграфа 2 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 8.1 - 8.45 из параграфа 8 главы 2 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

**Домашние задания по теме № 4 "Логические исчисления. Исчисление высказываний"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 3.1 - 3.10 из параграфа 3 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

**Домашние задания по теме № 5 "Исчисление предикатов"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 6.1 - 6.15 из параграфа 6 главы I сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике,

дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

#### **Домашние задания по теме № 6 "Метод резолюций"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 54 из параграфа 6 части II сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

#### **Домашние задания по теме № 7 "Применения математической логики в информатике"**

Задания для самостоятельного решения в конце параграфов 6.2 и 6.3 главы 6 учебного пособия Герасимов А.С. Курс математической логики и теории вычислимости. СПб., ЛЕМА, 2011. 284 с.

#### **Домашние задания по теме № 8 "Алгоритмические модели. Элементы теории алгоритмов"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 44 из параграфа 1 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1 - 25 из параграфа 2 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 15.1 - 15.19 из параграфа 15 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

#### **Домашние задания по теме № 9 "Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость"**

Задания для самостоятельного решения № 1 - 48 из параграфа 3 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

Задания для самостоятельного решения № 1 - 43 из параграфа 4 части III сборника задач Лавров И.А. Задачи по теории множеств, математической логики и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. М.: Наука. 1984. 287 с.

#### **Домашние задания по теме № 10 "Сложность алгоритмов и вычислений"**

Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

#### **Домашние задания по теме № 11 "Сложностная классификация переборных задач"**

Задания для самостоятельного решения № 16.1 - 16.26 из параграфа 16 главы 3 сборника задач Глухов М.М. Задачи и упражнения по математической логике, дискретным функциям и теории алгоритмов: учеб. пособие для вузов / М. М. Глухов, О. А. Козлитин, В. А. Шапошников, А. Б. Шишков. СПб., Лань, 2008, 111 с.

#### **Контрольная работа**

Задания для контрольной работы по теме № 5 "Исчисление предикатов"

1) Доказать теорему дедукции для исчисления предикатов.

- 2) Построить вывод формулы А из множества гипотез Г.
  - 3) С использованием теоремы дедукции доказать выводимость формулы А из множества гипотез Г.
  - 4) Доказать тождественную истинность любой выводимой в исчислении предикатов формулы.
  - 5) Как связаны между собой теорема адекватности, теорема непротиворечивости, и теорема о полноте?
- Примечание. Каждый вариант задания определяется выбором конкретной формулы А и множества гипотез Г.

### **Темы рефератов**

- 1) Основные этапы формирования математической логики.
- 2) Секвенциальное исчисление предикатов.
- 3) Применения математической логики в информатике - верификация компьютерных программ.
- 4) Основные этапы формирования теории алгоритмов.
- 5) Алгоритмически неразрешимые проблемы в алгебре.
- 6) Алгоритмически неразрешимые проблемы в теории алгоритмов.
- 7) Алгоритмически неразрешимые проблемы в математической логике.
- 8) Алгоритмически неразрешимые проблемы в топологии.
- 9) Алгоритмически неразрешимые проблемы в теории дифференциальных уравнений.
- 10) Алгоритмически неразрешимые проблемы в математическом анализе.
- 11) Оценка сложности алгоритмов.
- 12) Сложностные классы. Невырожденность сложностной иерархии.
- 13) Машины Шенфильда и RAM.

## **2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

### **Вопросы к экзамену по дисциплине**

#### **"Математическая логика и теория алгоритмов"**

- 1) Язык логики высказываний: алфавит, пропозициональные переменные и пропозициональные связки, формулы. Интерпретации, истинностное значение формулы в интерпретации. Тождественно истинные и выполнимые формулы.
- 2) Язык логики предикатов: сигнатура, термы и формулы, свободные и связанные вхождения переменных. Интерпретации. Значение замкнутого терма в интерпретации. Истинностное значение замкнутой формулы в интерпретации.
- 3) Оценки. Значение терма и формулы на оценке при данной интерпретации. Выполнимые, тождественно истинные и тождественно ложные формулы. Равносильность формул, основные соотношения равносильности и их использование для упрощения формул. Предваренные нормальные формы, дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы.
- 4) Булевы функции и функции многозначной логики. Их представление термами над заданной системой функций. Представление булевых функций формулами логики высказываний и многочленами Жегалкина.
- 5) Замкнутые классы функций. Критерии полноты для булевых функций и функций многозначной логики.
- 6) Представление функций многозначной логики рядами Фурье. Методы вычисления коэффициентов Фурье. Псевдобулевы функции и их задание. Минимизация булевых функций.
- 7) Логические исчисления. Общее понятие о логическом исчислении.

- 8) Язык, аксиомы и правила вывода исчисления высказываний. Вывод и выводимость формул в исчислении высказываний. Вывод из множества гипотез.
- 9) Теорема дедукции. Теорема Э. Поста для исчисления высказываний. Непротиворечивость исчисления высказываний. Теоремы адекватности и непротиворечивости для исчисления высказываний.
- 10) Исчисление предикатов. Язык, логические аксиомы и правила вывода исчисления предикатов. Вывод и выводимость формул в исчислении предикатов. Вывод и выводимость формул из множества гипотез.
- 11) Теорема дедукции. Вспомогательные правила вывода. Эквивалентность формул. Приведение формул к нормальным формам.
- 12) Теоремы непротиворечивости и адекватности.
- 13) Теорема К.Геделя о полноте для исчисления предикатов. Непротиворечивость исчисления предикатов.
- 14) Элементы теории моделей. Теорема А.И.Мальцева о компактности и ее приложения. Применение исчисления предикатов для записи математических утверждений и для автоматизации доказательства теорем.
- 15) Метод резолюции. Применение исчисления предикатов для доказательства теорем. Секвенциальный и натуральный вывод в исчислении предикатов. Эрбановские интерпретации. Теорема Эрбрана.
- 16) Сколемовская стандартная форма. Семантические деревья. Метод резолюции для логики предикатов. Унификация. Теорема о наиболее общем унификаторе. Теорема о полноте метода резолюции для логики предикатов.
- 17) Применение логики предикатов в дедуктивных базах данных и экспертных системах.
- 18) Основные понятия логического программирования: хорновские дизъюнкты, SLD - резолюция. Методика составления и реализация логических программ.
- 19) Применения математической логики в информатике. Исчисление Хоара для доказательства корректности программ.
- 20) Логико-математические подходы к верификации компьютерных программ. Операционная семантика. Оценки для интерпретаций языков. Значение терма и формулы на данной оценке.
- 21) Аксиоматическая семантика программ. Триады Хоара. Аксиомы и правила вывода исчисления Хоара. Корректность исчисления Хоара относительно операционной семантики.
- 22) Элементы теории алгоритмов. Интуитивное понятие алгоритма и его характерные черты. Задачи, приводящие к необходимости уточнения понятия алгоритма. Алгоритмы и вычислимые функции. Представляющая функция алгоритма.
- 23) Машины Тьюринга-Поста: внешний и внутренний алфавиты, программы. Конфигурации. Композиция и ветвление машин Тьюринга. Вычислимость и правильная вычислимость функций по Тьюрингу. Принцип Тьюринга- Поста-Черча.
- 24) Частично рекурсивные, рекурсивные и примитивно рекурсивные функции. Тезис Черча.
- 25) Правильная вычислимость любой частично рекурсивной функции.
- 26) Частичная рекурсивность любой вычислимой по Тьюрингу функции.
- 27) Нормальные алгоритмы А.А.Маркова. Примеры. Принцип Маркова. Композиция нормальных алгоритмов. Связь с машинами Тьюринга и частично рекурсивными функциями.
- 28) Алгоритмическая разрешимость и неразрешимость. Нумерация слов в счетном алфавите и арифметизация алгоритмов.
- 29) Массовые алгоритмические проблемы. Примеры алгоритмически неразрешимых массовых проблем: проблема остановки для машин Тьюринга (The halting problem for Turing machines), проблема самоприменимости для машин Тьюринга. Примеры алгоритмически разрешимых и неразрешимых задач из математической логики, теории

алгоритмов, алгебры, теории чисел, теории формальных грамматик, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, топологии, математического анализа и теории конечных автоматов.

30) Теорема Черча о неразрешимости логики предикатов.

31) Сложность описания и выполнения алгоритмов. Подходы к оценкам сложности алгоритмов и вычислений. Сложность вычисления на машине Тьюринга. Временная и емкостная меры сложности.

32) Свойства функций сложности. Нижние оценки. Сложность распознавания проблемы выполнимости для булевых функций (The satisfiability problem for boolean functions, SAT-problem, SAT). Сложность проблемы распознавания функциональной полноты системы булевых функций, сложность проблем вхождения в классы самодвойственных, монотонных и линейных функций.

33) Существование сколь угодно сложно вычислимых функций.

34) Теория алгоритмов и компьютерная практика. Вычислительные возможности современных компьютеров. Математическая модель компьютера – машина с произвольным доступом к памяти (МПД). RAM-A machine with random access to memory. МПД - вычислимые функции и их связь с частично рекурсивными функциями

### **3. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания**

#### **3.1 Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание**

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:

**Пороговый уровень** - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных студентом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для студента к моменту завершения им освоения данной дисциплины.

**Продвинутый уровень** - предполагает способность студента использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.

**Высокий уровень** - предполагает способность студента использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения студентом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

### **3.3 Критерии оценивания степени овладения знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций**

#### **Пороговый уровень (общие характеристики):**

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

#### **Продвинутый уровень (общие характеристики):**

- достаточно полные и систематизированные знания в объеме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

#### **Высокий уровень (общие характеристики):**

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;
- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

### 3.4 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины студенту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется студенту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется студенту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

#### Оценка ответа на экзамене

Экзаменационный ответ оценивается по 4-х бальной системе, в соответствие с которой выставляются оценки **«отлично»**, **«хорошо»**, **«удовлетворительно»**, **«неудовлетворительно»**.

Правила выставления оценки:

оценка **«отлично»** выставляется студенту, если он владеет материалом дисциплины; четко и определенно отвечает на вопросы, легко сравнивает различные части, сближает самые отдаленные точки учения, разбирает новые и сложные предлагаемые ему случаи, знает слабые стороны учения, места, где сомневается, и что можно возразить против теории.

оценка **«хорошо»** выставляется студенту, если он твердо знает и понимает материал, грамотно и по существу излагает его, не допускает существенных неточностей в ответе на поставленные вопросы, правильно применяет теоретические положения при решении практических вопросов и задач, владеет необходимыми навыками и приемами их выполнения.

оценка **«удовлетворительно»** выставляется студенту, если он имеет знания основного материала, но не усвоил его деталей, знает дисциплину только в том виде, как она была ему преподана, но приходит в замешательство от соприкосновенных вопросов, предлагаемых на тот конец, чтобы он сблизил между собой отдаленнейшие точки; испытывает затруднения при выполнении практических работ.

оценка **«неудовлетворительно»** выставляется студенту, который не знает значительной части программного материала, допускает существенные ошибки, неуверенно, с большими затруднениями и ошибками выполняет практические задания.

### **Оценка устного ответа на зачете**

Устный ответ на зачете оценивается по 2 балльной системе: «зачтено», «незачтено».

Оценка «зачтено» ставится, если:

- демонстрируемые студентом знания отличаются достаточной глубиной и содержательностью,
- дается достаточно полный ответ, как на основные вопросы, так и на дополнительные;
- студент достаточно свободно владеет терминологией;
- ответ студента не содержит принципиальных ошибок.

Оценка «незачтено» ставится, если:

- обнаружено незнание или непонимание студентом основных разделов дисциплины;
- студент допускает существенные фактические ошибки, которые он не может исправить самостоятельно;
- на значительную часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать правильный ответ.

### **Оценивание контрольных работ:**

Каждая из четырёх задач оценивается следующими баллами:

0 (задача не сделана), 1 (сделано кое-что), 2 (сделана приблизительно наполовину), 3 (сделана с некоторыми недочетами), 4 (сделана полностью). Общее число баллов за все 4 задания составляет 16. Оценка за работу студента ставится в зависимости от набранного им числа баллов:

- 0 – 4 балла – неудовлетворительно,
- 5 – 8 баллов – удовлетворительно,
- 9 – 12 баллов – хорошо
- 13 – 16 баллов – отлично.



## **Приложение №2 к рабочей программе дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов»**

### **Методические указания для студентов по освоению дисциплины**

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине "Математическая логика и теория алгоритмов" являются лекции, что связано, прежде всего, с очень высоким уровнем абстрактности изучаемых в математической логике понятий, ее глубокими и прочными связями с основаниями математики и с ее философскими вопросами. По большинству тем предусмотрены практические занятия, целью которых является закрепление лекционного материала путем решения специальным образом подобранных задач и упражнений.

Для успешного освоения дисциплины важно самостоятельное решение достаточно большого набора хорошо подобранных задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математической логики. Для решения задач необходимо не только знать, но и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярная работа с конспектами лекций и рекомендованной литературой.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома студентам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы с основными понятиями математической логики в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде устного опроса на практических занятиях и контрольной работы в 5-ом семестре. Также проводятся консультации (при необходимости) по лекционному материалу и разбору некоторых заданий для самостоятельной работы.

В конце изучения дисциплины студенты сдают экзамен. Экзамен принимается по экзаменационным билетам, каждый из которых включает в себя два теоретических вопроса. Билеты формируются на основании списка вопросов к экзамену, который охватывает полностью всю программу дисциплины. На самостоятельную подготовку к экзамену выделяется 3 дня, во время подготовки к экзамену предусмотрена групповая консультация.