

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра нелинейной динамики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета



Нестеров П.Н.

21 мая 2024 г.

Рабочая программа дисциплины
Дискретные интегрируемые системы

Направление подготовки (специальности)
01.03.02 Прикладная математика и информатика

Направленность (профиль)
«Прикладное программирование и информационные технологии»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры
от 26 апреля 2024 г., протокол № 8

Программа одобрена НМК
математического факультета
протокол № 9 от 3 мая 2024 г.

1. Цели освоения дисциплины

Целями освоения дисциплины "Дискретные интегрируемые системы" являются:

- введение в теорию дискретных интегрируемых систем;
- ознакомление с различными определениями интегрируемости систем уравнений в частных разностях и методами их решения;
- предоставление студентам опыта с использованием пакетов программного обеспечения (Wolfram Mathematica, Maple) для решения современных задач в области дискретных интегрируемых систем;
- привлечение студентов к научным исследованиям по области дискретных интегрируемых систем.

2. Место дисциплины в структуре образовательной программы

Дисциплина «Дискретные интегрируемые системы» относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений, и является элективной дисциплиной. Теория интегрируемых систем использует инструменты из всех классических областей математики. Поэтому, для освоения данной дисциплиной студенты должны иметь знания дисциплин «Математический анализ», «Алгебра и геометрия», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики». Точнее, требуются знания анализа функций многих переменных и одной комплексной переменной, основные методы решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными, включая методы линейной алгебры и аналитической геометрии.

Полученные в курсе «Дискретные интегрируемые системы» знания необходимы для получения научных результатов в области дискретных интегрируемых систем математической физики.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесённые с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с ФГОС ВО, ООП ВО и приобретения следующих знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности:

Формируемая компетенция (код и формулировка)	Индикатор достижения компетенции (код и формулировка)	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-2 Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	И-ПК-2.1 Обладает устойчивыми знаниями в области основных математических дисциплин, их аппарата и результатов И-ПК-2.2 Обладает способностью применять современный математический аппарат в решении различных задач	Знать: - основные определения интегрируемости уравнений в частных разностях; - свойства систем в квадратах; - обратные методы построения решений интегрируемых систем. Уметь: - воспроизводить алгебро-геометрические приемы, используемые при построении решений нелинейных уравнений в частных разностях; - определять интегрируемость нелинейных уравнений в частных разностях по

		<p>различным определениям интегрируемости;</p> <ul style="list-style-type: none"> - строить солитонные решения для конкретных дискретных интегрируемых систем; - строить решения с помощью преобразований Бэклунда. - определять непрерывные пределы. <p>Владеть навыками:</p> <ul style="list-style-type: none"> - построения солитонных решений для дискретного потенциального уравнения Кортевега Де Фриза; - построения солитонных решений для дискретной системы Адлера-Ямилова; - практического применения метода преобразований Бэклунда для построения решений нелинейных уравнений математической физики; - работы с пакетом Wolfram Mathematica; - получения непрерывных интегрируемых систем через непрерывные пределы.
--	--	---

4. Объём, структура и содержание дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет **2** зачётных единицы, **72** акад. часа.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу студентов, и их трудоёмкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1	Вводная лекция. Уравнения в частных разностях и пакет Wolfram Mathematica	8	1	4				3	Задания для самостоятельной работы
2	Пары Лакса для дискретных интегрируемых систем	8	1	4		1		3	Задания для самостоятельной работы
3	Свойство трехмерной совместимости	8	1	4				3	Задания для самостоятельной работы
4	Другие следствия свойства трехмерной совместимости	8	1	4		1		3	Задания для самостоятельной работы
5	Решение дискретных систем, которые не имеют	8	1	4				3	Задания для самостоятельной работы

	свойство трехмерной совместимости								
6	Построение солитонных решения для интегрируемых систем в частных разностях. Непрерывные пределы	8	1	4		1		3	Задания для самостоятельной работы
7	Грассмоновы расширения интегрируемых систем. Некоммутативные аналоги дискретных интегрируемых систем	8	1	4				3	Задания для самостоятельной работы
8	Дискретные интегрируемые системы и отображения Янга-Бакстера	8	1	4		1		3	Задания для самостоятельной работы
							0,3	3,7	зачет
	ИТОГО		8	32		4	0,3	27,7	

Содержание разделов дисциплины:

1. Вводная лекция. Уравнения в частных разностях и пакет Wolfram Mathematica.

- 1.1. Линейные и нелинейные уравнения в частных разностях.
- 1.2. Ознакомление с пакетом символьного обеспечения Wolfram Mathematica.

2. Пары Лакса для дискретных интегрируемых систем.

- 2.1. Что такое интегрируемость?
- 2.2. Уравнения в квад-графах.
- 2.3. Пары Лакса.
- 2.4. Уравнение $dpKdV$ (дискретное потенциальное уравнения КдФ).
- 2.5. Приложения в Wolfram Mathematica.

3. Свойство трехмерной совместимости.

- 3.1. Свойство трехмерной совместимости и интегрируемость.
- 3.2. Приложение в уравнение $dpKdV$.
- 3.3. Построение пары Лакса для систем, которые имеют свойства трехмерной совместимости.
- 3.4. Приложения в Wolfram Mathematica.

4. Другие следствия свойства трехмерной совместимости.

- 4.1. Построение преобразования Бэклунда.
- 4.2. Преобразование Бэклунда для уравнения $dpKdV$.
- 4.3. Построение солитонного решения для $dpKdV$.
- 4.4. Приложения в Wolfram Mathematica.

5. Решение дискретных интегрируемых систем, которые не имеют свойство трехмерной совместимости.

- 5.1. Дискретные преобразования Дарбу.
- 5.2. Построение преобразований Бэклунда для интегрируемых систем в частных разностях.
- 5.3. Приложение в уравнение Адлера-Ямилова.
- 5.4. Приложения в Wolfram Mathematica.

6.1. Построение солитонных решений для интегрируемых систем разностях.

- 6.1.1. Солитонные решения системы Адлера-Ямилова.
- 6.1.2. Солитонные решения уравнения Hirota KdV .
- 6.1.3. Приложения в Wolfram Mathematica.

6.2. Непрерывные пределы.

- 6.2.1. Непрерывные пределы для разностных уравнений.
- 6.2.2. Непрерывный предел уравнения $dpKdV$.

7.1. Грассмановы расширения интегрируемых систем.

- 7.1.1. Грассманова алгебра.
- 7.1.2. Грассманово расширение отображения Дарбу.
- 7.1.3. Построение грассмановых расширений дискретных интегрируемых систем
- 7.1.4. Грассманово расширение системы Адлера-Ямилова.

7.2. Некоммутативные аналоги дискретных интегрируемых систем.

- 7.2.1. Преобразования Дарбу в некоммутативном теле.
- 7.2.2. Построение дискретных интегрируемых систем в некоммутативных телах.
- 7.2.3. Некоммутативные аналоги известных интегрируемых систем (NLS, Boussinesq и другие).

8. Дискретные интегрируемые системы и отображения Янга-Бакстера.

- 8.1. Построение отображений Янга-Бакстера через симметрий уравнений в квадграфах.
- 8.2. Построение отображений Янга-Бакстера через представление Лакса дискретных интегрируемых систем.

5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Студенты знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки в целом. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Академическая лекция с элементами лекции-беседы – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание студентов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков по закреплению полученных на лекции знаний.

Консультации – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы студентов. На консультациях по просьбе студентов рассматриваются наиболее сложные моменты при освоении материала дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы студентов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

6. Перечень лицензионного и (или) свободно распространяемого программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:
для формирования материалов для текущего контроля успеваемости и проведения промежуточной аттестации, для формирования методических материалов по дисциплине:

- программы Microsoft Office;
- издательская система LaTeX;
- пакет программного обеспечения Wolfram Mathematica;
- Adobe Acrobat Reader.

7. Перечень современных профессиональных баз данных и информационных справочных систем, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (при необходимости)

В процессе осуществления образовательного процесса по дисциплине используются:

- Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT» http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php
- Электронно-библиотечная система «Юрайт» <https://urait.ru>
- Электронно-библиотечная система «Лань» <http://e.lanbook.com/>
- Электронно-библиотечная система «Консультант Студента»: <https://www.studentlibrary.ru/>

8. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. J. Hietarinta, N. Joshi and F.W. Nijhoff, «Discrete Systems and Integrability», Cambridge Texts in Applied Mathematics (2016). <https://doi.org/10.1017/CBO9781107337411>
2. Ю. Б. Сурис, А. И. Бобенко Дискретная дифференциальная геометрия. Интегрируемая структура», - Ижевск, Институт компьютерных исследований, Регулярная и хаотическая динамика, 2010. https://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_26770#1

б) дополнительная литература

1. X. Fisenko, S. Konstantinou-Rizos and P. Xenitidis A discrete Darboux-Lax scheme for integrable difference equations, Chaos, Solitons and Fractals, vol. 158, 112059 (2022). <https://arxiv.org/pdf/2109.10372.pdf>
2. F. Nijhoff. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system Phys. Lett. A 297 49-58, 2002 <https://arxiv.org/pdf/nlin/0110027.pdf>
3. F. Nijhoff, J. Atkinson and J. Hietarinta. A Constructive Approach to the Soliton Solutions of Integrable Quadrilateral Lattice Equations Commun. Math. Phys. 297 283-304, 2010 <https://arxiv.org/pdf/0911.0458.pdf>
4. A. Bobenko, Y. Suris. Integrable systems on quad-graphs - Int. Math. Res. Notices 11 573-611, 2002 <https://arxiv.org/pdf/nlin/0110004.pdf>

9. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа;
- учебные аудитории для проведения практических занятий (семинаров);
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций;
- учебные аудитории для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания технических средств обучения.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа к электронной информационно-образовательной среде ЯрГУ.

Автор:

Доцент кафедры нелинейной динамики,
к.ф.-м.н.

С. Константину Ризос

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины
«Актуальные задачи нелинейной динамики»**

**Фонд оценочных средств
для проведения текущей и промежуточной аттестации студентов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы
(данные задания выполняются студентом самостоятельно и проверяются
преподавателем)**

Задания по теме “Введение. Уравнения в частных разностях и пакет Wolfram Mathematica:”

- Пусть дискретное уравнение Риккати:

$$n(n-1)y_{n+1}y_n + n^2y_{n+1} + (n-1)y_n + n(7-6n) = 0, \quad y = y(n), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Сделав замену $y_n + n/(n1) =: w_n/w_{n1}$, сведем это уравнение к линейному дифференциальному уравнению второго порядка и найдем общее решение последнего уравнения. Показать, что решение зависит только от одной постоянной интегрирования.

- Повторить приведенные выше вычисления в Mathematica.
- Пусть уравнение в частных разностях:

$$y_{n,m} = ry_{n+1,m2} + sy_{n+2,m4}.$$

Доказать, что после замены переменных это уравнение можно переписать в виде:

$$w_{k,l} = rw_{k+1,l} + sw_{k+2,l}.$$

Найти общее решение исходного уравнения.

- (Дискретизация уравнения Лапласа) Пусть уравнение:

$$u_{xx} + u_{tt} = 0.$$

Построить дискретизацию этого уравнения:

$$u_{n,m} = \frac{1}{4}(u_{n+1,m} + u_{n-1,m} + u_{n,m+1} + u_{n,m-1}).$$

- Построить дискретизацию краевой задачи:

$$u_{xx} - u_{tt} = 0,$$

с условиями

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x).$$

Задания по теме “Пары Лакса для дискретных интегрируемых систем.”

- Пусть уравнение в квад-графах

$$Q(u, u_{10}, u_{01}, u_{11}; a, b) = 0,$$

а также матрицы $L = L(u, u_{10}; a, \lambda)$ и $M = M(u, u_{01}; b, \lambda)$. Доказать, что уравнение

$$L(u_{01}, u_{11}; a, \lambda)L(u, u_{01}; b, \lambda) = L(u_{10}, u_{11}; b, \lambda)L(u, u_{10}; a, \lambda),$$

является парой Лакса уравнения $Q(u, u_{10}, u_{01}, u_{11}; a, b) = 0$.

- Доказать, что дискретное потенциальное уравнение КдФ

$$(u - u_{11})(u_{01} - u_{10}) = a - b,$$

имеет приведенное выше представление Лакса для $L \equiv M = \begin{pmatrix} u & \lambda - a - uu_{10} \\ 1 & -u_{10} \end{pmatrix}$.

- Повторить приведенные выше вычисления в Mathematica.
- Доказать, что уравнение SKdV

$$a^2(u_{11} - u_{01})(u_{10} - u) = b^2(u_{11} - u_{10})(u_{01} - u),$$

имеет приведенное выше представление Лакса для $L \equiv M = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{u_{10}}{u_{10}-u} & \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{u_{10}u}{u_{10}-u} \\ -\frac{\lambda^2}{a^2} \frac{1}{u_{10}-u} & 1 + \frac{\lambda^2}{a^2} \frac{u}{u_{10}-u} \end{pmatrix}$.

- Доказать, что дискретная система Адлера–Ямилова,

$$p_{01} = p_{10} - \frac{a-b}{1+pq_{11}}p, \quad q_{01} = q_{10} + \frac{a-b}{1+pq_{11}}q_{11},$$

имеет пару Лакса $L \equiv M(p, q_{10}; a, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a + qq_{10} & p \\ q_{10} & 1 \end{pmatrix}$.

Задания по теме “Свойство трехмерной совместимости.”

- Доказать, что дискретное потенциальное уравнение КдФ

$$(u - u_{11})(u_{01} - u_{10}) = a - b,$$

имеет свойства трехмерной совместимости.

- Написать дискретное потенциальное уравнение КдФ $(u - u_{11})(u_{01} - u_{10}) = a - b$ на нижней, передней и левой гранях и определить с помощью этих уравнений значения u_{110} , u_{101} и u_{011} . Доказать, что можно 3 способами получить значение u_{111} , и поэтому уравнение имеет свойство трехмерной совместимости.
- Повторить приведенные выше вычисления в Mathematica.
- Показать, что используя симметрии дискретного потенциального уравнения КдФ можно доказать свойство трехмерной совместимости с помощью только одной из верхней/задней/правой граней.
- Построит пары Лакса дискретного потенциального уравнения КдФ используя его свойство трехмерной совместимости.

Задания по теме “Другие следствия свойства трехмерной совместимости.”

- Построить преобразование Бэклунда для дискретного потенциального уравнения КдФ используя его свойство трехмерной совместимости.
- Найти тривиальные решения дискретного потенциального уравнения КдФ в виде $a^l b^k$.
- Линеаризовать преобразование Бэклунда для дискретного потенциального уравнения КдФ.
- Начиная с тривиального решения, построить солитонное решение для дискретного потенциального уравнения КдФ. Написать матричный вид солитонного решения.
- Продемонстрировать в Mathematica, что это действительно солитонное решение.

Задания по теме “Решение дискретных интегрируемых систем, которые не имеют свойство трехмерной совместимости.”

- Доказать, что дискретная система Адлера–Ямилова,

$$p_{01} = p_{10} - \frac{a-b}{1+pq_{11}}p, \quad q_{01} = q_{10} + \frac{a-b}{1+pq_{11}}q_{11},$$

не имеет свойство трехмерной совместимости.

- Построить преобразование Бэклунда для системы Адлера–Ямилова.
- Найти тривиальные решения системы Адлера–Ямилова вида $p(n, m) = a^{l_1} a^{k_1}$, $q(n, m) = 0$ и $p(n, m) = 0$, $q(n, m) = a^{l_2} a^{k_2}$.
- С помощью этих тривиальных решений строить новые нетривиальные решения.

Задания по теме “Построение солитонных решений для интегрируемых систем в частных разностях.”

- С помощью диаграммы Бьянки строить 1-солитонное решение для системы Адлера–Ямилова.
- С помощью 1-солитонного решения построить 2-солитонное решение для системы Адлера–Ямилова.

Задания по теме “Грассмоновы расширения интегрируемых систем.”

- Пусть матрица Лакса $M(p, q_{10}; a, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a + qq_{10} & p \\ q_{10} & 1 \end{pmatrix}$ для системы Адлера–Ямилова. Рассматриваем грассманово расширение этой матрицы:

$$L(p, q_{10}, \theta, \phi_{10}; a, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda + a + qq_{10} + \theta\phi_{10} & p & \theta \\ q_{10} & 1 & 0 \\ \phi_{10} & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где θ, ϕ_{10} — нечетные элементы алгебры. С помощью этой матрицы, построить грассманово расширение системы Адлера–Ямилова. Доказать, что бозонный предел этой системы — это система Адлера–Ямилова.

- Построить грассманово расширение дискретного потенциального уравнения Кортевега–де Фриза через грассманово расширение его пары Лакса.

Задания по теме “Непрерывные пределы.”

- Линеаризовать модифицированное разностное уравнение КдФ

$$a(vv_{01} - v_{10}v_{11}) = b(vv_{10} - v_{01}v_{11})$$

вокруг решения $v_{n,m} = 1$, а уравнение КдФ Шварца

$$\frac{(w - w_{01})(w_{10} - w_{11})}{(w - w_{10})(w_{01} - w_{11})} = \frac{a^2}{b^2}$$

вокруг решения $w_{n,m} = w_{0,0} + (n/p) + (m/q)$.

- Через непрерывные пределы восстановить полностью соответствующие непрерывные уравнения для полудискретных уравнений

$$a\partial_\tau \ln V_N = \frac{V_{N-1} - V_{N+1}}{V_{N-1} + V_{N+1}}, \quad \text{и} \quad \dot{Z}_N = \frac{2}{a} \frac{Z_{N-1} - Z_{N+1}}{Z_{N-1} + Z_{N+1}}.$$

Задания по теме “Некоммутативные аналоги дискретных интегрируемых систем.”

- Построить некоммутативный аналог преобразования Дарбу для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ).
- Рассматривать совместимость вокруг квадрата двух преобразований Дарбу типа НУШ и построить некоммутативный аналог системы Адлера–Ямилова.
- Построить некоммутативный аналог дискретного уравнения Boussinesq.

Задания по теме “Дискретные интегрируемые системы и отображения Янга–Бакстера.”

- Используя симметрии дискретного потенциального уравнения КдФ, построить отображение Янга–Бакстера Адлера.
- Построить отображение Янга–Бакстера типа КдФ и ограничить его к дискретному потенциальному уравнению КдФ.
- Построить дискретное уравнение Boussinesq и соответствующее отображение Янга–Бакстера.

2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Зачет

Зачет ставится студентам, набравшим 40 и более баллов по каждой самостоятельной работе.

Экзамен

Экзамен проводится в письменной форме. На экзамене проверяется понимание основных концепций дисциплины, определений и теорем. Также, проверяются вычислительные навыки студентов в конкретных задачах, а также навыки с использованием пакета программного обеспечения Wolfram Mathematica. Продолжительность экзамена - 4 часа.

Вопросы к экзамену:

1. Что такое интегрируемая система уравнений в частных разностях. Что такое уравнение в квад-графах.
2. Определение пары Лакса. Условие (дискретной) нулевой кривизны и представление Лакса.
3. Свойства трехмерной совместимости. Трехмерная совместимость дискретного потенциального уравнения КдФ и Шварциан КдВ. Контр-пример: Дискретизация НУШ.
4. Последствия свойства трехмерной совместимости: систематическое построение пары Лакса, построение преобразования Бэклунда.
5. Пары Лакса для дискретного потенциального уравнения КдФ, Шварциан КдВ, Хирота КдВ, системы Адлера-Ямилова и дискретного уравнения Boussinesq.
6. Преобразования Бэклунда для интегрируемых уравнений в частных разностях. Диаграммы Бьянки. Преобразование Бэклунда для дискретного потенциального уравнения КдФ и системы Адлера-Ямилова.
7. Построение солитонных решений с помощью преобразований Бэклунда. 1 и 2-солитонные решения для дискретного потенциального уравнения КдФ.
8. Непрерывные пределы.
9. Грассманова алгебра. Грассманово расширение пары Лакса. Грассманово расширение интегрируемых систем уравнений в частных разностях. Грассманово расширение системы Адлера-Ямилова.
10. Некоммутативные аналоги интегрируемых систем в частных разностях. Некоммутативный аналог преобразования Дарбу. Построение некоммутативного аналога системы Адлера Ямилова.
11. Построение отображений Янга-Бакстера через симметрии уравнений в квадграфах. Ограничения уравнений в квадграфах к отображениям Янга-Бакстера с помощью представления Лакса.

3. Система оценивания

Самостоятельные работы являются обязательными. Каждая работа проверяется, и студенты получают с 0 до 100 баллов по каждой работе. Итоговая оценка по этой дисциплине вычисляется по формуле:

Итоговая оценка = $0.4 \times \text{средний балл по самост. работам} + 0.4 \times \text{итоговый балл экзамена}$

< 60 - неудовлетворительно.

61-70 - удовлетворительно (3).

71-90 - хорошо (4).

91-100 - отлично (5).

Поскольку одной из основных целей этого предмета является привлечение студентов к научным исследованиям, студенты, которые во время семестра получили оригинальные научные результаты, получают автоматически оценку отлично (5).