

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Ярославский государственный университет
им. П.Г. Демидова
Кафедра математического моделирования

Базовые методы численного анализа динамических систем

Методические указания

Рекомендовано

*Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по специальности
Прикладная математика и информатика*

Ярославль 2009

УДК 519.6
ББК В 193я73
Б 17

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2009 года

Рецензент
кафедра математического моделирования

Составитель Глызин Д.С.

Базовые методы численного анализа динамических систем: метод. указания / сост. Д.С. Глызин; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2009. – 24 с.

В методических указаниях приведено описание лабораторных работ по курсу "Численные методы анализа динамических систем".

Предназначены для студентов четвертого курса, обучающихся по специальности 010501 Прикладная математика и информатика (дисциплина "Численные методы анализа динамических систем", блок ДС), очной формы обучения.

УДК 519.6
ББК В 193я73

© Ярославский государственный
университет им. П.Г. Демидова,
2009

Содержание

1	Арифметика чисел с плавающей точкой	4
2	Численное интегрирование дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты	6
2.1	Постановка задачи	7
2.2	Варианты методов Рунге-Кутты	7
2.3	Варианты тестирующих примеров	9
3	Фазовый портрет динамической системы на плоскости	9
3.1	Постановка задачи	10
3.2	Варианты заданий	11
4	Нелинейные одномерные отображения	13
4.1	Постановка задачи	14
4.2	Варианты отображений $f(x, \lambda)$	15
5	Модельные системы Спротта	17
6	Математические модели гидродинамики	19
7	Колебательные механические системы с нелинейными элементами	20
	Список литературы	22

1 Арифметика чисел с плавающей точкой

Главным источником информации для этого раздела стала работа [10], в которой на математическом уровне строгости излагаются основные проблемы компьютерной арифметики с нецелыми числами.

Наиболее распространенной формой представления действительных чисел в машинных вычислениях являются двоичные форматы с плавающей точкой. Эти форматы позволяют хранить точно (без ошибки округления) числа следующего вида:

$$\pm(d_0 + d_1 \cdot 2^{-1} + \dots + d_{p-1} \cdot 2^{-(p-1)})2^e, \quad d_i = 0, 1, \quad e_{\max} \leq e \leq e_{\min}. \quad (1)$$

Любое другое действительное число округляется до одного из представимых в форме (1).

Цифры $d_0 \dots d_{p-1}$ образуют *мантиссу*, а целое число e называется показателем (экспонентой).

За точность представления числа отвечает параметр p , количество значащих цифр в мантиссе. Этот параметр определяется как программной, так и аппаратной частями платформы. Стандартом IEEE-854 предусмотрены следующие варианты высокоточных представлений:

- double, двойная точность;
- double extended, двойная расширенная.

Числа с плавающей точкой, первый знак которых отличен от нуля, называют нормализованными.

Упражнение. Найти количество нормализованных чисел с плавающей точкой в шарах единичного радиуса с центрами в точке 0 и точке 2^{10} .

Архитектура Intel x86 реализует в сопроцессоре вычисления с двойной расширенной точностью; таким образом, для большинства современных персональных компьютеров внутренним аппаратным форматом является 80-битовый double extended. Тем не менее такие числа поддерживаются не всеми компиляторами языков высокого уровня. Здесь мы рассмотрим язык С как самое универсальное средство создания консольных приложений под различными операционными системами, а также среду Turbo Delphi, основанную на языке Object Pascal, бесплатно распространяемую для некоммерческого использования, как одну из самых удобных сред быстрой разработки высокопроизводительных программ с графическим пользовательским интерфейсом.

В указанных языках высокоточные вычисления реализованы на основе следующих типов:

- в С: double (64 бита) и long double, реализация которого зависит от компилятора и его ключей, основные ограничения см. в [11].
- в Object Pascal: float (64 бита) и extended (80 бит).

Упражнение. Выяснить с помощью функции `sizeof()` размер типов `double` и `long double` в доступной вам реализации компилятора языка C с установками по умолчанию.

Упражнение. Написать программу на языке Object Pascal и выяснить, во сколько раз быстрее на вашем компьютере выполняются одни и те же действия над числами формата `double`, чем над числами в формате `extended`. Это соотношение существенно меняется в зависимости от модели процессора!

Указание: для точного замера начального и конечного моментов вычислений можно использовать следующую функцию:

```
function RdTsc: Int64;  
asm  
rdtsc  
end;
```

Она возвращает текущее показание счетчика тактов процессора.

Выбор расширенной двойной точности в качестве основы вычислений должен быть осознанным, например, если он продиктован практической необходимостью в дополнительных значащих цифрах. Хотя использование расширенной точности выглядит естественным (именно в таком формате хранятся числа в сопроцессоре, а математические функции Delphi используют для передачи аргументов и значений тип `extended`), минусы такого подхода значительны: это не только более низкая (в разы) скорость вычислений, но и существенные (в случае C) проблемы портируемости.

В качестве важного примера оборудования, не поддерживающего `double extended`, можно привести графические процессоры, используемые для неграфических вычислений. Благодаря большому количеству ядер эти устройства демонстрируют высокую производительность на хорошо параллелизуемых задачах, но при этом лишь в последнем поколении (по состоянию на 2008 год) видеокарт появилась поддержка двойной (не расширенной) точности.

Даже две платформы, соответствующие стандарту IEEE-854, могут выполнять одну и ту же программу с разным результатом. Причины кроются в том, что некоторые действия компиляторов, влияющие на вычисления, никак не регламентируются стандартом. Одной из самых частых причин несогласованности является разница в формате, в котором хранятся промежуточные значения выражений.

Упражнения:

- вычислить, насколько будет отличаться от 1 сумма $\sum_{i=1}^{10^6} 10^{-6}$ при использовании чисел с двойной точностью;

- проверить, истинно ли условие последнего оператора в данной последовательности кода:

```
double p=1.0;  
p=p/10.0;  
if (p==0.1)  
{...}
```

2 Численное интегрирование дифференциальных уравнений методами Рунге-Кутты

Дифференциальные уравнения — один из наиболее важных инструментов математического моделирования. Основа большинства физических законов сформулирована в их терминах. Законы Ньютона в механике и уравнения Максвелла в теории электромагнитного поля, законы Кирхгофа в теории электрических цепей и уравнение Шредингера в квантовой механике, а также многие другие дифференциальные уравнения или их системы составляют ядро математического аппарата физических исследований.

Аналитическое решение наиболее интересных дифференциальных уравнений, как правило, невозможно. В связи с этим возникает задача численного определения интегральных кривых исследуемых уравнений. Среди универсальных методов решения начальной задачи Коши наиболее популярными являются методы Рунге-Кутты. С помощью этих методов начальная задача Коши

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(t_0) = x \quad (2)$$

заменяется рекуррентным соотношением

$$x_{n+1} = x_n + S_h(f, t_n, x_n) \quad (3)$$

с заданной начальной точкой t_0, x_0 и функцией $S_h(f, t_n, x_n)$, которая определяется избранным численным методом. В формуле (3) шаг интегрирования h введен так, что $t_n = t_0 + nh$. Основной проблемой численных методов является вопрос выбора шага интегрирования h для обеспечения заданной точности. Методы Рунге-Кутты позволяют дать оценку $|x_n - x(t_n)| = O(h^s)$, где n — целое, а число s называется порядком метода. Однако практическое применение таких оценок, как правило, невозможно, поэтому для контроля точности на шаге будем применять правило Рунге практической оценки погрешности интегрирования. Обозначим

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + S_h(f, t_n, x_n), \\ x_{n+1/2} &= x_n + S_{h/2}(f, t_n, x_n), \\ \hat{x}_{n+1} &= x_{n+1/2} + S_{h/2}(f, t_n + h/2, x_{n+1/2}), \\ \Delta &= |\hat{x}_{n+1} - x_{n+1}| / (2^s - 1). \end{aligned}$$

При достаточно малом значении h погрешность вычислений оценивается $|x_n - x(t_n)| < \Delta$, что позволяет автоматизировать выбор шага вычислений. Достаточно делить h пополам до тех пор, пока не выполнено неравенство $\Delta < \varepsilon$. Отметим, что в случае, если Δ слишком мало, а именно, $2^{s+1}\Delta < \varepsilon$, то имеет смысл на следующем этапе вычислений удвоить величину h .

2.1 Постановка задачи

1. На любом языке высокого уровня написать программу, приближенно интегрирующую начальную задачу Коши (2) на промежутке $[t_0, b]$ с точностью ε .
2. Интегральную кривую уравнения (2) отобразить таблично и графически на экране ПЭВМ.
3. Протестировать программу (п.1) на заданном примере. При этом графики и таблицы приближенного и точного решений следует вывести одновременно. (Примеры составлены так, что аналитическое решение легко определяется). Функция $f(t, x)$, начальные условия t_0, x_0 , числа b, ε и один из методов Рунге-Кутты определяются вариантом задания.

2.2 Варианты методов Рунге-Кутта

1. Однопараметрическое семейство методов Рунге-Кутта четвертого порядка ($s = 4$) задается формулами:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_n, x_n), & k_2 &= hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2), \\ k_3 &= hf(t_n + h/2, x_n + ((1 - 1/\delta)k_1 + k_2/\delta)/2), \\ k_4 &= hf(t_n + h, x_n + (1 - \delta)k_2 + \delta k_3), \\ S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + (4 - 2\delta)k_2 + 2\delta k_3 + k_4)/6. \end{aligned}$$

Примите $\delta = 0.5$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

2. В формулах п.1 примите $\delta = 1$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$.
3. В формулах п.1 примите $\delta = 2$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}$.

4. Метод пятого порядка вида

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2), \\
 k_3 &= hf(t_n + h/2, x_n + (k_1 + k_2)/4), \\
 k_4 &= hf(t_n + h, x_n - k_2 + 2k_3), \\
 k_5 &= hf(t_n + 2h/3, x_n + (7k_1 + 10k_2 + k_4)/27), \\
 k_6 &= hf(t_n + h/5, x_n + \\
 &\quad (28k_1 - 125k_2 + 546k_3 + 54k_4 - 378k_5)/625), \\
 r &= (42k_1 + 224k_3 + 21k_4 - 162k_5 - 125k_6)/336, \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= r + (k_1 + 4k_3 + k_4)/6
 \end{aligned}$$

позволяет оценивать погрешность на шаге, не прибегая к правилу Рунге, поскольку величина r есть главный член погрешности данного метода. Примите величину $\varepsilon = 10^{-3}$.

5.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/3, x_n + k_1/3), \\
 k_3 &= hf(t_n + 2h/3, x_n - k_1/3 + k_2), \\
 k_4 &= hf(t_n + h, x_n + k_1 - k_2 + k_3), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)/8, \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}, s = 4.
 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/4, x_n + k_1/4), \\
 k_3 &= hf(t_n + h/2, x_n + k_2/2), k_4 = hf(t_n + h, x_n + k_1 - 2k_2 + 2k_3), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + 4k_3 + k_4)/6, \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-3}, s = 4.
 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2), \\
 k_3 &= hf(t_n + h, x_n - k_1 + 2k_2), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + 4k_2 + k_3)/6, \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}, s = 3.
 \end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/3, x_n + k_1/3), \\
 k_3 &= hf(t_n + 2h/3, x_n + 2k_2/3), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + 3k_3)/4, \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-2}, s = 3.
 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h/2, x_n + k_1/2), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= k_2, \varepsilon = 0.1, s = 2.
 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned}
 k_1 &= hf(t_n, x_n), k_2 = hf(t_n + h, x_n + k_1), \\
 S_h(f, t_n, x_n) &= (k_1 + k_2)/2, \varepsilon = 0.1, s = 2.
 \end{aligned}$$

2.3 Варианты тестирующих примеров

Пусть

$$f(t, x) \equiv -2(t-2)x + \phi(t)\psi(t), \quad t_0 = 0, \quad x_0 = 10, \quad b = 6, \quad h_0 = 0.5,$$

а функции $\phi(t)$ и $\psi(t)$ определяются одним из перечисленных ниже способов

$\phi(t) :$

$\psi(t) :$

- | | |
|--------------------------|-----------------|
| 1. $t \exp(-t^2),$ | 1. $\cos(t),$ |
| 2. $\exp(-(t-2)^2),$ | 2. $(2t+1),$ |
| 3. $\sin(t) \exp(-t^2),$ | 3. $(t-2)^2,$ |
| 4. $\exp(-t^2 + 4t).$ | 4. $t \cos(t).$ |

3 Фазовый портрет динамической системы на плоскости

Исследование систем дифференциальных уравнений приводит к одно-временному изучению двух и более графиков зависимых переменных. Для того чтобы сделать результаты более обозримыми, решение изображают как параметрически заданную кривую в пространстве зависимых переменных, такая кривая называется траекторией, а пространство зависимых переменных системы – фазовым пространством. Рассмотрим двумерную автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= Q(x, y, \mu).\end{aligned}\tag{4}$$

Пусть $P(x, y, \mu), Q(x, y, \mu)$ — непрерывные функции своих аргументов, такие, что при каждом значении параметра μ и любых начальных условиях существует единственное решение начальной задачи Коши системы (4). Специфика фазового пространства размерности два такова, что всякая замкнутая непрерывная кривая без самопересечений делит ее на две части: внутреннюю и внешнюю. Этот факт, вытекающий из леммы Жордана, и запрет на пересечения и самопересечения траекторий автономных систем (обусловлен существованием и единственностью решения начальной задачи Коши системы (4)) позволяют разбить фазовую плоскость на области (ячейки), содержащие однотипные траектории. Границы ячеек состоят из особых траекторий, которые называются сепаратрисами. Задача качественного анализа динамических систем состоит в отыскании сепаратрис и в

определении зависимости разбиения фазовой плоскости на ячейки от параметров системы. Согласно принятым условиям система (4) гладко зависит от параметра μ , поэтому естественно предположить, что небольшое его изменение мало меняет фазовый портрет. Оказывается, однако, что существуют такие особые значения параметра, при прохождении которых происходят существенные, качественные изменения структуры фазового портрета. Примером таких изменений может служить процесс рождения (бифуркации) замкнутой траектории (периодических колебаний), когда на фазовой плоскости системы возникает новая ячейка, заключенная внутри бифурцирующей замкнутой кривой. Разработано большое количество аналитических асимптотических методов, позволяющих предсказать такие качественные изменения. Главный их недостаток состоит в локальности, иначе говоря ограниченности применимости как по параметру, так и по области в фазовом пространстве. В связи с этим большое значение приобретает сочетание аналитических и численных методов. Наша цель будет состоять в построении фазового портрета динамической системы с помощью ЭВМ при условии, что известна достаточно узкая область, в которой находится критическое значение параметра.

3.1 Постановка задачи

1. Модифицировать программу интегрирования дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты, построенную в лабораторной работе №2, так, чтобы
 - (а) решалась начальная задача Коши для двумерной системы дифференциальных уравнений;
 - (б) на экран дисплея в координатах зависимых переменных xOy выводились точки траектории, параметрически заданные решением $(x(t), y(t))$;
 - (в) построение траектории с заданными начальными условиями прекращалось по "горячей" клавише;
 - (г) предусмотреть вывод на экран произвольного числа траекторий и его очистку в случае необходимости.
2. Протестировать построенную в п.1 программу на линейных системах. Численно построить фазовые портреты для случаев фокуса, узла, седла.
3. Оттестированную программу применить к динамической системе, определенной вариантом задания. Построить фазовый портрет этой систе-

мы при различных значениях параметра и проследить за происходящими при этом изменениями.

3.2 Варианты заданий

В задачах 1–2 выясните, при каких a и b нулевое решение — устойчивый фокус, а при каких — неустойчивый.

1. Уравнение Ван-дер-Поля в критическом случае

$$\ddot{x} - (-a + b\dot{x}^2)\dot{x} + x = 0.$$

2. Уравнение Релея в критическом случае

$$\ddot{x} - (-ax^2 + b\dot{x}^4)\dot{x} + x = 0.$$

3. Уравнение Дуффинга в критическом случае

$$\ddot{x} - ax^3 + x = 0.$$

Определите, как меняется тип нулевого состояния равновесия при изменениях параметра a .

В задачах 4–8 установите тип нулевого состояния равновесия

4.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x^3 - xy^3, \\ \dot{y} &= -x - xy^2.\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - y^3 - xy^3, \\ \dot{y} &= -x - 2xy^2.\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - x(2x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= -x - 2xy^2.\end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x + y^3.\end{aligned}$$

8.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xy^m + x^6 + y^4, \\ \dot{y} &= -x + x^3 - 3x^2y^2,\end{aligned}$$

где а) $m = 1$; б) $m = 2$.

В задачах 9–19 проследите за рождением цикла при изменении параметра ε .

9. Уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \varepsilon \dot{x}(1 - x^2) + x = 0.$$

10. Уравнение Ван-дер-Поля (учтены слагаемые более высокого порядка малости)

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \beta x^2 + \gamma x^4)\dot{x} + x = 0,$$

a) $\beta = 1, \gamma = 2$; b) $\beta = 1, \gamma = 1$; c) $\beta = 0, \gamma = -2$.

11. Уравнение Рэлея

$$\ddot{x} - (\varepsilon - \beta \dot{x}^2 + \gamma \dot{x}^4)\dot{x} + x = 0,$$

a) $\beta = 1, \gamma = 0, \varepsilon > 0$; b) $\beta = 1, \gamma = 2$;

c) $\beta = 1, \gamma = -1$; d) $\beta = -1, \gamma = 1$.

12. Уравнение Дуффинга

$$\ddot{x} - 2\varepsilon \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = 0,$$

определите какие-либо значения параметров α и β , при которых данное уравнение имеет устойчивый предельный цикл.

13.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon \sin(x) + y - \frac{y^3}{3}, \\ \dot{y} &= -x - 2(x^2 + y^2)y.\end{aligned}$$

14.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - xy^2, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon y - x^3.\end{aligned}$$

15.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - \varepsilon x, \\ \dot{y} &= -x + \varepsilon(x^2 + y^2)y.\end{aligned}$$

16.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= x - y + \varepsilon x - xy^2 - y^3, \\ \dot{y} &= 2x - y + xy^2 + x^2y.\end{aligned}$$

17.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin(x) + \varepsilon(\gamma - y), \quad \gamma > 0.\end{aligned}$$

18.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \varepsilon x - 4y - x(x^2 + y^2), \\ \dot{y} &= x - \varepsilon y - y(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

19.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y, \\ \dot{y} &= -\sin(x) + \varepsilon[\gamma - \lambda(1 - d \cos(x))].\end{aligned}$$

a) $\gamma = 1, \lambda = 0.5, d = 2$, b) $\gamma = 2, \lambda = -0.5, d = 1$.

20. Изобразите фазовый портрет квадратичной системы

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - 10x^2 + 5xy + y^2, \\ \dot{y} &= x + x^2 - 25xy\end{aligned}$$

с четырьмя предельными циклами.

21. Найдите состояния равновесия системы

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin \alpha_2 + \kappa(1 + \cos \alpha_2), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin \alpha_1 + \kappa(1 + \cos \alpha_1),\end{aligned}$$

исследуйте их характер при $\kappa = 0$ и $\kappa = 3$. Численно интегрируя систему в квадрате $0 < \alpha_1 < 2\pi$, $0 < \alpha_2 < 2\pi$, изобразите ее фазовый портрет.

22. Выполните задание задачи 21 для системы

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_1 &= 2 \sin \alpha_1 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_2 + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos \alpha_1), \\ \dot{\alpha}_2 &= 2 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \alpha_1 + \kappa(\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos \alpha_1),\end{aligned}$$

при $\kappa = 0$ и $\kappa = 3$.

4 Нелинейные одномерные отображения

Математическое моделирование большого числа природных процессов приводит к исследованию различных нелинейных отображений. Простейшие законы, описывающие экспоненциальные количественные изменения, могут быть выражены как дифференциальными, так и разностными уравнениями. Системы разностных уравнений возникают в радиофизических задачах, теории передачи информации, популяционной биологии и во всевозможных других областях науки при описании дискретных и близких к дискретным процессов.

Особый интерес к нелинейным одномерным отображениям возник в последнее время в связи с изучением хаотических колебаний динамических систем. Как оказалось, многие фундаментальные свойства этих систем описываются с помощью отображений, построенных по какому-либо закону

вдоль траекторий изучаемой системы. Полученные отображения многократно проще исходного объекта, хотя сами по себе они обладают достаточно сложной динамикой, которая при определенных допущениях отражает существо происходящих в исследуемой задаче процессов. Рассмотрим одномерное отображение

$$x_{n+1} = f(x_n, \lambda), \quad (5)$$

где x_n – вещественные числа, $f(x_n, \lambda)$ – непрерывно дифференцируемая (кусочно непрерывно дифференцируемая) функция своих аргументов, λ – числовой параметр. Введем некоторые обозначения. Число x^* будем называть неподвижной точкой отображения (5), если $f(x^*, \lambda) = x^*$. Цепочку чисел x_1, x_2, \dots, x_k назовем циклом периода k , если $x_{m+1} = f(x_m, \lambda)$, $m = 2 \dots k$ и $x_{k+1} = x_1$. Очевидно, что неподвижная точка x^* является циклом периода единица. Цикл x_1, x_2, \dots, x_k назовем устойчивым, если $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ такое, что $\forall y_1 > 0$, из неравенства $|y_1 - x_1| < \delta$ следует, что $|y_n - x_n| < \varepsilon$, $n = 2, 3, \dots$, а числа x_n, y_n определяются из рекуррентного соотношения (5).

Многие нелинейные отображения имеют сложные неупорядоченные колебания. Сценарий возникновения таких режимов, описанный Фейгенбаумом, состоит в том, что в процессе изменения параметра устойчивыми режимами отображения (5) оказываются поочередно циклы периода $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$. Возникновение циклов двойного периода называется бифуркацией удвоения. Значения λ_m , при которых происходят эти бифуркации, имеют конечный предел при $m \rightarrow \infty$. Показано, что выполнено предельное равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_{m+1} - \lambda_m} \right) = \delta \approx 4.669, \quad (6)$$

где δ – константа Фейгенбаума. Пусть

$$\lambda_* = \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m,$$

ясно, что при $\lambda > \lambda_*$ поведение отображения (5) будет еще более сложным, возможно хаотическим. Представляется целесообразным с помощью ПЭВМ проследить за этими изменениями и найти для определенных вариантов задания функций $f(x, \lambda)$ бифуркационные значения λ_m ($m = 1, 2, 3, 4$) и первое приближение константы δ .

4.1 Постановка задачи

1. Составить программу, отображающую на экран дисплея график функции $y = f(x, \lambda)$ (определяется вариантом задания) в координатах

xOy и итерации отображения (5) в форме диаграммы Ламерея. Начальное значение x_0 должно запрашиваться программой. Предусмотреть очистку экрана для наблюдения устойчивого режима, к которому приближаются итерации (5).

2. Найти значения параметра λ_m , $m = 1, 2, 3, 4$, при которых происходят бифуркации удвоения периода.
3. По полученным первым трем-четырем значениям λ_m , используя определение (6), оценить δ .
4. Определить значения параметра λ (какие-либо), при которых наблюдаются неупорядоченные колебания.
5. В случае неупорядоченных колебаний построить гистограмму для оценки плотности распределения вероятности итераций отображения (5).

4.2 Варианты отображений $f(x, \lambda)$

1. $\lambda x(1 - x)$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
2. $\lambda^2 - x^2$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
3. $x \exp(\lambda(1 - x))$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
4. $\lambda^2 - (2x - 1)^4$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
5. $\lambda / (2 \operatorname{ch}^2(\lambda x))$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
6. $1 - \lambda(x - 0.5)^2$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
7. $\lambda - |x|^z$, где $a)z = 3, b)z = 4$
8. $\lambda \sin x$, $(0 < x < \pi, \lambda > 0)$
9. $\lambda^3 / (\lambda^2 + x(x^2 - 0.5))$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
10. $\lambda^2 / (\lambda^2 + (x^2 - 0.5)^2)$, $(0 < x < 1, \lambda > 0)$
11. $\exp(-(x - 0.5)^2 / (2\lambda^2)) / \lambda$, $(0 < x < 4, 0 < \lambda < 2)$
12. $x \exp(-x^2 / (2\lambda^2)) / \lambda^2$, $(0 < x < 4, 0 < \lambda < 2)$
13. $\lambda x^{\lambda-1} \exp(-x^\lambda)$, $(0.5 < x < 2, \lambda > 0)$
14. $\exp(-(x - 0.5)^2 / \lambda)$, $(0.5 < x < 2, \lambda > 0)$
15. $4x(1 - \lambda) / [(1 - (x + 0.5)^2)^2 + 4\lambda(x + 0.5)^2]$, $(1 < x < 2, 0 < \lambda < 1)$

$$16. \lambda \exp(-\lambda|x - 0.5|)/2, \quad (x > 0, \lambda > 0)$$

$$17. \lambda \sin x \exp(1 - \lambda x), \quad (x > 0, \lambda > 0)$$

$$18. \sin x \exp[\lambda(1 - x \sin x)], \quad (x > 0, \lambda > 0)$$

$$19.$$

$$f(x, \lambda) = \begin{cases} 2\lambda x, & 0 < x < 0.5 \\ 2\lambda(1 - x), & 0.5 < x < 1 \end{cases}$$

5 Модельные системы Спротта

Таблица 1, заимствованная из статьи Спротта [13], содержит простейшие трехмерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичной нелинейностью, обладающие хаотическим поведением.

Таблица 1

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
1	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = -x + yz$ $\dot{z} = 1 - y^2$	Отсутствуют	0.014, 0, -0.014	3.000
2	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - xy$	(1, 1, 0), (-1, -1, 0)	0.210, 0, -1.210	2.174
3	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - x^2$	(1, 1, 0), (-1, -1, 0)	0.163, 0, -1.163	2.140
4	$\dot{x} = -y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xz + 3y^2$	(0,0,0)	0.103, 0, -1.320	2.078
5	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - 4x$	(0.25, 0.063, 0)	0.078, 0, -1.078	2.072
6	$\dot{x} = y + z$ $\dot{y} = -x + 0.5y$ $\dot{z} = x^2 - z$	(0, 0, 0), (-2, -4, -4)	0.117, 0, -0.617	2.190
7	$\dot{x} = 0.4x + z$ $\dot{y} = xz - y$ $\dot{z} = -x + y$	(0, 0, 0), (-2.5, -2.5, 1)	0.034, 0, -0.634	2.054
8	$\dot{x} = -y + z^2$ $\dot{y} = x + 0.5y$ $\dot{z} = x - z$	(0, 0, 0), (-2, -4, -2)	0.117, 0, -0.617	2.190
9	$\dot{x} = -0.2y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = x - z + y^2$	(0,0,0)	0.012, 0, -1.012	2.012

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
10	$\dot{x} = -2z$ $\dot{y} = -2y + z$ $\dot{z} = -x + y + y^2$	(0,0,0)	0.076, 0, -1.076	2.037
11	$\dot{x} = xy - z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = x + 0.3z$	(0, 0, 0), $\frac{1}{9}(30, 30, 100)$	0.038, 0, -0.890	2.042
12	$\dot{x} = y + 3.9z$ $\dot{y} = 0.9x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - x$	(1,0.9,-0.231)	0.061, 0, -1.061	2.057
13	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = -x^2 - y$ $\dot{z} = 1.7(1+x) + y$	(2.406, -5.791, 0), (-0.706, -0.5, 0)	0.044, 0, -1.044	2.042
14	$\dot{x} = -2y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + y - 2z$	(-0.25,0,0.5)	0.076, 0, -2.076	2.037
15	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = x - z$ $\dot{z} = x + xz + 2.7y$	(0, 0, 0), (-1, 0, -1)	0.049, 0, -0.319	2.154
16	$\dot{x} = 2.7y + z$ $\dot{y} = -x + y^2$ $\dot{z} = x + y$	(0, 0, 0), (1, -1, 2.7)	0.087, 0, -0.481	2.181
17	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 3.1x + y^2 + 0.5z$	(0, 0, 0), (-3.1, -3.1, 0)	0.109, 0, -0.609	2.179
18	$\dot{x} = 0.9 - y$ $\dot{y} = 0.4 + z$ $\dot{z} = xy - z$	(- $\frac{4}{9}$, 0.9, -0.4)	0.062, 0, -1.062	2.058
19	$\dot{x} = -x - 4y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + x$	(-1, 1/4, 1), (-1, 1/4, -1)	0.188, 0, -1.188	2.151

Построение представленной таблицы было предпринято Спроттом с целью перечислить все трехмерные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с хаотическим поведением и минимальным количеством мономов минимальной степени в полиномиальной нелинейности.

6 Математические модели гидродинамики

5.2.1. Модель тепловой конвекции. При изучении Фурье-разложений решений классического уравнения Навье-Стокса Лоренц [12] получил систему вида

$$\begin{aligned}X' &= \alpha(Y - X), \\Y' &= rX - Y - XZ, \\Z' &= -bZ + XY,\end{aligned}\tag{5.1}$$

Исследуйте систему Лоренца при

- a) $a = 10, r = 5$, изменяя b от 0 до 9;
- b) $a = 10, r = 20$, изменяя b от 0 до 12;
- c) $a = 10, b = 8/3$, изменяя r от 166 до 167 (проверьте, что при $r = 166$ имеют место устойчивые периодические движения, а при $r = 166.1$ — хаотические колебания).

5.2.2. Модель Мариока-Шмицу тепловой конвекции при больших числах Рейнольдса. Эта модель была предложена как альтернативная модели Лоренца (см. [9]).

$$\begin{aligned}X' &= Y, \\Y' &= X - \lambda Y - XZ, \\Z' &= -aZ + X^2.\end{aligned}\tag{5.2}$$

Проанализируйте систему (5.2) при

- a) $a = 10$, изменяя λ , от 0 до 9;
- b) $a = 10, 0.5 < \lambda < 0.6$ (убедитесь, что при $\lambda = 0.547, 0.553, 0.555$ происходят бифуркации удвоения периода).

5.2.3. Модель тепловой конвекции Мура и Шнигеля (см. [7, с. 77–79]).

$$\begin{aligned}X' &= Y, \\Y' &= Z - (1 - \delta)Z, \\Z' &= -\rho Z + (1 - \delta Z^2)Y.\end{aligned}\tag{5.3}$$

Изучите сложные колебания системы (5.3) при

- a) $\delta = 10, \rho > 100$;
- b) $\delta = 10, \rho > 50$.

Следующие две системы возникают при исследовании нелинейных параболических систем типа реакция-диффузия, родственных уравнению Навье-Стокса.

5.2.4. Двухкомпонентная модель уравнения Курамото-Судзуки (см. [1]).

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi + \eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_1 \sin\theta), \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 0.75\eta) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2 \sin\theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} &= c_2(2\xi - 0.5\eta) + (2\xi + \eta)\sin\theta + c_2(2\xi - \eta)\cos\theta + 2c_1k^2.\end{aligned}\quad (5.4)$$

Параметры k, c_1, c_2 выбираются равными:

а) $k = c_1 = 1, c_2 = -3.15, -4, -4.05$ (убедитесь, что при этих значениях параметров происходят бифуркации удвоения периода и исследуйте хаотические колебания при $c_2 = 4, 7$);

б) $k = 1, c_1 = 5, -2 > c_2 > -8$ (найдите значение параметра c_2 , при котором происходит первая бифуркация удвоения периода).

5.2.5. Фазовая модель системы n слабо связанных осцилляторов (см. [5]).

$$\dot{\alpha}_j = 2 \sin \alpha_j - \sin \alpha_{j-1} - \sin \alpha_{j+1} + \kappa(\cos \alpha_{j-1} + \cos \alpha_{j+1}), \quad (5.5)$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1.$$

Исследуйте систему (5.5) в случаях различных граничных условий:

а) $\alpha_0 = \alpha_n = 0, n = 3, 4, \kappa = 3$;

б) $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1}, n = 3, \kappa = 3$.

7 Колебательные механические системы с нелинейными элементами

5.3.1. Модель Дуффинга изогнутого стержня (иногда называемая уравнением Холмса [8]).

$$\begin{aligned}X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y + X(1 - X^2)/2 + f \cos Z, \\ Z' &= \omega.\end{aligned}\quad (5.6)$$

Варианты параметров для численного исследования:

а) $f = 0.15, \delta = 0.05, 0 < \omega < 1.2$;

б) $f = 0.4, \delta = 0.2, 0 < \omega < 1.2$;

с) $\delta = 0.15, \omega = 0.8, 0.1 < f < 0.3$;

д) $\delta = 0.15, \omega = 0.3, 0.2 < f < 0.6$.

Изменяя бифуркационный параметр ω в первых двух вариантах и f в остальных, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.6).

5.3.2. Колебания с провалами арки на шарнирах под воздействием гармонической внешней силы (ферма Мизеса, см. [4, с. 237]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y + k(1 - \sqrt{b^2 + X^2})X + f \cos Z, \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Варианты параметров для численного исследования:

- а) $\delta = 0.1, k = 1, b = 2, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
- б) $\delta = 0.1, k = 1, b = 1.5, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
- в) $\delta = 0.15, k = 1, b = 2, \omega = 0.8, 0.1 < f < 0.3$.

Изменяя бифуркационные параметры ω или f , найти такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследовать хаотический режим системы (5.7).

5.3.3. Маятник с колеблющейся точкой подвеса (см. [2]).

$$\ddot{\theta} + \beta \dot{\theta} + (1 + A \cos \omega t) \sin \theta = 0. \quad (5.8)$$

Для получения колебаний сложной структуры необходимо выбрать параметры β, A, ω так, чтобы A и ω были велики, а β – мало, причем $A \simeq (\beta)^{0.5}$, $\omega \simeq 1/\beta$.

Варианты заданий:

- а) зафиксировав $\beta = 0.01$ и $\omega = 30$ и изменяя A от 5 до 10, добейтесь устойчивости верхнего состояния равновесия маятника $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$;
- б) при $\beta = 0.1$ и $\omega = 40$ найдите значения A , при которых решения уравнения (5.8) изменяются неупорядоченно, и исследуйте такие решения численно.

5.3.4. Модель динамики изогнутого стержня с двумя степенями свободы (см. [8]).

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \gamma \dot{X} - 0.5(1 - X^2)X + \beta XY^2 &= f, \\ \ddot{Y} + \delta \dot{Y} + \alpha(1 + \epsilon Y^2)Y + \beta YX^2 &= f_0 + f_1 \cos \omega t. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Зафиксируйте $\gamma = \delta = 0.1, \alpha = 2, \epsilon = 0.05, \beta = 1, f_0 = f_1 = 0.2$ и, изменяя параметры f_1 и ω так, что

- а) $f_1 = 0.4, 0 < \omega < 1.2$ или
- б) $\omega = 0.8, 0.2 < f_1 < 2$

найдите такие их значения, при которых решения (5.9) ведут себя неупорядоченным образом. Исследуйте полученные решения по изложенной схеме.

5.3.5. Модель диффузионного взаимодействия двух одинаковых нелинейных осцилляторов [3].

$$\begin{aligned}\xi_1 &= d\xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d \cos(\delta) - \xi_1^2)\xi_1, \\ \xi_2 &= d\xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d \cos(\delta) - \xi_2^2)\xi_2, \\ \dot{\alpha} &= -d \left[\frac{\xi_2}{\xi_1} \sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2} \sin(\alpha - \delta) \right] + b(\xi_1^2 - \xi_2^2).\end{aligned}\tag{5.10}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 – амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов соответственно, α – разность фаз между ними.

Изучите перестройки фазового портрета системы (5.10), фиксируя $\delta = -\pi/3, b = 10$ и увеличивая параметр d

а) от 1.45 до 1.459;

б) от 1.5 до 1.5075,

проследите за бифуркациями удвоения периода, происходящими с системой (5.10).

При значении параметра $d = 1.7$ изучите числовые размерностные характеристики хаотического аттрактора системы (5.10).

Список литературы

- [1] *Азрэмеева, Т.С.* О классификации систем типа "реакция-диффузия" в окрестности точки бифуркации / *Т.С. Азрэмеева, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий, А.А. Самарский* // Итоги науки и техники: Современные достижения. – М.: ВИНТИ, 1987. – Т.28. – С. 207–313.
- [2] *Боголюбов, Н.Н.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / *Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский*. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
- [3] *Глызин, С.Д.* Динамические свойства простейшей разностной аппроксимации уравнения "реакция-диффузия" / *С.Д. Глызин* // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 33. – С. 801–812.
- [4] *Гуляев, В.И.* Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем / *В.И. Гуляев, В.А. Баженов, С.Л. Попов*. – М.: Высшая школа, 1989. – 384 с.
- [5] *Колесов, А.Ю.* Описание фазовой неустойчивости системы гармонических осцилляторов, слабо связанных через диффузию / *А.Ю. Колесов* // Докл. АН СССР. – 1988. – 200. 4. – С. 831–835.
- [6] *Кнут, Дональд.* Искусство программирования / *Д. Кнут*. – 3-е изд. – М.: 2002. – 2 т. – 720 с.
- [7] *Мун, Ф.* Хаотические колебания / *Ф. Мун*. – М.: Мир, 1990. – 311 с.

- [8] Холмс, П. Странные аттракторы и хаос в нелинейной механике / П. Холмс, Ф. Мун // Механика. Новое в зарубежной науке. Успехи прикладной механики. — М.: Мир, 1986. — Вып. 38. — С. 158–193.
- [9] Шильников, А.Л. Бифуркации и хаос в модели Мариока-Шимицу / А.Л. Шильников // Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. Горьк. ун-т. — Горький, 1988. — С. 130–138.
- [10] Goldberg, David. What every computer scientist should know about floating-point arithmetic / D. Goldberg // Computing Surveys, March 1991. Association for Computing Machinery, Inc.
- [11] Kernighan, Brian W. The ANSI C programming language / B.W. Kernighan, D.M. Ritchie. (2ed.) 281p
- [12] Lorenz, E.N. Deterministic Non-Periodic Flow / E.N. Lorenz // J. Atmos. Sci. 1963. 20. P. 130–141.
- [13] Sprott, J.C. Some simple chaotic flows / J.C. Sprott // Phys. Rev. 1994. — V. E50, №2. — P. 647–650.

Учебное издание

Базовые методы численного анализа
динамических систем

Методические указания

Составитель Глызин Дмитрий Сергеевич

Редактор, корректор И.В. Бунакова
Компьютерная верстка Д.С. Глызина

Подписано в печать 12.01.2009. Формат 60х84/16.

Бумага тип. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,5.

Тираж 50 экз. Заказ 003/09

Оригинал-макет подготовлен в редакционно-
издательском отделе ЯрГУ.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет
150000, Ярославль, ул. Советская, 14