

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра дискретного анализа

Дискретная математика

Методические указания

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по специальности
Прикладная информатика в экономике

Ярославль 2011

УДК 004+621
ББК В 174я73
Д 48

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензент
кафедра дискретного анализа
Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова

Дискретная математика: методические указания
Д 48 / сост.: В. Б. Калинин, А. В. Николаев; Яросл. гос. ун-т
им. П. Г. Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2011. – 48 с.

Настоящий практикум содержит набор задач по комбинаторике и теории графов, различных по сложности. К более трудным задачам даны указания. Это позволит эффективно использовать различные формы самостоятельной работы и поможет студентам хорошо подготовиться к зачету.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 080801.65 Прикладная информатика в экономике (дисциплина «Дискретная математика», блок ЕН), очной формы обучения.

УДК 004+621
ББК В 174я73

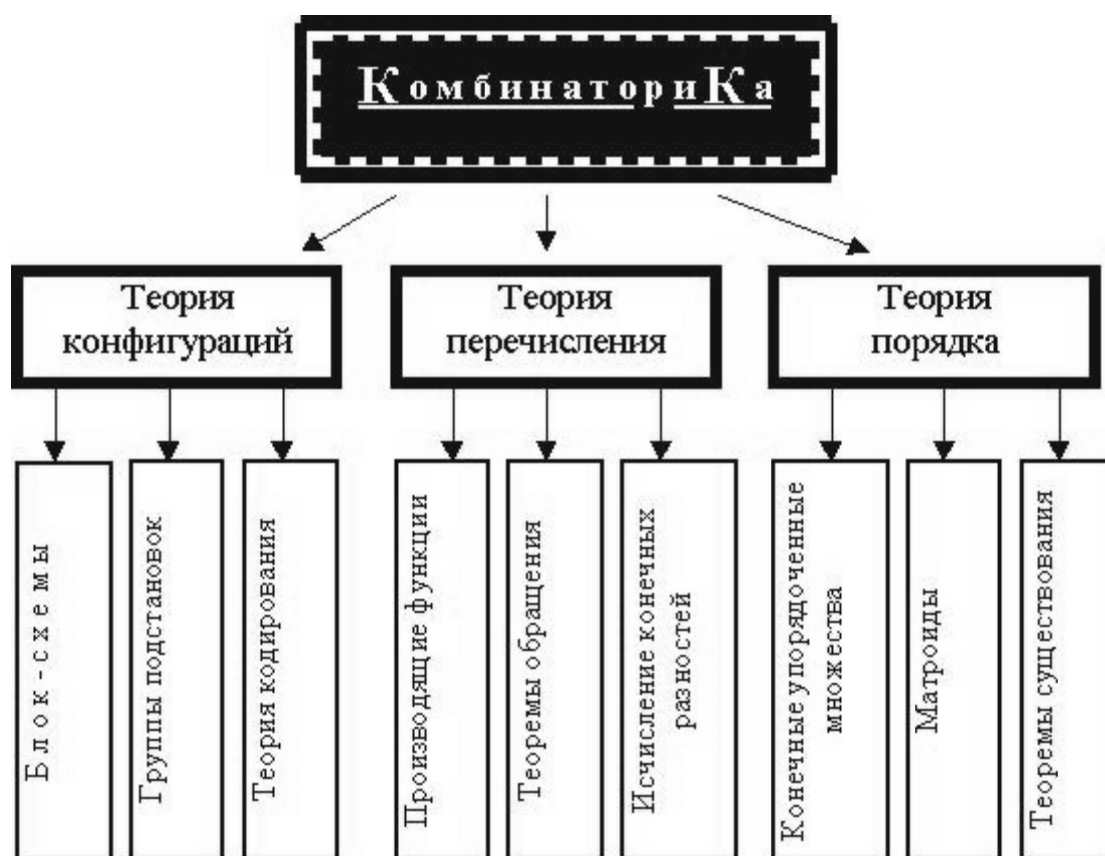
© Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова,
2011

Значительное место в дискретной математике занимает комбинаторика, которая является древнейшей и, возможно, ключевой ветвью математики. Всякому анализу предшествует комбинаторное рассмотрение, всякая серьёзная теория имеет комбинаторный аналог. Комбинаторика располагает столь многообразными методами, решает столь разнообразные задачи, что трудно чётко обозначить её границы. Условно в комбинаторной теории можно выделить следующие три большие части (см. схему):

Теорию конфигураций, включающую блок-схемы, группы подстановок, теорию кодирования.

Теорию перечисления, содержащую производящие функции, теоремы обращения и исчисление конечных разностей.

Теорию порядка, включающую конечные упорядоченные множества и решётки, матрицы и теоремы существования, подобные теоремам Холла и Рамсея.



Следует ещё раз подчеркнуть в высшей степени условный характер представленной схемы. Повсеместно можно наблюдать взаимную связь перечисленных разделов комбинаторики. Например, перечислительная комбинаторика рассматривает задачи, относящиеся и к конфигурациям, и к упорядоченным множествам.

Теория конфигураций и теория перечисления

Теория конфигураций – традиционный и наиболее разработанный раздел комбинаторики, она рассматривает задачи *выбора* и *расположения* элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Перечислительная комбинаторика основным методом исследования провозгласила метод производящих функций, используя который было доказано громадное число комбинаторных тождеств.

Элементарными комбинаторными конфигурациями являются сочетания, размещения, перестановки. Для подсчёта числа этих конфигураций используются правила суммы и произведения.

Правило суммы. Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B можно выбрать k способами, то выбор элемента A или B можно осуществить $m + k$ способами. Правило суммы можно перефразировать на теоретико-множественном языке. Обозначим через $|A|$ число элементов множества A , через $A \cup B$ – объединение множеств A и B , через $A \times B$ – декартово произведение множеств A и B . Тогда для непересекающихся множеств A и B выполняется равенство:

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Обобщением правила суммы является правило произведения.

Правило произведения. Если элемент A можно выбрать m способами, а после каждого выбора элемента A элемент B можно выбрать k способами, тогда упорядоченную пару элементов (A, B) можно выбрать $m \cdot k$ способами.

Правило произведения можно распространить на выбор последовательности (x_1, x_2, \dots, x_n) произвольной конечной длины n . На теоретико-множественном языке правило произведения формулируется так: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Размещения.

Назовём множество, содержащее n элементов, n -множеством.

Последовательность (x_1, x_2, \dots, x_k) длины k без повторяющихся элементов из элементов данного n -множества назовём k -размещением.

Обозначим символом A_n^k число размещений из n по k элементов (от фран. «arrangement» – размещение). Используя правило произведения, вычислим число A_n^k . Пусть произвольное размещение длины k имеет вид:

$$(x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Элемент x_1 можно выбрать n способами. После каждого выбора x_1 элемент x_2 можно выбрать $(n - 1)$ способами. После каждого выбора элементов x_1 и x_2 элемент x_3 можно выбрать $(n - 2)$ способами и т. д. После каждого выбора элементов x_1, x_2, \dots, x_{k-1} элемент x_k можно выбрать $(n - (k - 1)) = (n - k + 1)$ способами. Тогда, по правилу произведения, последовательность (x_1, x_2, \dots, x_k) можно выбрать числом способов, равным

$$n(n - 1)(n - 2) \dots (n - k + 1) = A_n^k \quad (1.1)$$

Произведение в левой части равенства (1.1) умножим и разделим на $(n - k)!$, получим:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n - k)!} \quad (1.2)$$

Если в формуле (1.2) $k = n$, то A_n^n есть число P_n перестановок из n элементов $P_n = n!$ (от «permutation» – перестановка).

Сочетания.

k -подмножество данного n -множества называется k -сочетанием.

Обозначим через C_n^k число k -сочетаний из данных n элементов. Формулу для числа C_n^k получим, рассуждая следующим образом. Если каждое сочетание упорядочить всеми возможными

способами, то получим все k -последовательностей из n элементов, без повторений, то есть все k -размещения. Иными словами, $C_n^k \cdot k! = A_n^k$

Откуда:
$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \quad (1.3)$$

или
$$C_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

Предполагая, что n и k – целые положительные числа и $0!=1$, сформулируем основные свойства сочетаний.

Основные свойства сочетаний.

Условились, что:

1. $C_n^0 = 1$.
2. $C_n^1 = n$.
3. $C_n^k = C_n^{n-k}$.
4. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$
5. $\sum_{i=0}^n C_n^i = 2^n$.

Сочетания и размещения широко используются при вычислении классической вероятности случайных событий.

В современной литературе наиболее употребителен для обозначения числа k -сочетаний из n элементов символ $\binom{n}{k}$, n называют верхним индексом, k – нижним индексом.

Сочетания имеют многочисленные интерпретации и приложения. Сочетания $\binom{n}{k}$ являются биномиальными коэффициентами в разложении бинома

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k \quad (1.4)$$

В этой интерпретации индексы могут принимать вещественные значения. Используя свойства биномиальных коэффициентов (при разных ограничениях на выбор верхних и нижних индексов), доказано громадное число комбинаторных тождеств, составивших самостоятельный раздел комбинаторной математики. В частности, из формулы 1.4 при $x = 1$, получим

$$2^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \text{ при } x = -1, n > 0, \text{ получим } 0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k, \text{ продифференцировав равенство 1.4, получим при } x = 1, n 2^{n-1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} k \text{ и т. д.}$$

Существует тесная связь между подмножествами множества и разложениями целого (положительного) числа. Разложение n есть представление числа n в виде упорядоченной суммы положительных целых чисел. Например, существует восемь разложений числа 4, а именно:

1+1+1+1 3+1
2+1+1 1+3
1+2+1 2+2
1+1+2 4

Если разложение \mathfrak{F} содержит в точности k слагаемых, то говорят, что \mathfrak{F} имеет k частей и называется k -разложением. Для k -разложения \mathfrak{F} числа n : $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ — определим $(k-1)$ -подмножество $\theta(\mathfrak{F})$, $(n-1)$ -множества $\{1, 2, \dots, n-1\}$, формулой.

$$\theta(\mathfrak{F}) = \{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}\} \quad (1.5)$$

Эта формула устанавливает биекцию между всеми k -разложениями числа n и $(k-1)$ -подмножествами $(n-1)$ -множества.

Следовательно, существует $\binom{n-1}{k-1}$ k -разложений числа n и 2^{n-1} разложений числа n . Биекцию θ часто схематично изображают строкой, состоящей из n точек и $k-1$ разделяющей вертикальной

черты. Точки разделились по k линейно упорядоченным «купе»; числа точек в «купе» соответствуют слагаемым в k -разложении числа n . Например, строка $\bullet | \bullet \bullet | \bullet | \bullet | \bullet \bullet \bullet | \bullet \bullet$ соответствует разложению $1+2+1+1+3+2$. Другая проблема, тесно связанная с разложениями, есть задача подсчёта числа $N(n,k)$ решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \quad (1.6)$$

Задачи

1. Для запирания сейфов и автоматических камер хранения применяют секретные замки, которые открываются лишь тогда, когда набрано некоторое «тайное слово». Это слово набирают с помощью одного или нескольких дисков, на которых нанесены буквы (или цифры). Пусть на диск нанесены 12 букв, а секретное слово состоит из 5 букв. Сколько неудачных попыток может быть сделано человеком, не знающим секретного слова?

2. Кодовый замок открывается при одновременном нажатии трех клавиш (цифры от 0 до 9). Сколько существует различных кодов?

3. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (то есть, чтобы какое-то число очков встречалось на обеих костях)?

4. Сколько слов, содержащих 6 букв, можно составить из 33 букв русского алфавита при условии, что любые две стоящие рядом буквы различны (например, слово «корова» допускается, а слово «колосс» нет).

5. Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова «здание»? А из слова «камзол»?

6. В группе из 16 детей 7 родились в Москве, 4 – в Санкт-Петербурге, 3 – в Киеве и 2 – в Минске. Сколькими способами можно выбрать из них 4 детей так, чтобы в группе были уроженцы всех 4 городов?

7. В премьер-лиге чемпионата России по футболу играют 16 команд. Разыгрываются медали трех достоинств: золотые,

серебряные и бронзовые. Сколькими способами они могут быть распределены?

8. На вершину горы ведут пять дорог. Сколькими способами турист может подняться на гору и потом спуститься с нее? Решите ту же задачу при дополнительном условии, что подъем и спуск происходят по разным дорогам.

9. Научное общество состоит из 25 человек. Надо выбрать президента общества, вице-президента, ученого секретаря и казначея. Сколькими способами может быть сделан этот выбор, если каждый член общества может занимать лишь один пост?

10. На шахматную доску надо поставить короля и ферзя. Сколькими способами это можно сделать, если короля надо поставить на белое поле, а ферзя – на черное? А если на цвет полей нет ограничений? А если обе фигуры надо поставить на белые поля?

11. Бросают игральную кость с 6 гранями и запускают волчок, имеющий 8 граней. Сколькими различными способами могут они упасть?

12. В купе железнодорожного вагона имеются два противоположных дивана по пять мест в каждом. Из 10 пассажиров четверо желают сидеть по движению поезда, трое – против движения, остальным трем безразлично, как сидеть. Сколькими способами могут разместиться пассажиры.

13. Сколькими способами можно выбрать на шахматной доске белое и черное поля, не лежащие на одной горизонтали или одной вертикали?

14. На ферме есть 20 овец и 24 свиньи (все разной упитанности). Сколькими способами можно выбрать одну овцу и одну свинью? Если такой выбор уже сделан, сколькими способами можно сделать его еще раз?

15. Сколькими способами можно расположить на шахматной доске 8 ладей, чтобы они не били друг друга?

16. Имеются пирожные 7 различных типов. Пирожные одного и того же типа считаем неразличимыми. Сколько существует различных способов покупки 12 пирожных?

17. На почте имеются марки 10-ти различных типов. Покупается 15 марок. Сколько существует различных способов покупки 15-ти марок?

18. На 6-ти карточках написаны буквы, из которых можно составить слово АНАНАС. Сколько существует различных шестибуквенных слов, которые можно составить при помощи этих 6-ти карточек?

19. На 10-ти карточках написаны буквы так, что из этих карточек можно составить слово МАТЕМАТИКА. Сколько существует различных 10-буквенных слов, которые можно образовать при помощи этих десяти карточек?

20. В букинистическом магазине лежат 6 разных изданий романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 издания его же романа «Дворянское гнездо» и 4 издания романа «Отцы и дети». Кроме того, есть 5 разных сборников, в каждом из которых есть романы «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 сборников с романами «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов? А если в магазине есть еще 3 сборника, содержащие романы «Рудин» и «Отцы и дети», и 5 книг, содержащих все три романа?

21. Из спортивного клуба, насчитывающего 30 членов, надо составить команду из 4 человек для участия в беге на 1000 м. Сколькими способами это можно сделать? А сколькими способами можно составить команду из 4 человек для участия в эстафете $100 + 200 + 400 + 800$?

22. Какое наибольшее число различных шаров можно построить в пространстве так, чтобы они касались трех данных плоскостей и данного шара?

23. Из 3 типов ручек, 7 типов карандашей и 7 типов ластиков надо выбрать ручку, карандаш и ластик. Сколькими способами это можно сделать.

24. Пять девушек и трое юношей играют в городки. Сколькими способами они могут разбиться на две команды по 4 человека, если в каждую команду должен входить хотя бы один юноша?

25. Из состава конференции, на которой присутствуют 52 человека, надо избрать президиум в составе 5 человек и делегацию в составе 3 человек. Сколькими способами может быть произведен выбор, если члены президиума могут войти в состав делегации? А если члены президиума не могут войти в состав делегации?

26. У одного человека есть 7 книг по математике, а у другого – 9 книг. Сколькими способами они могут обменять одну книгу одного на одну книгу другого? А 3 книги одного на 3 книги другого?

27. Имеется 26 монет. Одна из них фальшивая (по весу она тяжелее). За какое минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно ее определить?

28. Рота состоит из 3 офицеров, 6 сержантов и 60 рядовых. Сколькими способами можно выделить из них отряд, состоящий из офицера, двух сержантов и 20 рядовых? А если в отряд должны войти командир роты и старший по возрасту из сержантов?

29. На 9-ти карточках написано по одной цифре от 1 до 9 без повторений. Располагая любые 3 карточки в строку, мы получим трехзначное число. Сколько различных трехзначных чисел можно изобразить при помощи этих 9-ти карточек? Сколько различных пятизначных чисел можно изобразить, используя эти 9 карточек? Сколько различных девятизначных чисел можно изобразить с помощью этих 9-ти карточек?

30. У Миши 6 друзей и ежедневно в течение 20 дней он приглашает к себе в гости троих из них так, что компания ни разу не повторяется. Сколькими способами он может это сделать?

31. На сколько нулей оканчивается число $n!!!$

32. Сколько существует 5-значных телефонных номеров, у которых все цифры различны?

33. Сколько существует палиндромов длины n в языке с 26 буквами?

34. Имеется перестановка из 5 элементов: a_1, a_2, \dots, a_5 . Найти число всех перестановок из этих элементов, в каждой из которых на первом месте – не a_1 , а на втором не a_2 ?

Указание 1. Ответ представить в виде разности числа всех перестановок из пяти элементов и перестановок, не удовлетворяющих условию задачи.

Указание 2. Обратить внимание на то, что, вычитая перестановки, в которых на первом месте стоит a_1 , и перестановки, в которых на втором месте стоит a_2 , мы некоторые перестановки вычитаем дважды.

35. Сколько 8-значных чисел можно образовать из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если в каждом числе цифра 1 содержится 3 раза, а остальные цифры по одному разу?

36. Сколько можно составить перестановок из n элементов при условии, что данные m элементов не стоят рядом в любом порядке?

37. Сколькими способами можно переставить буквы слова «перешеек» так, чтобы четыре буквы «е» не шли подряд?

38. Сколькими способами можно переставить буквы слова «опоссум» так, чтобы буква «п» шла непосредственно после буквы «о»?

39. Сколькими способами можно переставить буквы слова «оборонеспособность» так, чтобы две буквы «о» не шли подряд?

40. Сколькими способами можно переставить буквы слова «каракули» так, чтобы никакие две гласные не стояли рядом?

41. Через каждую из трех данных точек на плоскости проведем по m прямых так, чтобы среди них не было двух, параллельных между собой, и трех, пересекающихся в одной точке (за естественным исключением трех прямых одного пучка). Найдите число точек пересечения этих прямых (не считая трех данных).

42. Сколько шестизначных чисел содержат ровно три различные цифры?

43. В составлении 40 задач принимало участие 30 студентов со всех пяти курсов. Любые два студента с одного курса придумали поровну задач, а любые два студента с разных курсов – разное число задач. Сколько человек придумало одну задачу?

44. Сколько имеется шестизначных чисел, у которых сумма цифр четна (допускаются лишь шестизначные числа, первая

цифра которых отлична от 0)? А если берут все числа от 1 до 999 999?

45. Сколько существует пятизначных чисел? Во скольких из них все цифры четны? Во скольких все цифры нечетны? Во сколько не входят цифры, меньшие шести? Во скольких нет цифр, больших трех?

46. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы написать все числа от 1 до 999 999 включительно? А от 1 до $10^n - 1$ включительно?

47. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5.

48. Сколько существует пятизначных четных чисел, в которых ни одна цифра не повторяется?

49. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором зубов. Какова может быть наибольшая численность населения этого государства, если во рту человека может быть не более 32 зубов?

50. Доказать, что $\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$ — целое число, если $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ ($n_i \geq 0$ целые числа).

51. Сколькими различными способами можно усадить за круглый стол n человек, если 2 способа считаются одинаковыми, когда любой человек имеет тех же соседей (левый и правый не различаются).

Указание 1. Если все одновременно сдвинутся на 1 стул в одном направлении, то у каждого останутся те же самые соседи.

Указание 2. Так как соседи справа и слева неразличимы, то можно любого сидящего оставить на месте, а остальных пересадить на места, симметричные относительно того, кто остался на своем месте.

52. Сколькими способами 5 юношей могут познакомиться с 4-мя девушками, если каждая девушка знакомится ровно с 1 юношей?

53. Какое наибольшее число слонов можно расставить на шахматной доске, чтобы они не били друг друга? Доказать, что число способов такой расстановки есть квадрат некоторого числа.

54. Дана последовательность чисел $1, 2, 3, \dots, 2n$. Сколькими способами можно извлечь из нее три числа, из которых можно построить арифметическую прогрессию? То же самое для последовательности чисел $1, 2, 3, \dots, 2n + 1$.

55. Найдите количество троек различных натуральных чисел, не превосходящих 100, из которых можно построить геометрическую прогрессию.

56. Окна дома, обращенные к морю, расположены в узлах прямоугольной сетки с m горизонталями (этажами) и n вертикалями. Сколько сигналов можно передать находящемуся в море кораблю, освещая некоторые из окон дома, если в темноте нельзя различить положение освещенных окон относительно дома?

57. У меня есть шесть друзей. За некоторое время каждый из них был у меня на обеде 7 раз, каждые двое встретились у меня на обеде 5 раз, каждые трое – 4 раза, каждые четверо – 3 раза, с каждым из пяти я обедал 2 раза, со всеми шестью – 1 раз, каждый друг отсутствовал у меня на обеде 8 раз. Сколько раз я обедал один? Сколько было обедов за это время?

58. Сколько двузначных чисел в сумме с числом, записанным теми же цифрами, но в обратном порядке, даст полный квадрат?

59. Из числа $12345678910111213\dots9899100$ вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число было: а) наибольшим, б) наименьшим (записи, начинающиеся с нуля, недопустимы).

60. Можно ли расставить 9 чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ по кругу так, чтобы сумма любых трех чисел, стоящих подряд, делилась на 3 и была: а) больше 9; б) больше 15?

61. а) Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. Во скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Ровно 1 туз? Не менее двух тузов? Ровно два туза?

б) Сколькими способами можно выбрать из полной колоды, содержащей 52 карты, 6 карт так, чтобы среди них были все четыре масти?

62. В премьер-лиге чемпионата России по футболу играют 16 команд. Назовем два исхода чемпионата совпадающими в главном, если при этих исходах совпадают обладатели золотых, серебряных и бронзовых медалей, а также три команды, поки-

дающих премьер-лигу. Найти число различных в главном исходе первенства.

63. Сколько можно сделать перестановок из n элементов, в которых элементы a и b не стоят рядом?

64. В урне находятся 10 белых, 15 черных и 20 красных шаров. Из урны наудачу берут 9 шаров. Найти сколькими различными способами можно:

- а) выбрать 9 шаров;
- б) взять 9 шаров, среди которых 6 белых и 3 черных;
- в) взять 9 шаров, среди которых 2 белых, 3 черных и 4 красных шара.

65. В клубе суеверных велосипедистов не любят цифру восемь, особенно в номерах своих членских билетов. Сколько членов состоит в клубе, если известно, что использованы все трехзначные номера, не содержащие ни одной восьмерки? (Например, 000 использован, а 836 нет.)

66. Семь девушек водят хоровод. Сколькими различными способами они могут встать в круг?

67. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать шесть карт, содержащих три туза?

68. Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать шесть карт, содержащих хотя бы одного туза?

69. Сколькими способами можно разложить на два кармана 9 монет различного достоинства?

70. На окружности отмечено n точек. Сколько существует различных многоугольников (необязательно выпуклых), вписанных в эту окружность, вершинами которых служат данные точки? А сколько выпуклых многоугольников?

71. а) Сколько существует треугольников, вершины которых совпадают с вершинами данного выпуклого n -угольника, но стороны не совпадают со сторонами этого n -угольника?

б) Найдите число всех выпуклых k -угольников, вершинами которых служат k из n вершин выпуклого n -угольника, причем каждые две соседние вершины k -угольника должны быть разделены, по меньшей мере, s вершинами n -угольника.

72. Сколькими способами можно представить натурально число n в виде суммы двух натуральных слагаемых? (Рассмотреть случаи, когда порядок слагаемых важен и когда не важен).

73. Экскурсантаы на пароходе заказали 8 четырехместных кают. Все места в каждой из кают и все каюты равноценны. Сколькими способами могут экскурсантаы разместиться в каютах, если их 32 человека?

74. Сколькими способами можно поставить на доску две шашки – белую и черную, так, чтобы белая шашка могла бить черную?

75. Сколькими способами можно переставлять буквы в слове «фацетия» так, чтобы не менялся порядок гласных букв? А в слове «параллелизм»?

76. Сколькими способами можно переставить буквы слова «пастух» так, чтобы между двумя гласными были две согласные буквы?

77. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «логарифм» так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

78. а) Сколькими способами можно переставить буквы слова «огород» так, чтобы три буквы «о» не стояли рядом?

б) а если запрещается, чтобы две буквы «о» стояли рядом?

79. Сколькими способами можно переставить буквы в слове «тик-так» так, чтобы две одинаковые буквы не стояли рядом? А в слове «космос»? В слове «тартар»?

80. У Паши 7 друзей. В течение недели он приглашает их к себе по 3 обедать, причем компании не повторяются. Сколькими способами он может составить расписание обедов так, чтобы:

а) никакие два друга не встретились у него более одного раза:

б) никто не остался неприглашенным;

в) ни один из друзей не посещал его каждый день?

81. В прошлые века процветала так называемая генуэзская лотерея, сохранившаяся в некоторых странах до сих пор. Суть ее заключалась в следующем. Участники лотереи покупали билеты, на которых стояли числа от 1 до 90. Можно было купить билет, содержащий от 1 до 5 чисел. В день розыгрыша лотереи из мешка, содержащего жетоны с числами, вынимали пять жетонов.

Выигрывали те, у кого все числа на билете были среди извлеченных. Если участник лотереи покупал билет с одним числом, то в случае выигрыша получал в 15 раз больше стоимости билета, если с двумя числами (амбо), то в 270 раз больше, с тремя (терн) – в 5 500 раз больше, с четырьмя (катерн) – в 75 000 раз больше, а если с пятью числами (квин), то в 1 000 000 раз больше, чем стоимость билета. Многие люди пытались обогатиться, но мало кому это удавалось. Докажите, что по правилам лотереи в выигрыше всегда оставались ее организаторы.

82. У мужа 12 знакомых – 5 женщин и 7 мужчин, а у жены – 7 женщин и 5 мужчин (иные, чем у мужа). Сколькими способами можно составить компанию из 6 мужчин и 6 женщин так, чтобы 6 человек пригласил муж и 6 – жена?

83. На каждом борту лодки у весел должны сидеть по 4 человека. Сколькими способами можно выбрать команду для этой лодки, если есть 31 кандидат, причем 10 человек хотят сидеть на левом борту лодки, 12 – на правом, а для 9 безразлично, где сидеть?

84. Сколько различных десятизначных чисел можно написать, пользуясь лишь цифрами 1, 2, 3, при дополнительном условии, что цифра 3 используется в каждом числе ровно два раза? Сколько из написанных чисел делится на 9?

85. Оргкомитет олимпиады состоит из 11 человек. Материалы олимпиады хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена оргкомитета, чтобы доступ в сейф был возможен, когда соберутся любые 6 членов оргкомитета, и не был возможен, если соберутся меньше 6 членов?

86. а) Сколькими различными способами можно выбрать несколько букв из фразы «Око за око, зуб за зуб»? Порядок букв не учитывается.

б) Сколькими способами можно выбрать из той же фразы три буквы?

в) Сколькими способами можно выбрать из этой фразы три буквы, если учитывать порядок выбранных букв?

87. На плоскости даны 5 точек, причем среди прямых, соединяющих эти точки, нет параллельных, перпендикулярных или совпадающих. Проводим через каждую из 5 точек перпен-

дикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя другие точки. Каково максимальное число точек пересечения между собой этих перпендикуляров, не считая данные 5 точек?

88. Найдите количество шестизначных чисел, таких, что сумма трехзначного числа, образованного первыми тремя цифрами, и трехзначного числа, образованного последними тремя цифрами, меньше 1000.

89. Сколькими способами можно переставить буквы слова «кофеварка» так, чтобы гласные и согласные буквы чередовались? А в слове «самовар»?

90. Сколькими способами можно выбрать из слова «логарифм» две согласных и одну гласную букву? А если среди выбранных букв должна быть буква «ф»?

91. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «пастухи» так, чтобы и гласные, и согласные шли в алфавитном порядке?

92. Сколькими способами можно переставлять буквы слова «Абакан» так, чтобы согласные шли в алфавитном порядке? То же самое при дополнительном условии, что две буквы «а» не идут подряд.

93. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 20 два числа так, чтобы их сумма была нечетной? А четной?

94. Сколькими способами можно выбрать из натуральных чисел от 1 до 30 три натуральных числа так, чтобы их сумма была четной?

95. Из колоды в 52 карты двое выбирают по 4 карты каждый. Сколько возможно различных выборов? Во скольких случаях один из них получит четыре туза, а другой – четыре короля?

96. Два экзаменатора, работая одновременно, экзаменуют группу в 12 человек по двум предметам (каждый по своему). Каждый экзаменуемый отвечает по 5 минут по каждому предмету. Сколькими способами могут экзаменаторы распределить между собой работу с учетом того, что экзаменуемый не может отвечать сразу по двум предметам?

97. Клетки шахматной доски раскрашиваются в 8 цветов так, что в каждом горизонтальном ряду встречаются все 8 цветов, а в

каждом вертикальном ряду не встречаются подряд две клетки одного цвета. Сколькими способами возможна такая раскраска?

98. В научно-исследовательском институте работают 67 человек. Из них 47 знают английский язык, 35 – немецкий язык и 23 – оба языка. Сколько человек в институте не знают ни английского, ни немецкого языка?

99. На загородную прогулку поехали 92 человека. Бутерброды с колбасой взяли 47 человек, с сыром – 38 человек, с ветчиной – 42, с сыром и колбасой – 28 человек, с сыром и с ветчиной – 31 человек, с колбасой и ветчиной – 26 человек, все три вида бутербродов взяли 25 человек. А сколько человек вместо бутербродов взяли пирожки?

100. Староста одного класса дал следующие сведения об учениках: «В классе учатся 45 школьников, в том числе 25 мальчиков. 30 школьников учатся на хорошо и отлично, в том числе 16 мальчиков. Спортом занимаются 28 учеников, в том числе 18 мальчиков и 17 школьников, учащихся на хорошо и отлично. 15 мальчиков учатся на хорошо и отлично и в то же время занимаются спортом».

Через несколько дней старосту вызвал к себе классный руководитель, который (как назло) вел математику и сказал, что в сведениях есть ошибка. Попробуйте выяснить, как он это узнал.

101. Укротитель хищных зверей собирается вывести на арену цирка 5 львов и 4 тигров; при этом нельзя, чтобы два тигра шли друг за другом. Сколькими способами он может расположить зверей?

102. На книжной полке стоят 12 книг. Сколькими способами можно из них выбрать 5 книг так, чтобы никакие две из них не стояли рядом?

103. За круглым столом короля Артура сидят 12 рыцарей. Из них каждый враждует со своими соседями. Надо выбрать 5 рыцарей, чтобы освободить заколдованную принцессу. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы среди выбранных рыцарей не было врагов?

104. Почтальон перепутал 5 писем и положил их в абонентские ящики случайным образом. Подсчитайте, во скольких слу-

чаях он создал бы полную путаницу и никто не получил своего письма.

105. По пустыне идет караван из 9 верблюдов. Путешествие длится много дней, и наконец, всем надоедает видеть впереди себя одного и того же верблюда. Сколькими способами можно переставить верблюдов так, чтобы впереди каждого верблюда шел другой, чем раньше?

106. Сколькими способами можно расставить в ряд 6 англичан, 7 французов и 10 турок так, чтобы каждый англичанин стоял между французом и турком, но никакие француз и турок не стояли рядом? Решите ту же задачу для 5 англичан, 7 французов и 10 турок.

107. Сколькими способами можно построить $2n$ человек в две равных шеренги, чтобы в каждой шеренге они стояли по росту, причем каждый человек в первой шеренге был выше стоящего за ним человека во второй шеренге?

108. Две девушки собрали 10 ромашек, 15 васильков и 14 незабудок. Сколькими способами они могут разделить эти цветы, чтобы обе получили не менее трех цветов каждого вида.

109. Сколькими способами можно разделить 10 белых грибов, 15 подберезовиков и 8 подосиновиков между четверьмя ребятами, чтобы каждому досталось хотя бы по одному грибу каждого сорта?

110. Сколькими способами можно раздать колоду в 52 карты 13 игрокам по 4 карты каждому игроку? Решите ту же задачу при условии, что каждый должен получить по одной карте каждой масти. Решите ту же задачу при условии, что один игрок имеет карты всех четырех мастей, а остальные – карты одной масти.

111. В лифт вошли 8 человек. Сколькими способами они могут выйти на 4-х этажах так, чтобы на каждом этаже вышел хотя бы один человек?

112. Поступающий в высшее учебное заведение должен сдать четыре экзамена. Абитуриент полагает, что для поступления будет достаточно набрать 17 баллов. Сколькими способами он может сдать экзамены, чтобы наверняка поступить в вуз (при условии, что двоек получать нельзя)?

113. Сколькими способами можно составить вес в 78 г, пользуясь восьмью разновесками в 1, 1, 2, 5, 10, 10, 20, 50 г? При этом считается, что применение двух различных разновесок, хотя бы и имеющих одинаковый вес, дает различные комбинации.

114. Сколькими способами можно получить по восьми разным предметам оценки 3, 4 или 5 так, чтобы их сумма равнялась 30?

115. Сколькими способами можно составить 6 «слов» из всех 32 букв, если в совокупности этих 6 слов каждая буква используется один и только один раз?

116. Компания, состоящая из 10 супружеских пар, делится на 5 групп по 4 человека для лодочной прогулки так, чтобы в каждой лодке оказались двое мужчин и две женщины.

а) Сколькими способами можно их разделить?

б) Во скольких случаях данный мужчина окажется в одной лодке со своей женой?

в) Во скольких случаях данные двое мужчин окажутся каждый в одной лодке со своей женой?

117. Сколькими способами можно расставить 12 белых и 12 черных шашек на черные поля доски так, чтобы:

а) это положение было симметрично относительно центра доски;

б) при симметрии относительно центра доски цвета всех шашек менялись?

118. Горизонтالي шахматной доски обозначаются обычно цифрами от 1 до 8, а вертикали — буквами от а до h. Занумеруем по вертикали числами от 1 до 8, причем в произвольном порядке. Теперь напишем на каждом поле произведение чисел, означающих соответствующие горизонталь и вертикаль, и расставим произвольным образом 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Найдите произведение чисел, закрытых этими ладьями.

119. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске двух коней — белого и черного, так, чтобы они не били друг друга?

120. Поставьте на шахматную доску 5 ферзей так, чтобы они держали под ударом все ее поля.

121. Поставьте на шахматную доску 8 фигур (короля, ферзя, двух ладей, двух слонов, двух коней) так, чтобы они держали под ударом наибольшее число полей.

122. Какое наименьшее число слонов надо поставить на шахматную доску, чтобы они держали под боем каждое поле доски и каждый слон был защищен другим?

123. Расставьте на шахматной доске наименьшее число ладей так, чтобы каждое поле было бито, по крайней мере, два раза. Решите задачу в двух вариантах:

а) считая, что ладья не бьет полей, заслоненных от нее другими ладьями;

б) считая, что она бьет такие поля.

124. Какое наименьшее число коней нужно расставить на шахматной доске, чтобы все поля были под ударом (поле, где стоит конь, считается под ударом)?

125. На плоскости проведены n прямых так, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей делится плоскость?

126. 1000 точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено еще 500 точек так, что никакие три из этих 1500 точек не лежат на одной прямой. Данный тысячеугольник разрезан на треугольники так, что все указанные 1500 точек являются вершинами треугольников и никаких других вершин эти треугольники не имеют. Сколько получится треугольников при таком разрезании? А если дан n -угольник и внутри m точек?

127. а) На сколько частей делят плоскость n прямых линий, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну и ту же точку?

б) На сколько частей делят пространство n плоскостей, из которых никакие 4 не содержат одну и ту же точку, никакие 3 не содержат одну и ту же прямую и никакие 2 не параллельны?

128. а) На сколько областей делят плоскость n окружностей, каждые две из которых пересекаются и никакие три из которых не проходят через одну и ту же точку?

б) На сколько областей делят пространство n попарно пересекающихся сфер, из которых никакие 4 не проходят через одну и ту же точку и никакие 3 – через одну и ту же окружность?

129. Можно ли представить число 1958 в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел? А 2004? 2005?

130. Пять человек играют несколько партий в домино (двое на двое), причем каждый играющий играет с каждым один раз в паре и два раза – в качестве противников. Найдите количество сыгранных партий и все способы распределения играющих.

131. В выражении $(1+x)^{56}$ раскрыты скобки и приведены подобные слагаемые. Найти коэффициенты при x^{12} и x^{48} .

132. Что больше: $99^{50} + 100^{50}$ или 101^{50} ?

133. На плоскости проведены m параллельных прямых и n прямых, пересекающих их и друг друга. Никакие три не проходят через одну точку. На сколько частей они разбивают плоскость?

134. В начале координат находится частица. Через 1 секунду она распадается на две частицы, одна сдвигается на единицу длины влево, а другая — вправо. Этот процесс повторяется через каждую секунду, причем две частицы, оказавшиеся в одной точке, взаимно уничтожаются (так что, например, через две секунды остается две частицы). Сколько частиц будет через 129 секунд? Через n секунд?

135. Сеть метро имеет на каждой линии не менее 4 станций, из них не более 3 пересадочных. Ни на какой пересадочной станции не пересекается более двух линий. Какое наибольшее число станций может иметь такая сеть, если с любой станции можно проехать на любую другую, сделав не более двух пересадок?

136. Можно ли проложить в городе 10 автобусных маршрутов и установить на них остановки так, что какие бы 8 маршрутов ни были взяты, найдется остановка, не принадлежащая ни одному из этих маршрутов, а любые 9 маршрутов проходят через все остановки?

137. Сторона куба равна 3 см. Найдите наименьшее количество распилов, которые нужно сделать, чтобы распилить его на 27 кубиков со стороной 1 см (части куба после распиливания можно перекладывать).

138. В коробке находятся 50 деталей, из которых 10 бракованных. Из коробки наудачу берут 5 деталей. Найти число различ-

ных способов взятия 5 деталей, среди которых ровно 3 бракованных.

139. На корабле имеется 7 флажков семи основных цветов. Для передачи команды на другой корабль на мачту поднимают k ($1 < k < 7$) флажков. Эти флажки располагают по вертикали сверху вниз. Каждому способу расположения k таких флажков соответствует свое слово – своя команда, различным способам расположения k флажков соответствуют разные слова-команды.

Сколько существует различных команд, которые можно передать при помощи k флажков? Сколько существует различных команд, которые можно передать этими флажками?

140. Найти сумму:

$$C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n.$$

141. Сколько можно образовать 7-значных чисел из цифр 1, 2, ..., 8 с тем, чтобы цифра 2 входила в каждое число не менее чем 3 раза?

142. Пусть p_1, p_2, \dots, p_n – различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$, включая 1 и q ?

143. Каким числом способов можно разделить колоду из 36 карт пополам так, чтобы в первой и во второй пачке было по 2 туза?

144. В вещевой лотерее разыгрывается 8 предметов. Первый человек вынимает из урны 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы: а) было ровно два выигрыша; б) по крайней мере два выигрыша. Всего билетов 50.

145. Даны $2n$ элементов. Рассматриваются всевозможные разбиения их на пары, причем их разбиения, отличающиеся только порядком элементов внутри пар и порядком расположения пар, считаются совпадающими. Сколько таких разбиений?

146. Сколькими способами можно выбрать 3 пары из n шахматистов?

147. Из колоды в 36 карт наудачу без возвращения вынимают по одной карте 3 раза. Сколько существует различных способов получения 3-х карт, среди которых на первых двух местах – бубна, а на третьем – пика?

148. На полке наудачу располагаются 10 книг: а) сколько существует различных способов расположения 10-ти книг? б) сколько существует различных способов расположения 10-ти книг, при которых 2 заранее помеченные книги окажутся рядом? в) сколько существует различных способов расположения 10-ти книг, при которых 3 заранее помеченные книги окажутся рядом?

149. В кондитерском магазине продавались четыре сорта пирожных: наполеоны, эклеры, песочные и слоеные. Сколькими способами можно купить семь пирожных?

150. За круглый стол садятся n мужчин и n женщин. Два лица одного пола не могут сидеть рядом. Сколькими способами можно их рассадить?

151. Группа из 41 студентов успешно сдала сессию из трех экзаменов. Возможные оценки – 3, 4, 5. Доказать, что по крайней мере 5 студентов сдали сессию с одинаковыми оценками.

152. Сколько существует n -значных чисел, у которых сумма цифр равна k ($k \leq 9$) ?

153. Сколько существует n -значных натуральных чисел, у которых цифры располагаются в неубывающем порядке?

154. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49): ровно k номеров ($k = 1, 2, \dots, 6$)?

155. Какова вероятность, купив один билет, угадать в спортлото (из 49) хотя бы k номеров?

156. Доказать, что $\sum \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!} = k^n$, где суммирование ведется по всем упорядоченным разбиениям n на k слагаемых $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$.

157. Доказать с помощью комбинаторных рассуждений тождество:

$$\sum_{k=0}^n C_n^k (m-1)^{n-k} = m^n$$

158. Сколько существует чисел от 0 до 10^n , в которые не входит две идущие друг за другом одинаковые цифры?

159. Сколькими способами можно выбрать 6 карт из 52 так, чтобы были карты каждой масти?

160. Доказать, что произведение последовательных натуральных k чисел делится на $k!$

161. Доказать, что число последовательностей длины n с элементами из k -элементного множества, содержащих каждый элемент этого множества по крайней мере 1 раз, равно $k!S(n, k)$.

162. Доказать, что число бинарных последовательностей длины n , не содержащих единиц ни в каких двух соседних позициях, равно числу Фибоначчи F_{n+1} .

163. Найти производящую функцию следующей последовательности:

$$f(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, \dots, N \\ 0, & n > N \end{cases}$$

Найти производящие функции:

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ \alpha^n / n!, & n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$f(n) = \begin{cases} n+1, & n = 0, 1, \dots, N \\ 0, & n \geq N+1 \end{cases}$$

165. Доказать, что $nC_{n-1}^{k-1} = kC_n^k$.

166. Доказать, что $C_{n+1}^k = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2} + \dots + C_{n-k}^0$.

167. Каких чисел больше среди первого миллиона: тех, в записи которых есть 1 или где ее нет?

168. Доказать, что $(3n)!$ делится на $(n!)$ без остатка.

169. Сколькими способами n -элементное множество делится на два непустых подмножества?

170. Доказать, что в треугольнике Паскаля сумма чисел, стоящих в $n+1$ строке, равна 2^n .

171. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

172. Найти количество 6-значных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна четная цифра.

173. Сколько существует бинарных симметрических матриц порядка n ?

174. 50 человек пришли на банкет. Найти вероятность того, что обратно хотя бы один из них уйдет в своей шляпе (подразумевается, что банкет удался и шляпы будут разбираться случайным образом).

175. Определить число различных бинарных квадратных матриц порядка n , содержащих в каждой из первых m строк по r единиц, а в каждой из остальных строк по q единиц.

176. Определить число различных бинарных квадратных матриц порядка n , в каждой строке и в каждом столбце которых стоит по одной единице.

177. Из чисел от 1 до n составлены всевозможные произведения, состоящие из k различных сомножителей (k фиксировано). Сколько полученных произведений делится на простое число $p \leq n$?

178. При условии, что никакие три диагонали выпуклого n -угольника ($n \leq 5$) не пересекаются в одной точке, найти число отрезков, на которые разбиваются диагонали точками пересечения.

179. На плоскости даны пять точек. Среди прямых, соединяющих эти точки, нет параллельных, перпендикулярных и совпадающих. Проводим через каждую точку перпендикуляры ко всем прямым, которые можно построить, соединяя попарно остальные четыре точки. Каково максимальное число точек пересечения этих перпендикуляров между собой, не считая данных пяти точек?

180. На окружности дано n точек и проведены всевозможные хорды, соединяющие эти точки. Известно, что никакие три из проведенных хорд не пересекаются в одной точке. На сколько частей разбивается круг?

181. В розыгрыше первенства страны по футболу участвуют 20 команд. Какое наименьшее число игр должно быть сыграно, чтобы среди любых трех команд нашлись две, уже игравшие между собой?

182. На шахматную доску произвольным образом поставили две ладьи (черную и белую). Что вероятнее: эти ладьи могут побить друг друга или нет?

183. Шахматная доска размером 6×6 покрыта 18 костями домино размером 2×1 (таким образом, что каждая кость покрывает две клетки). Доказать, что при любом таком покрытии доску можно разрезать на две части по горизонтальной или вертикальной прямой, не повредив ни одной кости домино.

184. Клетки шахматной доски занумерованы по порядку числами от 1 до 64: первый горизонтальный ряд слева направо — числами от 1 до 8, второй горизонтальный ряд слева направо — числами от 9 до 16 и т. д. На доске расставлены 8 ладей так, чтобы они не били друг друга. Какое значение может принимать сумма номеров клеток, на которых стоят ладьи?

185. В каждой клетке шахматной доски размером $n \times n$ поставили число, указывающее количество прямоугольников, в которые входит эта клетка. Чему равна сумма всех поставленных чисел?

186. Доказать, что из любых пяти грибов, растущих в лесу и не расположенных на одной прямой, всегда можно найти четыре таких, которые служат вершинами выпуклого четырехугольника.

187. В городе N живет человек, совершающий ежедневно прогулку и проходящий при этом путь длины n . Расстояние между соседними перекрестками равно 1. Этот человек никогда не движется на северо-запад или северо-восток. На каждом перекрестке он с вероятностью $1/2$ поворачивает или на юго-восток, или на юго-запад. Если путь начинается в точке A , то какова вероятность этому человеку в конце прогулки попасть в k -й перекресток n -го ряда?

188. Доказать, что вероятность попасть в четные перекрестки n -го ряда равна вероятности попасть в нечетные перекрестки n -го ряда (см предыдущую задачу). Какое свойство сочетаний C_n^k из этого следует?

189. В уравнении $ax = b$ параметры a и b выбираются наудачу соответственно из сегментов $1 < a < m$, $1 < b < n$. Какова вероятность того, что корень этого уравнения будет больше 1, при условии, что m , n , a , b — натуральные числа?

190. (m, n) — точка с целыми неотрицательными координатами m и n . Найти число различных путей длины $m+n$, ведущих из начала координат в точку (m, n) и состоящих из отрезков, параллельных осям координат, при условии, что концами отрезков служат точки с целочисленными координатами.

Задачи с решениями

191. Пете на день рождения подарили 7 новых дисков с играми, а Вале папа привез 9 дисков из командировки. Сколькими способами они могут обменять 4 любых диска одного на 4 диска другого?

Вычислим, сколько четверок из 7 дисков можно составить у Пети: $C_7^4=35$, число четверок у Вали из 9 дисков – $C_9^4=126$. По правилу умножения находим число обменов: $35 \times 126 = 4410$.

192. Войсковое подразделение состоит из 5 офицеров, 8 сержантов и 70 рядовых. Сколькими способами можно выделить отряд из 2 офицеров, 4 сержантов и 15 рядовых?

Из 5 офицеров выбрать 2 можно с помощью числа сочетаний $C_5^2=10$ способами, из 8 сержантов 4 – $C_8^4=70$, из 70 рядовых 15 – C_{70}^{15} . По правилу умножения находим число выбора отряда: $10 \times 70 \times C_{70}^{15} = 700 \times C_{70}^{15}$.

193. В ювелирную мастерскую привезли 6 изумрудов, 9 алмазов и 7 сапфиров. Ювелиру заказали браслет, в котором 3 изумруда, 5 алмазов и 2 сапфиров. Сколькими способами он может выбрать камни на браслет?

Из 6 изумрудов 3 он может выбрать $C_6^3=20$ способами, из 9 алмазов 5 – $C_9^5=126$, из 7 сапфиров 2 – $C_7^2=21$. По правилу умножения находим число вариантов: $20 \times 126 \times 21 = 52920$.

194. На выборах победили 9 человек – Сафонов, Нестеров, Петров, Кулаков, Мишин, Гусев, Володин, Афонин, Титов. Из них нужно выбрать председателя, заместителя и профорга. Сколькими способами это можно сделать?

Здесь речь идет о размещении: $A_9^3 = \frac{9!}{(9-3)!} = \frac{9!}{6!} = 504$.

Можно было решать по-другому. На должность председателя выбираем из 9 человек, на заместителя – из 8, на профорга – из 7. По правилу умножения получаем: $9 \times 8 \times 7 = 504$.

195. В районе построили новую школу. Из пришедших 25 человек нужно выбрать директора школы, завуча начальной школы, завуча среднего звена и завуча по воспитательной работе. Сколькими способами это можно сделать?

На должность директора выбираем из 25 человек, на завуча начальной – из 24, завуча среднего звена – из 23, завуча по воспитательной работе – 22. По правилу умножения получаем: $25 \times 24 \times 23 \times 22 = 303600$. Или, зная формулу размещения, получаем: $A_{25}^4 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = 303600$.

196. В студенческом общежитии в одной комнате живут трое студентов Петя, Вася и Коля. У них есть 6 чашек, 8 блюд и 10 чайных ложек (все принадлежности отличаются друг от друга). Сколькими способами ребята могут накрыть стол для чаепития (так, что каждый получит чашку, блюдо и ложку)?

Для Пети набор можно набрать $6 \times 8 \times 10 = 480$ способами, для Васи – $5 \times 7 \times 9 = 315$, для Коли – $4 \times 6 \times 8 = 192$. По правилу умножения получаем: $480 \times 315 \times 192 = 29030400$ способами.

197. В кабинете заведующего ювелирного магазина имеется код, состоящий из двух различных гласных букв русского алфавита, за которой следуют 3 различные цифры. Сколько вариантов придется перебрать мошеннику, чтобы раздобыть драгоценности, которые там хранятся?

В русском языке 9 гласных букв – а, е, е, и, о, у, э, ю, я. Выбрать из них 2 можно $C_9^2 = 36$ способами. Из 10 цифр выбрать 3 можно $C_{10}^3 = 120$ способами. Применяя правило умножения, получаем: $36 \times 120 = 4320$.

198. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из полос разной ширины, если имеются материи из 8 тканей?

Эта задача на размещение $A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 336$.

Другой способ решения: 1 цвет выбирается из 8 тканей 8 способами, 2 цвет выбирается 7 способами, 3 цвет – 6 способами.

Используя правило умножения, получаем: $8 \times 7 \times 6 = 336$ способов.

199. В 9 классе 15 предметов. Завучу школы нужно составить расписание на субботу, если в этот день 5 уроков. Сколько различных вариантов расписания можно составить, если все уроки различные?

Из 15 предметов 5 любых можно выбрать

$$C_{15}^5 = \frac{15!}{5!(15-5)!} = \frac{15!}{5!10!} = 3003.$$

200. В огороде у бабушки растут 3 белые, 2 алые и 4 чайные розы. Сколькими различными способами можно составить букет из трех роз разного цвета?

Обозначим белые – Б1, Б2, Б3, алые – А1, А2, чайные – Ч1, Ч2, Ч3, Ч4. Перечислим возможные варианты:

Б1-А1-Ч1, Б1-А1-Ч2, Б1-А1-Ч3, Б1-А1-Ч4, Б1-А2-Ч1, Б1-А2-Ч2, Б1-А2-Ч3, Б1-А2-Ч4.

Б2- А1-Ч1, Б2-А1-Ч2, Б2-А1-Ч3, Б2-А1-Ч4, Б2-А2-Ч1, Б2-А2-Ч2, Б2-А2-Ч3, Б2-А2-Ч4.

Б3-А1-Ч1, Б3-А1-Ч2, Б3-А1-Ч3, Б3-А1-Ч4, Б3-А2-Ч1, Б3-А2-Ч2, Б3-А2-Ч3, Б3-А2-Ч4.

Ответ: 24 варианта.

1. Задачи на использование принципов умножения и сложения

201. Сколькими способами могут восемь человек стать в очередь к театральной кассе?

Решение задачи.

Существует 8 мест, которые должны занять 8 человек. На первое место может стать любой из 8 человек, т. е. способов занять первое место – 8. После того как один человек стал на первое место, осталось 7 мест и 7 человек, которые могут быть на них размещены, т. е. способов занять второе место – семь. Аналогично для третьего, четвертого и т. д. места. Используя принцип умножения, получаем произведение: $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$. Такое произведение обозначается как $8!$ (читается 8 факториал) и называется перестановкой P_8 .

Ответ: $P_8 = 8!$

202. Позывные радиостанции должны начинаться с буквы W.

а) Скольким радиостанциям можно присвоить различные позывные, если позывные состоят из трех букв, причем эти буквы могут повторяться?

б) Если позывные состоят из четырех букв, которые не повторяются?

Решение задачи.

В современном латинском алфавите 26 букв. На первом месте всегда должна стоять одна буква, следовательно, существует только один способ занять первое место.

а) На оставшиеся два места может претендовать любая из 26-ти букв, т. к. буквы в позывных могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: $1 \times 26 \times 26 = 26^2$.

б) На второе место можно поставить любую из 25 букв, т. к. в позывных буквы не должны повторяться. На третье место – 24 буквы, на четвертое место – 23 буквы. Используя принцип умножения, получаем произведение: $1 \times 25 \times 24 \times 23$.

Ответ: а) 26^2 ; б) $25 \times 24 \times 23$.

203. В автомашине 7 мест. Сколькими способами семь человек могут усесться в эту машину, если занять место водителя могут только трое из них?

Решение задачи.

Действие, которое должно быть выполнено особым способом, необходимо выполнять первым. Итак, на место водителя можно посадить только одного из трех человек (умеющего водить машину), т. е. существуют 3 способа занять первое место. Второе место может занять любой из 6 человек, оставшихся после того, как место водителя будет занято, и т. д. Используя принцип умножения, получаем произведение:

$$3 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 3 \times 6! = 3 \times P_6.$$

Ответ: $3 \times P_6 = 3 \times 6!$.

204. Алфавит некоторого языка содержит 30 букв. Сколько существует шестибуквенных слов (цепочка букв от пробела до пробела), составленных из букв этого алфавита, если:

а) буквы в словах не повторяются?

б) буквы в словах могут повторяться?

Решение задачи.

Существует шесть мест, на которые нужно разместить 30 букв.

а) Буквы не должны повторяться. Используя принцип умножения, получаем произведение: $30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25$. Такое произведение достаточно сложно использовать в дальнейшем, и

информация задачи представлена в ней в скрытой форме. В комбинаторике используют для таких произведений формулу размещений. Чтобы получить формулу размещений, умножим это произведение на единицу, которую представим следующим образом:

$$30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 1 = 30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times \frac{24!}{24!}$$

$$= \frac{30 \times 29 \times 28 \times 27 \times 26 \times 25 \times 24!}{24!} = \frac{30!}{24!} = \frac{30!}{(30-6)!} = A_{30}^6 - \text{формула для размещений.}$$

б) Буквы повторяются. Используя принцип умножения, получаем: $30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 \times 30 = 30^6 = \tilde{A}_{30}^6$ – формула для размещений с повторениями.

Ответ: а) A_{30}^6 ; б) \tilde{A}_{30}^6 .

205. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых содержит не менее трех цифр. Сколько таких чисел можно составить, если повторения цифр в числах запрещены?

Решение задачи.

Необходимо посчитать, сколько существует трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, составленных из этих пяти цифр. Трехзначных чисел – $5 \times 4 \times 3 = A_5^3$, четырехзначных – $5 \times 4 \times 3 \times 2 = A_5^4$, пятизначных – $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = A_5^5$. Используем принцип сложения: $A_5^3 + A_5^4 + A_5^5 = 60 + 120 + 120 = 300$.

Ответ: 300.

2. Задачи на использование формул для перестановок и размещений

206. Сколько слов можно образовать из букв слова «фрагмент», если слова должны состоять:

а) из восьми букв; б) из семи букв; в) из трех букв?

Решение задачи.

В слове «фрагмент» 8 букв алфавита.

а) Всевозможные перестановки 8 букв по восьми местам:

$$A_8^8 = \frac{8!}{(8-8)!} = \frac{8!}{0!} = \frac{8!}{1} = 8! = P_8.$$

б) Размещения 8 букв по 7 местам: A_8^7 .

в) Размещения 8 букв по 3 местам: A_8^3 .

Ответ: а) P_8 , б) A_8^7 , в) A_8^3 .

207. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, если а) первая из них не равна нулю; б) номер состоит из одной буквы латинского алфавита, за которой следуют четыре цифры, отличные от нуля?

Решение задачи.

а) Всего существует 10 цифр. На первом месте не может быть цифры 0, поэтому способов поставить цифру на первое место существует 9. На втором месте может стоять любая из 10-ти цифр (цифры могут повторяться), т. е. способов поставить цифру на второе место существует 10, и т. д. Используя принцип умножения, получаем: $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 9 \times 10^4 = 9 \times \tilde{A}_{10}^4$.

б) На первом месте может стоять любая из 26 букв. На остальных местах – любые из девяти цифр, причем они могут повторяться. Используя принцип умножения, получаем: $26 \times 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 26 \times \tilde{A}_9^4$.

Ответ: а) $9 \times \tilde{A}_{10}^4$, б) $26 \times \tilde{A}_9^4$.

208. Сколькими способами можно расставить на полке семь книг, если: а) две определенные книги должны всегда стоять рядом; б) эти две книги не должны стоять рядом?

Решение задачи.

а) Книги, которые должны стоять рядом, считаем за одну книгу. Тогда нужно расставить 6 книг по шести местам. Применяя формулу перестановок, получаем: $P_6 = 6!$. Мы учли перестановки шести книг, не учитывая порядок внутри тех книг, которые мы посчитали за одну. А так как две книги по двум местам можно разместить только двумя способами (P_2), то получаем окончательно следующее произведение: $P_2 \times P_6 = 2 \times 6! = 1440$.

б) Способов переставить 7 книг существует $P_7 = 7!$. Из них – $2 \times 6!$ способов поставить определенные книги вместе. Следовательно, способов поставить книги так, чтобы 2 заданные книги не стояли вместе существует: $7! - 2 \times 6!$.

Ответ: а) 1440; б) $7! - 2 \times 6!$

3. Задачи на использование формул для сочетаний

209. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Решение задачи.

Для решения этой задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т. к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборке. Запишем формулу для сочетаний и произведем вычисления:

$$C_8^5 = \frac{8!}{(8-5)! \times 5!} = \frac{8!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$$

Ответ: 56.

210. Компания из двадцати мужчин разделяется на три группы, в первую из которых входят три человека, во вторую – пять и в третью – двенадцать. Сколькими способами они могут это сделать? (Ответ записать в виде произведения сомножителей, не вычисляя его.)

Решение задачи:

Из 20-ти элементов необходимо сделать три выборки, причем порядок внутри выборок значения не имеет. Поэтому используем формулу для сочетаний. Чтобы выбрать из 20-ти элементов 3, существует C_{20}^3 способов. Остается 17 элементов, из которых выбирается 5 элементов – C_{17}^5 способами. Остается 12 элементов, из которых выбирается 12 элементов. Это можно сделать $C_{12}^{12} = 1$, т. е. одним способом. Используя принцип произведения, получаем: $C_{20}^3 \times C_{17}^5 \times C_{12}^{12}$.

Ответ: $C_{20}^3 \times C_{17}^5 \times C_{12}^{12}$.

211. Сколькими способами можно отобрать несколько фруктов из семи яблок, четырех лимонов и девяти апельсинов? (Мы считаем, что фрукты одного вида неразличимы.)

Решение задачи.

Так как фрукты одного вида неразличимы, то существует один способ взять одно яблоко, один способ взять 2 яблока, один способ взять три яблока и т. д., т. е. всего семь способов выбрать несколько яблок (несколько – это не менее одного). Необходимо также

прибавить один способ не взять ни одного яблока. Следовательно, существует 8 способов взять яблоки. Аналогично существует 5 способов выбрать лимоны и 10 способов выбрать апельсины. Следуя принципу умножения, получим все способы отбора фруктов: $7 \times 5 \times 10$. Но среди этих способов существует один способ, когда не выбирается ни один фрукт. Следовательно, решением данной задачи будет следующее выражение: $7 \times 5 \times 10 - 1 = 349$.

Ответ: 349.

4. Задачи на использование формул для перестановок и сочетаний

212. а) Сколько четырехбуквенных слов можно образовать из букв слова «сапфир»? б) Сколько среди них таких, которые не содержат буквы *p*? в) Сколько таких, которые начинаются с буквы *c* и оканчиваются буквой *p*?

Решение задачи:

а) Из шести букв составляются четырехбуквенные слова, причем порядок букв важен для образования новых слов. Поэтому используется формула для размещений:

$$A_6^4 = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6!}{2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360.$$

б) Необходимо исключить букву *p* из рассмотрения. Количество слов, не содержащих эту букву: $A_5^4 = \frac{5!}{(5-4)!} = \frac{5!}{1!} = 120$.

в) На первое место поставить букву *c* можно только одним способом. На последнее место поставить букву *p* можно тоже только одним способом. Остаются 4 буквы, которые необходимо разместить по двум местам: $A_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12$.

Ответ: а) 360, б) 120, в) 12.

213. Сколько пятибуквенных слов, каждое из которых состоит из трех согласных и двух гласных, можно образовать из букв слова «уравнение»?

Решение задачи.

В слове «уравнение» 3 согласных и 4 гласных буквы русского алфавита. Чтобы посчитать количество требуемых пятибуквенных слов, необходимо посчитать количество соче-

таний трех согласных из трех заданных и двух гласных из четырех заданных: C_3^3 и C_4^2 . После того как 5 букв выбраны, необходимо посчитать все возможные перестановки этих букв: $C_3^3 \times C_4^2 \times P_5$.

Ответ: $C_3^3 \times C_4^2 \times P_5$.

5. Задачи на использование формул для перестановок и сочетаний с повторениями

214. Сколько различных перестановок можно образовать из всех букв слова «перестановка»? Сколько из них начинается с буквы п и оканчивается буквой а?

Решение задачи.

В слове «перестановка» 12 букв, из них повторяются 2 буквы е и две буквы а. Число перестановок из 12 элементов вычисляется с помощью формулы P_{12} . Но среди этих перестановок будут повторяющиеся, в которых буквы е или а меняются местами. Чтобы не считать такие перестановки, используется формула для перестановок с повторениями: $\tilde{P}_{2,2}^{12} = \frac{12!}{2! \times 2!} = \frac{12 \times 11!}{4} = 3 \times 11!$.

Чтобы посчитать количество перестановок, начинающихся на букву п и оканчивающихся на букву а, необходимо исключить эти элементы и места, на которых они стоят из рассмотрения. Остается 10 букв и десять мест, причем остается только одна повторяющаяся буква е. Применяем формулу для перестановок с повторениями:

$$\tilde{P}_2^{10} = \frac{10!}{2!} = \frac{10 \times 9!}{2} = 5 \times 9!.$$

Ответ: $3 \times 11!$, $5 \times 9!$.

Теория графов

215. Спортивное соревнование проводится по круговой схеме: каждая пара игроков встречается между собой ровно один раз. Докажите, что в любой момент времени найдутся хотя бы два игрока, прошедшие одинаковое число встреч.

216. В соревнованиях по круговой схеме с пятью участниками только Ваня и Леша сыграли одинаковое число встреч, а все остальные различное. Сколько встреч сыграли Ваня и Леша?

217. Каждый из 17 ученых переписывается с остальными. В их переписке речь идет лишь о трех темах. Каждая пара ученых переписывается друг с другом только по одной теме. Доказать, что не менее 3 ученых переписываются друг с другом по одной теме.

218. В футбольном турнире 20 команд сыграли 8 туров: каждая команда сыграла с восьмью разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой ни одного матча.

219. В некотором государстве система авиалиний устроена так, что любой город соединен авиалиниями не более чем с тремя другими и из любого города в любой другой можно перелететь, сделав не более одной пересадки. Какое наибольшее число городов может быть в этом государстве?

220. У каждого из депутатов парламента не более трех противников. (Если депутат A – противник депутата B , то депутат B – противник депутата A .) Докажите, что депутатов можно разбить на две палаты так, что каждый депутат будет иметь не более одного противника в своей палате.

221. В теннисном турнире каждый игрок команды «синих» встречается с каждым игроком команды «красных». Число игроков в командах одинаково и не больше восьми. «Синие» выиграли в четыре раза больше встреч, чем «красные». Сколько человек в каждой из команд?

222. Каждый из семи мальчиков имеет не менее трех братьев. Докажите, что все мальчики – братья.

223. В каждой из трех школ учится по 300 человек. Любой ученик имеет в сумме 301 знакомого из двух других школ. Дока-

жите, что можно выбрать по одному ученику из каждой школы так, чтобы выбранные ученики были знакомы между собой.

224. Летом Иван отдыхал в молодежном лагере «Восход», где вместе с ним находилось 53 школьника. После окончания отдыха некоторые пары обменялись адресами, причем у каждого из отдыхающих оказалось не менее 26 адресов. Через некоторое время Ивану понадобился адрес Николая, с которым он адресом не обменивался. Докажите, что Иван может узнать адрес Николая, т. е. существует цепочка из школьников, которая начинается с Ивана и оканчивается Николаем и в которой каждая пара соседей обменялась адресами.

225. Маша отдыхала в молодежном лагере «Росинка», где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она не обменивалась адресами. Докажите, что с помощью отдыхающих в лагере Маша может найти адрес Ирины (см. предыдущую задачу).

226. Докажите, что в группе из шести человек всегда найдутся три человека, знакомые между собой, или три человека, не знакомые между собой.

227. В международном фестивале участвовало несколько сотен делегатов из разных стран мира. Выяснилось, что из трех любых делегатов, по крайней мере, двое могут объясниться между собой на каком-то языке. Докажите, что найдется тройка делегатов, в которой каждый может объясниться с каждым.

228. В некоторой компании любые два знакомых не имеют общих знакомых, а любые два незнакомых имеют ровно двух общих знакомых. Докажите, что в этой компании все имеют одинаковое число знакомых.

229. Про некоторую компанию известно, что если два человека из нее знакомы, то они имеют одинаковое в этой компании число знакомых, а если незнакомы – то разное. Докажите, что в компании из семидесяти человек обязательно найдется один, имеющий не менее одиннадцати знакомых.

230. Про некоторую компанию известно, что каждый человек знаком в ней ровно с шестью людьми, и для любой группы из

шести человек найдется член компании, знакомый с каждым из этой шестерки. Сколько человек в компании?

231. В лагере отдыхают 50 школьников. Известно, что среди любых четырех школьников найдется, по крайней мере, один, знакомый с тремя остальными. Докажите, что найдется школьник, знакомый со всеми остальными школьниками.

232. На конгресс собрались ученые, среди которых есть знакомые. Оказалось, что никакие двое ученых, имеющих на конгрессе равное число знакомых, не имеют общих знакомых. Докажите, что найдется ученый, который имеет только одного знакомого.

233. В трехмерном пространстве 9 точек расположены так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка соединена отрезками ровно с четырьмя другими. Докажите, что найдутся три отрезка, образующие треугольник.

234. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходят ровно три дороги, быть ровно 100 дорог?

235. Группа, в составе которой Петр совершил туристскую поездку, состояла из пятнадцати человек. Вернувшись из путешествия, Петр рассказал, что каждый участник группы был ранее знаком ровно с пятью другими участниками. Возможно ли это?

236. Одиннадцать школьников, уезжая на каникулы, договорились, что каждый из них пошлет открытки трем из остальных. Может ли оказаться так, что каждый получит открытки именно от тех, кому напишет сам.

237. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четное.

238. Можно ли на плоскости так нарисовать 9 отрезков, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими?

239. Города страны соединены авиалиниями. Из столицы выходит 21 линия, из города Дальний – одна, а из каждого из остальных городов – по двенадцать линий. Докажите, что из столицы можно долететь до города Дальний (возможно с пересадками).

240. Среди 9 мушкетеров некоторые поссорились и вызвали друг друга на дуэль. Оказалось, что нет ни одной такой тройки мушкетеров, в которой все должны драться между собой.

Докажите, что найдется четверка мушкетеров, в которой нет ни одной пары поссорившихся.

241. В стране некоторые пары городов соединены авиалиниями, причем каждый город соединен не менее, чем с половиной других городов. Докажите, что можно найти такой маршрут облета городов, который начинается и заканчивается в одном и том же городе и каждый город посещается ровно один раз.

242. Печатная плата представляет собой пластинку из изолирующего материала, в специально изготовленные гнезда которой устанавливают электронные приборы. В качестве проводников, соединяющих эти приборы, служат напыленные металлический дорожки. Поскольку проводники не изолируются, то дорожки не должны пересекаться. Если это может произойти, то дорожку переносят на другую сторону платы. Конструктор Иванов придумал хорошую схему печатной платы, которая состоит из 12 приборов и 32 проводников, соединяющих их. Можно ли изготовить такую плату так, чтобы все проводники были расположены на одной ее стороне?

243. Пусть A – матрица смежности помеченного графа на n вершинах. Какой смысл имеет $A^3(i, i)$?

244. Сколь много ребер может иметь n -вершинный граф без треугольников?

245. Сколь много ребер может иметь n -вершинный граф, степени вершин которого $\leq d$?

246. Расставить 8 ферзей на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга.

247. Доказать непланарность графа Петерсена.

248. Существуют ли графы, степени вершин которых есть:

а) 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 7;

б) 2, 2, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 7, 7, 7.

249. Найти хроматическое число n -вершинного дерева $T_n(n > 1)$.

250. Указать число компонент связности леса, имеющего 76 вершин и 53 ребра.

251. Показать, что граф с n вершинами и числом ребер больше $(n-1)(n-2)/2$ связан.

252. Показать, что для любого натурального t существует однородный степени 3 граф с $6t$ вершинами, каждая вершина которого принадлежит одному треугольнику.

253. Граф, вершинами которого являются все k -подмножества некоторого n -множества, а два k -подмножества соединены ребром \Leftrightarrow их пересечение содержат ровно l элементов, называется (n, k, l) -графом. Определить порядок и размерность (число ребер) (n, k, l) -графа. Является ли он регулярным?

254. Графом n -перестановок называется граф, вершины которого – все перестановки элементов n -элементного множества, и две вершины смежны \Leftrightarrow одна из них преобразуется в другую транспозицией двух элементов. Указать порядок, размерность и степень каждой вершины графа n -перестановок. Является ли граф регулярным?

255. Изобразить на плоскости граф 3-перестановок.

256. Определить количество деревьев на 6 вершинах (с точностью до изоморфизма).

257. Изобразить все неизоморфные деревья на 7 вершинах.

258. Каково число помеченных (p, q) -графов?

259. Перечислить все помеченные деревья на 4 вершинах.

260. Найти 1-факторизацию графа K_4 .

261. Найти 1-факторизацию графа $K_{3,3}$.

262. Указать 1-факторизацию графа K_8 .

263. Представить граф K_9 в виде суммы 4 основных простых циклов.

264. e -графом назовем граф, каждая вершина которого имеет четную степень. Определить число помеченных e -графов с p вершинами.

265. Реализовать граф K_6 с минимальным количеством пересечений ребер.

266. Привести примеры графов, не являющихся графами пересечений интервалов на числовой прямой.

267. Два людоеда и два миссионера должны переправиться на другой берег реки. Лодка выдерживает двоих. На одном берегу не может находиться людоедов больше, чем миссионеров, т. к. они имеют привычку поедать своих святых наставников. Как осуществить переправу?

268. Найти такую раскраску ребер полного 5-графа, что ни один 3-подграф не является монохроматическим.

269. Шахматная доска раскрашена 10 красками так, что клетки, имеющие общую сторону, окрашены в разные цвета, причем, все 10 красок использованы. Две краски называются соседними, если существуют окрашенные ими соседние клетки, то есть клетки, имеющие общую сторону. Чему равно наименьшее число пар соседних красок?

270. Государство Филиппины расположено на островах. Между некоторыми из островов ежедневно курсируют теплоходы (один рейс в одном направлении и один в противоположном). С любого острова можно добраться на любой другой, возможно с пересадками. Полиция Филиппин пригласила Крутого Уокера для помощи в поимке опасного преступника. Преступник суеверен и не плывет на теплоходе 13 числа каждого месяца и каждый понедельник. Уокер не суеверен. Кроме того, он с помощью агентуры всегда знает, на каком острове находится преступник. Докажите, что если Уокер и преступник будут пользоваться только теплоходами, то Уокер, в конце концов, окажется на одном острове с преступником.

271. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится новостями, узнанными вчера, со всеми своими знакомыми. Известно, что с течением какого-то времени любая новость становится известна всем жителям. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно сообщить им некоторую новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

272. Алексей пошел в тир с отцом. Уговор был такой: Алексей делает пять выстрелов и за каждое попадание получает право еще на два выстрела. Алексей выстрелил 25 раз. Сколько раз он попал?

273. Борцовский турнир с 13 участниками проводится по олимпийской системе, при которой проигравший выбывает. На одну встречу, с учетом подготовки к ней и отдыха участников, отводится час. Сколько времени нужно, чтобы провести турнир, если в распоряжении организаторов только 5 борцовских ковров?

274. Есть бактерия, которая делится на 3 бактерии. В дальнейшем появляются бактерии, которые могут делиться на 4 бактерии, могут на 2, а могут и не делиться. Образовалось 102 бактерии. Определите число делений, если известно, что число бактерий, разделившихся на 2, в 6 раз больше, чем число бактерий, разделившихся на 4.

275. Насыщенным углеводородом называется соединение углерода C , имеющее валентность 4, и водорода H , имеющее валентность 1, в котором при заданном числе атомов углерода содержится наибольшее число атомов водорода. Найдите формулу насыщенного углеводорода, содержащего n атомов углерода.

276. В городе с любой станции метро можно проехать на любую другую. Докажите, что одну из станций можно закрыть на ремонт без права проезда через нее так, чтобы из любой оставшейся станции можно было проехать на любую другую.

277. Турист, который приехал в город Минск на поезде, весь день прогулял по городу. Поужинав на площади Бангалор, он решил вернуться на вокзал, следуя по тем улицам, которые уже проходил нечетное число раз. Докажите, что такое возвращение возможно.

278. Из какого минимального числа кусков проволоки можно спаять каркас куба? (Толщина всех ребер каркаса должна быть одинаковой).

279. На пир при дворе короля Артура собралось четное число рыцарей, которые либо дружат, либо враждуют. Оказалось, что у каждого из рыцарей друзей больше, чем врагов. Докажите, что волшебник Мерлин может так рассадить рыцарей за круглым столом, что справа и слева от каждого из них будет сидеть друг.

280. Мэрия решила построить в каждом квартале города, имеющего 155 перекрестков и 260 отрезков улиц между перекрестками, универсам. Сколько будет построено универсамов?

281. Имеются 3 дома и 3 колодца. Каждый хозяин пользуется любым из трех колодцев. В некоторый момент обитатели домов поссорились и решили проложить свои дорожки до колодцев так, чтобы они не пересекались. Возможно ли это?

282. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она пере-

ходит к другому кубику, имеющему общую грань с предыдущим. Может ли мышка съесть весь куб, кроме центрального кубика?

283. Можно ли так соединить дорожками пять домов, чтобы дорожки не пересекались и каждая пара домов была соединена одной дорожкой? (Две дорожки считаются пересекающимися, если они имеют хотя бы одну общую точку.)

284. Нефтяная компания имеет несколько перекачивающих станций, которые соединены нефтепроводами. Группа диверсантов должна вывести из строя систему нефтепроводов, взорвав несколько станций так, чтобы образовались хотя бы две станции, между которыми нельзя было перекачать нефть. Докажите, что для этой цели достаточно взорвать не более пяти станций.

285. Может ли существовать такая пятерка государств, в которой каждая пара государств соседствует друг с другом? (Граница каждого государства является замкнутой кривой. Соседними считаются государства, имеющие общую границу ненулевой длины.)

286. На карте Англии нет точек, в которых сходятся границы более чем трех графств. Докажите, что:

- а) четное число графств имеет нечетное число соседей;
- б) существует графство, которое имеет не более пяти соседей.

287. Докажите, что у любого выпуклого многогранника найдутся две грани с одинаковым числом ребер.

288. Докажите, что не существует выпуклого многогранника, у которого все грани шестиугольники.

289. Докажите, что для раскраски произвольной географической карты, при которой две любые соседние страны окрашены в различные цвета, достаточно шести красок. (Рассматриваются карты, в которых граница любой страны состоит из одной замкнутой линии, а соседними считаются страны, имеющие общую границу ненулевой длины).

290. Докажите, что для раскраски произвольной географической карты (см. предыдущую задачу) достаточно пяти красок.

291. Дорожная полиция для наблюдения за порядком в городе собирается установить телекамеры на его перекрестках. Каждая телекамера контролирует перекресток, на котором она установлена, все улицы, выходящие из этого перекрестка,

включая и соседние перекрестки. Сколько нужно установить телекамер, если в городе 75 перекрестков, а наибольшее число телекамер, которое можно установить так, чтобы ни одна из них не наблюдала за другой, равно 30.

292. Дорожная полиция установила 30 телекамер на перекрестках города (см. предыдущую задачу). Известно, что это наибольшее количество телекамер, которые можно расставить так, чтобы ни одна из них не наблюдала другую. Докажите, что можно так проложить, не более 30 маршрутов патрулирования, чтобы каждый перекресток посещался только одной патрульной машиной и каждый маршрут содержал любой отрезок улицы между двумя перекрестками не более одного раза. (Некоторые участки улиц могут не посещаться патрульными машинами.)

293. Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на перекрестках улиц города, который имеет 282 отрезков улиц. Решено было не устанавливать более одной колонки на соседних перекрестках. Известно, что в городе на каждом перекрестке сходится не менее четырех улиц. Докажите, что при этих условиях компания не сможет установить более 70 колонок.

294. Нефтяная компания решила установить автозаправочные колонки на улицах города так, чтобы на отрезках улиц, выходящих из одного перекрестка, было не более одной колонки. Известно, что в городе 210 отрезков улиц и на одном перекрестке сходится самое большее 6 улиц. Докажите, что при этих условиях может быть установлено не менее 20 колонок.

295. Полицейские участки размещаются на перекрестках города, причем для любого перекрестка участок находится или на этом перекрестке, или на соседнем. Известно, что в городе 155 перекрестков и на каждом из них сходится не более шести улиц. Докажите, что в городе не менее 23 полицейских участков.

296. На вечере собралось несколько юношей и девушек. При этом оказалось, что для любой группы юношей число девушек, знакомых хотя бы с одним из юношей этой группы, будет не меньше числа юношей в группе. Докажите, что все юноши могут одновременно танцевать в парах со знакомыми девушками.

297. На вечере среди собравшихся было 20 юношей. Оказалось, что для любых k юношей число девушек, знакомых хотя

бы с одним из юношей, не меньше, чем $(k-10)$. Докажите, что не менее половины юношей могут одновременно танцевать в паре со знакомой девушкой.

298. На вечере первые два танца каждый из юношей танцевал с одной из своих знакомых девушек, возможно, первый танец с одной, а второй – с другой. Некоторые танцевали два танца, некоторые – один, а очень застенчивые не танцевали ни разу. Докажите, что третий танец могут танцевать все юноши, танцевавшие первый танец, и все девушки, танцевавшие второй.

299. Среди участников вечера несколько юношей и девушек имеют одинаковое наибольшее число знакомых противоположного пола. Докажите, что все они могут одновременно танцевать в паре со своими знакомыми.

300. На математической олимпиаде предлагалось 16 задач. Оказалось, что каждый из 16 школьников решил две задачи и каждую задачу решили два школьника. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных им задач.

301. На математической олимпиаде предлагалось n задач. Оказалось, что каждый из n школьников решил k задач и каждую задачу решили k школьников. Докажите, что можно организовать разбор задач таким образом, что каждый школьник расскажет одну из решенных задач и все задачи будут разобраны.

302. Каждые два из шести компьютеров соединены своим проводом. Укажите, как раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов, чтобы из каждого компьютера выходило пять проводов разного цвета.

303. Можно ли соединить нечетное число приборов разноцветными проводами так, чтобы из каждого прибора выходили провода разных цветов и цветов было на один меньше, чем приборов.

Учебное издание

Дискретная математика

Методические указания

Составители:

Калинин Владимир Борисович
Николаев Андрей Валерьевич

Редактор, корректор И. В. Бунакова
Верстка Е. Л. Шелехова

Подписано в печать 07.02.2011. Формат 60×84 ¹/₁₆.

Бум. офсетная. Гарнитура "Times New Roman".

Усл. печ. л. 2,79. Уч.-изд. л. 2,0.

Тираж 100 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе Ярославского
государственного университета им. П. Г. Демидова.

Отпечатано на ризографе.

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова.
150000, Ярославль, ул. Советская, 14.

Дискретная математика