

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова  
Кафедра теоретической информатики

**П. Г. Парфенов, А. В. Смирнов**

## **Ч И С Л Е Н Н Ы Е   М Е Т О Д Ы**

Методические указания

*Рекомендовано научно-методическим советом университета*

*для студентов, обучающихся по специальности*

*Прикладная математика и информатика*

*и по направлениям*

*Прикладная математика и информатика,*

*Информационные технологии*

Ярославль   2011

УДК 51 (075)  
ББК В 19я73  
П 18

*Рекомендовано*

*Редакционно-издательским советом университета  
в качестве учебного издания. План 2010/2011 учебного года*

Рецензент:

кафедра теоретической информатики ЯрГУ

Парфенов, П. Г. Численные методы: метод. указания  
П 18 / П. Г. Парфенов, А. В. Смирнов; Яросл. гос. ун-т. –  
Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 36 с.

В предлагаемом издании имеются подборки заданий теоретического плана для тестирования студентов, задания для лабораторных работ с кратким описанием методов, которые нужно реализовать, и исходные данные для их выполнения.

Предназначены для студентов, обучающихся по специальности 010501 Прикладная математика и информатика и по направлениям 010500 Прикладная математика и информатика и 010400 Информационные технологии (дисциплина «Численные методы», блок ОПД), очной формы обучения.

УДК 51 (075)  
ББК В 19я73

© Ярославский государственный университет, 2011

## Оглавление

1. Предисловие . . . . .	4
2. О дисциплине «ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ» . . . . .	5
3. Содержание разделов дисциплины . . . . .	6
4. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 1 . . . . .	8
5. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 2 . . . . .	9
6. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 3 . . . . .	12
7. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 4 . . . . .	14
8. Лабораторная работа № 1. Интерполирование функций . . . . .	19
9. Краткое описание методов для лабораторной работы № 1 . . . . .	19
10. Лабораторная работа № 2. Численное интегрирование . . . . .	22
11. Краткое описание методов для лабораторной работы № 2 . . . . .	23
12. Исходные данные к лабораторным работам № 1 и 2 . . . . .	24
13. Лабораторная работа № 3. Численное решение систем ОДУ . . . . .	26
14. Краткое описание методов для лабораторной работы № 3 . . . . .	28
15. Исходные данные к лабораторной работе № 3 . . . . .	28
16. Лабораторная работа № 4. Метод итераций . . . . .	32
17. Краткое описание методов для лабораторной работы № 4 . . . . .	33
18. Исходные данные к лабораторной работе № 4 . . . . .	33
19. Рекомендуемая литература . . . . .	35

# 1. Предисловие

Данная дисциплина в рамках общей схемы вычислительного эксперимента знакомит студентов с численными методами решения задач, возникающих при моделировании процессов в различных областях науки, техники и производства. Основные разделы, изучаемые в курсе:

1. Методы приближения функций и их производных, оценки погрешностей такого рода приближений.

2. Численные подходы к вычислению определенных интегралов, методы построения соответствующих квадратур, оценка их погрешностей.

3. Численное решение уравнений и систем линейных и нелинейных уравнений.

4. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Знакомство с численными методами решения интегральных уравнений. Освоение подходов к построению разностных схем для уравнений в частных производных и основы методов их решения. Знакомство с методами исследования устойчивости разностных схем.

Методы работы: лекции, лабораторные и практические занятия, коллоквиумы, письменные опросы, рейтинговый подход, самостоятельная работа студентов, индивидуальные задания для отдельных студентов.

## 2. О дисциплине «**ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ**»

**1. Цель и задачи курса.** Дисциплина «Численные методы» обеспечивает приобретение знаний и умений в соответствии с государственным образовательным стандартом. Целью преподавания дисциплины является ознакомление слушателей с основными методами приближенного численного решения математических задач.

**2. Место дисциплины в системе образования – цикл ОП.** Дисциплина «Численные методы» относится к числу прикладных математических дисциплин, ее преподавание основывается на знаниях, полученных слушателями при изучении дисциплин «Линейная алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и «Уравнения математической физики». Знания и навыки, полученные при изучении дисциплины «Численные методы», используются слушателями при изучении специальных дисциплин и при подготовке выпускной дипломной работы.

**3. Требования к уровню освоения содержания курса.** В результате изучения дисциплины слушатели должны:

**иметь представление** о возможностях применения численных методов при анализе математических моделей; о подходах к оценке качества этих методов, в частности оценках погрешности, сходимости и устойчивости методов;

**знать** основные методы интерполирования, численного дифференцирования и интегрирования, численного решения линейных систем и одного нелинейного уравнения, приближенного решения дифференциальных уравнений; подходы к оценке трудоемкости численных методов;

**уметь** программно реализовывать на компьютере основные численные методы решения задач; выяснять условия устойчивости классических разностных схем.

**4. Минимум содержания дисциплины по ГОС.** Численные методы решения задач математического анализа, алгебры и обыкновенных дифференциальных уравнений; численные методы решения задач математической физики; методы решения сеточных уравнений.

### **3. Содержание разделов дисциплины**

#### **1. Введение в численные методы**

Общая схема вычислительного эксперимента. Погрешность приближенного решения. Основные требования к вычислительным алгоритмам.

#### **2. Приближение функций и их производных**

2.1. Постановка задачи интерполирования. Интерполяционные полиномы Лагранжа и Ньютона. Остаточный член интерполяционной формулы. Понятие об интерполировании функций нескольких переменных и об интерполировании сплайнами.

2.2. Разностные операторы. Формулы приближенного дифференцирования. Численное дифференцирование с помощью интерполяционных полиномов.

2.3. Постановка задачи о наилучшем приближении в гильбертовом пространстве. Среднеквадратическое приближение. Существование, единственность и свойства элемента наилучшего приближения. Процедура нахождения элемента наилучшего приближения. Ортогональные полиномы.

2.4. Метод наименьших квадратов.

#### **3. Численное интегрирование**

Постановка задачи численного интегрирования. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона нахождения численного значения определенного интеграла. Квадратурные формулы Гаусса. Понятие о методе Монте – Карло нахождения приближенного значения определенного интеграла.

#### **4. Численное решение уравнений и систем уравнений**

4.1. Постановка задачи нахождения приближенного значения корня одного нелинейного уравнения. Локализация корней. Оценка абсолютной погрешности приближенного корня. Метод дихотомии. Метод хорд. Метод Ньютона. Метод итераций. Геометрическая интерпретация метода итераций.

4.2. Постановка задачи численного решения системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Оценка трудоемкости метода Гаусса. Условие примени-

мости метода Гаусса с выбором главного элемента. Метод квадратного корня. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений. Метод итераций решения системы линейных алгебраических уравнений.

4.3. Постановка задачи численного решения системы нелинейных уравнений. Общая форма итерационного процесса. Итерационные методы решения системы нелинейных уравнений.

4.4. Постановка задачи численного нахождения собственных векторов и собственных значений. Степенной алгоритм и алгоритм Крылова вычисления собственных векторов и собственных значений.

## **5. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

Постановка задачи численного решения задачи Коши и краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Метод Эйлера. Симметричная схема. Метод Рунге – Кутта. Разностные уравнения первого и второго порядков. Методы Рунге – Кутта. Многошаговые разностные методы. Численные методы решения краевой задачи для уравнения второго порядка. Построение разностных схем интегро-интерполяционным методом.

## **6. Численное решение задач математической физики**

6.1. Постановка задачи численного решения задач математической физики. Простейшие методы построения разностных схем. Явная и неявная разностная схемы для уравнения теплопроводности. Трехслойные разностные схемы.

6.2. Исследование устойчивости сеточных уравнений. Устойчивость явной и неявной разностных схем для уравнения теплопроводности.

## 4. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 1

### Литература для подготовки

1. Березин, И. С. Методы вычислений / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М.: Физматлит, 1962.
2. Самарский, А. А. Задачи и упражнения по численным методам: учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.
3. Стрелков, Н. А. Сборник задач по численным методам / Н. А. Стрелков. – Ярославль, 1988.

### Ориентировочный список задач

1. Даны узлы  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 5$  и значения  $y_1 = -2$ ,  $y_2 = 1$ ,  $y_3 = 3$ . Построить интерполяционный полином, используя:

- а) полином Лагранжа;
- б) интерполяционную формулу Ньютона.

2. Доказать:

- а)

$$\delta \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\delta f \cdot \mu g - \mu f \cdot \delta g}{(\mu g)^2 - \frac{1}{4}(\delta g)^2};$$

- б)

$$\mu \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\mu f \cdot \mu g - \frac{1}{4}\delta f \cdot \delta g}{(\mu g)^2 - \frac{1}{4}(\delta g)^2}.$$

3. Доказать:

- а)  $f \in C^4 \Rightarrow \bar{\partial} \partial f(x) - f''(x) = \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi)$ ,  $x - h < \xi < x + h$ ;
- б)  $f \in C^5 \Rightarrow \tilde{\partial} \bar{\partial} \partial f(x) - f'''(x) = \frac{h^2}{4} f^{(5)}(\xi)$ ,  $x - 2h < \xi < x + 2h$ .

4. Доказать неравенства:

- а)  $|\partial f(x) - f'(x)| \leq \int_x^{x+h} |f''(\xi)| d\xi$ ;

- б)  $|\bar{\partial} f(x) - f'(x)| \leq \int_{x-h}^x |f''(\xi)| d\xi$ .

5. Доказать соотношения:

- а)  $\partial(fg) = f \cdot \partial g + g \cdot \partial f + h \cdot \partial f \partial g$ ;

- б)  $\bar{\partial}(fg) = f \cdot \bar{\partial} g + g \cdot \bar{\partial} f + h \cdot \bar{\partial} f \bar{\partial} g$ ;



в)

$$\partial \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g \cdot \partial f - f \cdot \partial g}{g(g + h \cdot \partial g)};$$

г)

$$\bar{\partial} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{g \cdot \bar{\partial} f - f \cdot \bar{\partial} g}{g(g + h \cdot \bar{\partial} g)}.$$

6. Оценить погрешность формул приближенного дифференцирования:

а)  $y'_2 = \frac{1}{12}(y_0 - 8y_1 + 8y_3 - y_4) + R$ ,  $R = ?$

б)  $f''_3 = (-f_0 + 4f_1 - 5f_2 + 2f_3) + R$ ,  $R = ?$

7. Построить квадратуры Гаусса:

а) с одним узлом:

1)  $I(f) = \int_0^1 x^2 f(x) dx;$

2)  $I(f) = \int_0^1 e^x f(x) dx;$

б) с двумя узлами:

1)  $I(f) = \int_{-1}^1 x^4 f(x) dx;$

2)  $I(f) = \int_0^{\pi} \sin x f(x) dx.$

8. Построить квадратурную формулу, точную для многочленов максимально возможной степени:

$$I(f) = \int_{-1}^1 x^2 f(x) dx;$$

$$I(f) = C_1 f(-1) + C_2 f(x_2) + C_3 f(1).$$

## 5. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 2

1. Доказать, что обратная матрица к  $L$ -матрице ( $U$ -матрице) является  $L$ -матрицей ( $U$ -матрицей).

2. Получить  $LU$ -разложения матриц:

а)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a \neq 0; \quad d \neq 0;$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

в)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Является ли матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$LU$ -разложимой?

4. Для каких матриц перестановок  $P$  матрицы  $PA$  будут  $LU$ -разложимы:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}?$$

5. Разложить следующие матрицы перестановок в произведение элементарных:

а)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Можно ли получить разложение симметричной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

в виде  $A = S^*DS$ ?

7. Получить разложение  $A = S^*DS$  симметричной матрицы:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

8. Доказать, что следующие выражения являются нормами векторов:

а)  $\max_{k=1,\dots,n} \{d_k|x_k|\}$ ;  $d_k > 0$ ;  $k = 1, \dots, n$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ;

б)  $\sum_{k=1}^n d_k|x_k|$ ;  $d_k > 0$ ;  $k = 1, \dots, n$ ;  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

9. Доказать, что  $2 \max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}$  является нормой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

10. Доказать, что  $\max\{|a_{11}|, |a_{12}|, |a_{21}|, |a_{22}|\}$  не является нормой матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

11. Является ли выражение  $\min\{|x_1| + 2|x_2|; 2|x_1| + |x_2|\}$  нормой для  $x \in \mathbb{R}^2$ ?

12. Показать, что норма матрицы  $\|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  подчинена норме вектора  $\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ .

13. Найти числа обусловленности матриц:

а)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1.0001 \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|;$$

б)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3.0001 \end{pmatrix}, \quad \|A\| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

## 6. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 3

1. Локализовать корни уравнений; наибольший корень локализовать на отрезке длины 1:

а)  $x^2 - 2x - 2 = 0$ ;

б)  $x^3 + x - 3 = 0$ ;

в)  $e^x - x - \frac{5}{4} = 0$ ;

г)  $5^x - 6x - 3 = 0$ ;

д)  $y^4 - 2y - 1 = 0$ ;

е)  $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 4x + 2 = 0$ ;

ж)  $x^3 + 7x^2 - 53x - 316 = 0$ .

2. С помощью формулы  $|x - \xi| \leq \frac{|f(x)|}{m_1}$  оценить абсолютную погрешность приближения  $x$  корня  $\xi$ , взяв в качестве  $x$  правый (левый) конец отрезка локализации в задании № 1.

3. В плоскости  $ab$  указать области, в которых уравнение  $f(x) \equiv e^x - a - bx^3 = 0$  имеет ровно  $k$  вещественных корней.  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

4. При условии  $f' > 0$ ,  $f'' > 0$ ,  $f(a) \cdot f(b) < 0$  доказать сходимость итераций к единственному корню  $\xi \in [a, b]$ :

а) метод хорд

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - b}{f(x_n) - f(b)}, \quad x_0 = a;$$

б) метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad x_0 = b;$$

в) метод ложного положения

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n) \cdot \frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \quad x_0 = b, \quad \xi < x_1 < b;$$

г) упрощенный метод Ньютона

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(b)}, \quad x_0 = b.$$

Дать геометрическую интерпретацию этих методов.

5. Исследовать сходимость итерационных последовательностей в зависимости от начального приближения  $x_0$ :

а)  $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 1}{100}$ ;

б)  $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 1}{20}$ ;

в)  $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ ;

г)  $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n$ ;

д)  $x_{n+1} = 2^z$ ,  $z \equiv x_n - 1$ ;

е)

$$x_{n+1} = \begin{cases} -2 + \frac{3}{2-x_n}, & \text{если } x_n < 2, \\ 1, & \text{если } x_n = 2, \\ \frac{1}{(x_n-2)(x_n-4)}, & \text{если } 2 < x_n < 4, \\ 1, & \text{если } x_n = 4, \\ \frac{1}{4-x_n}, & \text{если } x_n > 4; \end{cases}$$

ж)

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{2}{3-x_n}, & \text{если } x_n \neq 3, \\ 0, & \text{если } x_n = 3. \end{cases}$$

6. Доказать, что метод простой итерации  $x_{n+1} = \varphi(x_n)$  для решения уравнения  $x = \varphi(x)$  сходится при любом начальном приближении:

а)  $\varphi(x) = \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 x + \gamma$ , где  $|\alpha - \beta| < 1$ ;

б)  $\varphi(x) = ae^z + c$ , где  $\beta \geq 0$ ,  $2a^2\beta < e$ , где  $z \equiv -\beta x^2$ .

7. Уравнение  $x + \ln x = 0$ , имеющее корень  $\alpha = 0.6$ , предлагается решать одним из следующих методов простой итерации:

а)  $x_{n+1} = -\ln x_n$ ;

б)  $x_{n+1} = e^z$ , где  $z \equiv -x_n$ ;

в)  $x_{n+1} = \frac{x_n + e^z}{2}$ , где  $z \equiv -x_n$ ;

г)  $x_{n+1} = \frac{3x_n + 5e^x}{8}$ , где  $z \equiv -x_n$ .

Исследовать эти методы на сходимость.

8. При каких значениях  $a$  отображение, используемое в методе итераций, является сжимающим в окрестности хотя бы одного корня:

а)  $x_{n+1} = \frac{x_n - a}{2a}$ , где  $a > 0$ ;

б)  $x_{n+1} = \frac{10}{a + x_n}$ , где  $a > 0$ ;

в)

$$x_{n+1} = \begin{cases} 1 - a(x_n - 1), & \text{если } x_n \leq 1, \\ 1 - 0.5(x_n - 1), & \text{если } x_n \geq 1? \end{cases}$$

9. Для систем

а)

$$\begin{cases} \sin x = y + 1.32, \\ \cos x = x - 0.85; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} x - 5xy + 1520 = 0, \\ y - 3xy - 105 = 0 \end{cases}$$

написать итерационные формулы, соответствующие методам: релаксации, Пикара, Ньютона, модификации метода Ньютона, методу Ньютона с параметрами, Якоби, Зейделя.

## 7. Список задач для подготовки к коллоквиуму № 4

1. Определить порядок аппроксимации следующих разностных уравнений, построенных для приближенного решения задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + Au = 0; \\ u(0) = 1. \end{cases}$$

а)  $\frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} + Ay_n = 0;$

б)  $\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + Ay_n = 0;$

в)  $\frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2\tau} + Ay_n = 0;$

г)  $\frac{y_n - y_{n-3}}{3\tau} + Ay_{n-1} = 0.$

2. Существуют ли разностные аппроксимации 3-го порядка для уравнений:

а)

$$\begin{cases} 2u' + x^2u = 1; \\ u(0) = 1; \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} u' - 5u = x^2; \\ u(0) = 1? \end{cases}$$

Если существуют, то построить их и доказать это.

3. Определить порядок аппроксимации следующих методов предиктора-корректора в зависимости от параметров:

а)

$$\frac{y_{n+1/3} - y_n}{\tau/3} = f(t_n, y_n); \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f\left(t_n + \frac{\tau}{3}, y_{n+1/3}\right);$$

б)

$$\frac{y_{n+\alpha} - y_n}{\alpha\tau} = f(t_n, y_n); \quad \frac{y_{n+1} - y_n}{\tau} = f\left(t_n + \alpha\tau, y_{n+\alpha}\right).$$

4. Найти общие решения следующих разностных уравнений:

а)  $4y_n - y_{n+1} = 3^n$ ;

б)  $3y_n - y_{n+1} = 3^n$ ;

в)  $2y_n - y_{n+1} = 1$ ;

г)  $2y_n - y_{n+1} = n$ ;

д)  $2y_n - y_{n+1} = n^2$ ;

е)  $2y_n - y_{n+1} = 1 + 2n - n^2$ .

5. Найти общие решения следующих разностных уравнений:

а)  $y_{n-1} - \frac{5}{2}y_n + y_{n+1} = 1$ ;

б)  $y_{n-1} - \frac{5}{2}y_n + y_{n+1} = n$ ;

в)  $y_{n-1} - \frac{5}{2}y_n + y_{n+1} = n^2$ ;

г)  $y_{n-1} - \frac{5}{2}y_n + y_{n+1} = 3^n$ ;

д)  $y_{n-1} - \frac{5}{2}y_n + y_{n+1} = \cos n$ ;

е)  $-4y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1} = 3^n$ .

6. Найти решения разностных уравнений:

а)  $y_{n+1} - y_n + 4y_{n-1} = 4^n$ ,  $y_0 = 1$ ,  $y_1 = 0$ ;

б)  $y_{n+1} - \frac{10}{3}y_n + y_{n-1} = 0$ , ограниченное при  $n \rightarrow -\infty$  и удовлетворяющее условию  $y_0 = 1$ ;

в)  $y_{n+1} - \frac{11}{3}y_n + 2y_{n-1} = 2^{-n}$ , ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$  и удовлетворяющее условию  $y_0 = 1$ ;

г)  $y_{n+1} - \frac{7}{3}y_n - 2y_{n-1} = n \cdot 3^{-n}$ , ограниченное при  $n \rightarrow +\infty$ .

Указание:  $y^* = (An + B) \cdot 3^n$ .

7. Найти точные решения следующих дифференциальных уравнений:

а)  $u' - u = x$ ,  $u(0) = 0$ ;

б)  $u' - u = e^x$ ,  $u(0) = 0$ ;

в)  $u' - \frac{1}{2}u = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ ,  $u(0) = 1$ ;

г)  $u' - 3u = 0, u(0) = 1;$

д)  $u' + 3u = 0, u(0) = 1;$

е)  $u' + 2u = 1, u(0) = 1.$

Построить соответствующие разностные схемы ( $u' \rightarrow \frac{y_{n+1}-y_n}{h}$ ) при  $h = 1$ .

Найти приближенные решения исходя из этих схем. Для каждого уравнения построить точное и приближенное решения в одной системе координат.

8. Существуют ли решения краевой задачи для разностных уравнений:

а)  $2y_{n-1} - 5y_n + 3y_{n+1} = 0, 0 < n < 4, y_0 = 0, y_4 = 1;$

б)  $y_{n-1} - \sqrt{3}y_n + y_{n+1} = 0, 0 < n < 6, y_0 = 0, y_6 = 1?$

9. Определить порядок погрешности аппроксимации разностных методов, построенных для задачи Коши:

а)

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}}{\tau} = f_n;$$

б)

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}}{\tau} = f_{n-1};$$

в)

$$\frac{y_n - 2y_{n-1} + 2y_{n-2} - y_{n-3}}{\tau} = f_{n-2}.$$

10. Построить разностную схему  $\frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2} = a_1 f_{n+1} + a_0 f_n + a_{-1} f_{n-1}$ , аппроксимирующую с наивысшим порядком дифференциальное уравнение  $u'' = f(x, u)$ .

11. Найти точное решение уравнения  $u'' + u = x, u(0) = 1, u'(0) = 1$ . Написать разностную схему ( $u \rightarrow \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}$ ) при  $h = 1$  и найти приближенное решение. Изобразить графики точного и приближенного решения на отрезке  $[0, 2\pi]$  в одной системе координат.

12. Дифференциальный оператор

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x}$$

аппроксимируется разностным

$$L_h u_h \equiv a_1 u_m^{n+1} + a_2 u_m^n + a_3 u_{m-1}^n + a_4 u_{m+1}^n$$



на сетке  $\omega = \{x_m = mh, t_n = n\tau, \tau = rh\}$ ,  $r = \text{const}$ . Найти коэффициенты  $a_1, a_2, a_3, a_4$  такие, что

$$L_h u_h|_{x=x_m, t=t_n} = Lu|_{x=x_m, t=t_n} + o(h^3).$$

13. Существует ли разностная аппроксимация 3-го порядка для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} + 3u = xt^2, \quad h = r\tau, r = \text{const?}$$

Если существует, то построить ее и доказать это.

14. Для задачи  $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, t)$  определить порядок аппроксимации по  $h$  ( $\tau = rh$ ,  $r = \text{const}$ ) для следующих разностных уравнений:

а)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n;$$

б)

$$\frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{\tau} - \frac{u_m^n - u_{m-1}^n}{h} = f_m^n;$$

в)

$$\frac{u_m^{n+1} - \frac{u_{m+1}^n + u_{m-1}^n}{2}}{\tau} - \frac{u_{m+1}^n - u_m^n}{h} = f_m^n.$$

15. Для уравнений

а)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$

б)  $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2};$

в)  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$

написать соответствующие разностные уравнения и определить порядок аппроксимации.

16. Написать разностную схему для задачи:

$$\begin{cases} x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = x^2, & 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(t, 0) = \varphi_1(t), & u(t, 1) = \varphi_2(t), \\ u'_t(0, x) = \psi_1(x), & u(T, x) = \psi_2(x). \end{cases}$$

17. Для каких  $\tau$  и  $h$  выполняется необходимое условие устойчивости для разностных схем:

a)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^{n-1}}{2\tau} = a^2 \frac{y_{m+1}^{n+1} - 2y_m^{n+1} + y_{m-1}^{n+1}}{h^2};$$

б)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - \frac{y_m^n - y_{m-1}^n}{h} = 0;$$

в)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} - \frac{y_{m+1}^n - y_{m-1}^n}{2h} = 0;$$

г)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + a^2 \frac{y_{m+2}^n - 2y_m^n + y_{m-2}^n}{4h^2} = f_m^n;$$

д)

$$\frac{y_m^{n+1} - y_m^n}{\tau} + \frac{y_{m+1}^{n-1} - y_m^{n-1}}{h} = f_m^n;$$

е)

$$\frac{y_m^{n+2} - y_m^{n-2}}{4\tau} = a^2 \frac{y_{m+1}^n - y_m^{n+2} - y_m^{n-2} + y_{m-1}^n}{h^2}?$$

## 8. Лабораторная работа № 1.

### Интерполирование функций

#### Задание для лабораторной работы

##### Исходные данные:

1. Функция  $f(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu)$ .
2. Метод:  $1N$  – первый метод Ньютона,  $2N$  – второй метод Ньютона,  $G$  – метод Гаусса,  $St$  – метод Стирлинга,  $B$  – метод Бесселя.

##### Вход:

1. Действительные параметры:  $-100 \leq \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu \leq 100$ .
2. Действительные размеры окна:  $-100 \leq A, B, C, D \leq 100$ .
3. Натуральное число узлов интерполяции  $0 < n \leq 100$ .
4. Выделенные функции из списка:  $f(x)$ ,  $P_n(x)$ ,  $r_n(x)$ ,  $\partial f(x)$ ,  $\partial P_n(x)$ .

##### Выход:

1. Контрастные графики выделенных функций в окне  $[A, B] \times [C, D]$ , где  $[A, B]$  – отрезок, на котором решается задача интерполяции указанным методом.
2. Значения  $\delta = \max_{[A, B]} |r_n(x)|$  и  $\xi \in [A, B]$  – точка, в которой реализуется этот максимум.

## 9. Краткое описание методов для лабораторной работы № 1

*Задача интерполяции полиномами* ставится следующим образом. Пусть на отрезке  $[a, b]$  в узлах интерполирования  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  известны значения функции  $f_i = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Требуется построить полином  $P_n(x)$  ( $\deg(P_n) = n - 1$ ) такой, что  $L_n(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

В нашем случае узлы интерполирования являются равноотстоящими, то есть  $x_{i+1} - x_i = h$  для всех  $i = 1, \dots, n - 1$ .

### Конечные разности

Прежде чем перейти к описанию методов, определим понятие *конечных разностей*.

Пусть на действительной прямой выбрана точка  $x_0$  и определен действительный шаг  $h > 0$ . Рассмотрим  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Точки  $x_k$  образуют равномерную сетку  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  с шагом  $h$  на действительной прямой. Функцию, определенную на этой сетке, будем называть *сеточной*. Если  $f$  –

сеточная функция, то через  $f_k$  обозначим значения функции  $f$  в точке  $x_k$  ( $f_k := f(x_k)$ ).

*Конечные разности вперед* для сеточной функции  $f$  определяются следующим образом:

конечные разности вперед 1-го порядка:  $\Delta f_k := f_{k+1} - f_k$ ;

конечные разности вперед 2-го порядка:  $\Delta^2 f_k := \Delta(\Delta f)_k = \Delta f_{k+1} - \Delta f_k$ ;

.....

конечные разности вперед  $n$ -го порядка:  $\Delta^n f_k := \Delta(\Delta^{n-1} f)_k = \Delta^{n-1} f_{k+1} - \Delta^{n-1} f_k$ .

*Конечные разности назад* для сеточной функции  $f$  определяются следующим образом:

конечные разности назад 1-го порядка:  $\nabla f_k := f_k - f_{k-1}$ ;

конечные разности назад 2-го порядка:  $\nabla^2 f_k := \nabla(\nabla f)_k = \nabla f_k - \nabla f_{k-1}$ ;

.....

конечные разности назад  $n$ -го порядка:  $\nabla^n f_k := \nabla(\nabla^{n-1} f)_k = \nabla^{n-1} f_k - \nabla^{n-1} f_{k-1}$ .

*Симметричные (центральные) разности* для сеточной функции  $f$  определяются следующим образом:

симметричные разности 1-го порядка:  $\delta f_k := f_{k+1/2} - f_{k-1/2}$  ( $k$  – полуцелое);

симметричные разности 2-го порядка:  $\delta^2 f_k := \delta(\delta f)_k = \delta f_{k+1/2} - \delta f_{k-1/2}$  ( $k$  – целое);

.....

симметричные разности  $n$ -го порядка:  $\delta^n f_k := \delta(\delta^{n-1} f)_k = \delta^{n-1} f_{k+1/2} - \delta^{n-1} f_{k-1/2}$  ( $k$  – целое, если  $n$  четное).

Если функция  $f$  определена на всей действительной оси, то

$$\Delta f(x) := f(x+h) - f(x);$$

$$\nabla f(x) := f(x) - f(x-h);$$

$$\delta f(x) := f\left(x + \frac{h}{2}\right) - f\left(x - \frac{h}{2}\right)$$

для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

Нетрудно убедиться, что

$$\Delta^n f_k = \nabla^n f_{k+n} = \delta^n f_{k+n/2} = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} C_n^j f_{k+j}.$$

Введем обозначение:

$$f_k^n := \delta^n f_k.$$

### Первый метод Ньютона

Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  – узлы интерполяции,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $x = x(t) = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x(k) = x_k$ .

*Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования вперед* имеет следующий вид:

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + t\Delta f_0 + \frac{t(t-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \dots + \frac{t \cdot (t-1) \cdot \dots \cdot (t-n+2)}{(n-1)!}\Delta^{n-1} f_0,$$

или

$$P_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t \cdot (t-1) \cdot \dots \cdot (t-k+1)}{k!} \Delta^k f_0.$$

### Второй метод Ньютона

Пусть  $x_0, x_{-1}, \dots, x_{-(n-1)}$  – узлы интерполяции,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $x = x(t) = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x(k) = x_k$ .

*Интерполяционная формула Ньютона для интерполирования назад* имеет следующий вид:

$$P_n(x_0 + th) = f_0 + t\nabla f_0 + \frac{t(t+1)}{2!}\nabla^2 f_0 + \dots + \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+n-2)}{(n-1)!}\nabla^{n-1} f_0,$$

или

$$P_n(x_0 + th) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+k-1)}{k!} \nabla^k f_0.$$

### Метод Гаусса

Пусть имеется  $2n+2$  узла интерполяции  $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$ ,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $x = x(t) = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x(k) = x_k$ .

*Интерполяционная формула Гаусса* имеет следующий вид:

$$P_{2n+2}(x_0 + th) = f_0 + tf_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!}f_0^2 + \frac{t(t-1)(t+1)}{3!}f_{1/2}^3 + \dots + \frac{t \cdot (t-1) \cdot (t+1) \cdot \dots \cdot (t+n)}{(2n+1)!}f_{1/2}^{2n+1}.$$

### Метод Стирлинга

Пусть имеется  $2n+1$  узел интерполяции  $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n}$ ,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $x = x(t) = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x(k) = x_k$ .

Интерполяционная формула Стирлинга имеет следующий вид:

$$P_{2n+1}(x_0 + th) = f_0 + tf_0^1 + \frac{t^2}{2!}f_0^2 + \dots + \\ + \frac{t \cdot (t^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (t^2 - (n-1)^2)}{(2n-1)!}f_0^{2n-1} + \\ + \frac{t^2 \cdot (t^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (t^2 - (n-1)^2)}{(2n)!}f_0^{2n}.$$

### Метод Бесселя

Пусть имеется  $2n + 2$  узла интерполяции  $x_0, x_1, x_{-1}, \dots, x_n, x_{-n}, x_{n+1}$ ,  $x_k = x_0 + kh$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $x = x(t) = x_0 + th$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда  $x(k) = x_k$ .

Интерполяционная формула Бесселя имеет следующий вид:

$$P_{2n+2}(x_0 + th) = f_{1/2} + \left(t - \frac{1}{2}\right) f_{1/2}^1 + \frac{t(t-1)}{2!}f_{1/2}^2 + \dots + \\ + \frac{t \cdot (t^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (t^2 - (n-1)^2) \cdot (t-n)}{(2n)!}f_{1/2}^{2n} + \\ + \frac{t \cdot (t^2 - 1^2) \cdot \dots \cdot (t^2 - (n-1)^2) \cdot (t-n) \cdot \left(t - \frac{1}{2}\right)}{(2n+1)!}f_{1/2}^{2n+1}.$$

## 10. Лабораторная работа № 2.

### Численное интегрирование

#### Задание для лабораторной работы

##### Исходные данные:

1. Функция  $f(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu)$ .
2. Метод: П – прямоугольников, Т – трапеций, С – Симпсона.

##### Вход:

1. Выделенный параметр, например  $\gamma$ .
2. Действительные параметры:  $-100 \leq a, b, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu \leq 100$ .
3. Действительные размеры окна:  $-100 \leq A, B, C, D \leq 100$ .
4. Натуральное начальное число разбиений промежутка интегрирования  $n \leq 500$ .
5. Точность  $\Delta = 1; 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$ .

**Выход:**

1. График функции  $F(\gamma) = \int_a^b f(x, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \mu) dx$  на отрезке  $\gamma \in [A, B]$  в окне  $[A, B] \times [C, D]$ .

Для каждого  $\gamma \in [A, B]$  указанным способом вычислить интеграл  $I = F(\gamma)$  с точностью  $\Delta$ , используя принцип Рунге  $|I - I_{2n}| \leq |I_{2n} - I_n|$ .

2. Указать значение  $n_{\max} = \max_{\gamma \in [A, B]} \{n(\gamma)\}$ , где  $n(\gamma)$  – число разбиений отрезка интегрирования, реализующее точность  $\Delta$ .

## 11. Краткое описание методов для лабораторной работы № 2

Задача численного интегрирования состоит в нахождении приближенного значения интеграла

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx.$$

Рассмотрим разбиение отрезка интегрирования  $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ , где  $x_i - x_{i-1} = h = \frac{b-a}{n}$  для всех  $i = 1, \dots, n$ . В этом случае  $I(f)$  можно представить в виде суммы

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx$$

и задача нахождения интеграла сводится к задаче нахождения каждого элемента суммы.

Рассмотрим несколько методов численного интегрирования.

### Метод прямоугольников

Положим

$$y_i := \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Квадратурная формула прямоугольников выглядит следующим образом:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \approx h f(y_i),$$

следовательно,

$$I(f) \approx I_n(f) = h \sum_{i=1}^n f(y_i).$$

### Метод трапеций

*Квадратурная формула трапеций* выглядит следующим образом:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \frac{h}{2} (f(x_i) + f(x_{i-1})),$$

следовательно,

$$I(f) \approx I_n(f) = \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n (f(x_i) + f(x_{i-1})).$$

### Метод Симпсона

Пусть теперь имеется  $2n$  равных интервалов разбиения отрезка интегрирования. В этом случае

$$I(f) = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx.$$

*Квадратурная формула Симпсона* выглядит следующим образом:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x)dx \approx \frac{h}{3} (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})),$$

следовательно,

$$I(f) \approx I_n(f) = \frac{h}{3} \sum_{i=1}^n (f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})).$$

## 12. Исходные данные к лабораторным работам № 1 и 2

1)  $\varepsilon \sin \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^2} + \delta \cos \gamma x.$

4)  $\delta \cos \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^2} + \varepsilon \sin \gamma x.$

2)  $\varepsilon \sin \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^2} + \cos \gamma x.$

5)  $\varepsilon \sin(\alpha + \beta x + \gamma^x).$

3)  $\varepsilon \cos \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^2} + \sin \gamma x.$

6)  $\varepsilon \cos(\alpha + \beta x + \gamma^x).$



- 7)  $(\alpha + \sin |x|^\beta) \cdot \gamma \cdot \cos \delta x.$
- 8)  $\alpha + \gamma \sin |x|^\beta + \varepsilon \cos \delta x.$
- 9)  $(\alpha + \cos |x|^\beta) \cdot \gamma \cdot \sin \delta x.$
- 10)  $\alpha + \gamma \sin |x|^\beta + \varepsilon \sin \delta x.$
- 11)  $\alpha \sin \beta x + \gamma \cos \delta x.$
- 12)  $\varepsilon \sin \frac{\alpha}{\beta x^2 + \gamma x + \delta}.$
- 13)  $(\alpha + \beta x^3) \cdot \sin^2 \gamma x.$
- 14)  $(\alpha + \beta x^3) \cdot \cos^2 \gamma x.$
- 15)  $\varepsilon \sin \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^3} \cdot \cos \delta x.$
- 16)  $\varepsilon \cos \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^3} \cdot \sin \delta x.$
- 17)  $\gamma \sin \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^3} + \varepsilon \cos \delta x.$
- 18)  $\gamma \cos \frac{\beta x}{\alpha^2 - x^3} + \varepsilon \sin \delta x.$
- 19)  $\frac{\alpha}{\beta + x^2} \cdot \cos \frac{\gamma}{(x - \delta)(x - \varepsilon)}.$
- 20)  $\frac{\alpha}{\beta + x^2} \cdot \sin \frac{\gamma}{(x - \delta)(x - \varepsilon)}.$
- 21)  $\alpha \sin \beta x + \gamma \cos |x|^\delta.$
- 22)  $\alpha \sin |x|^\beta + \gamma \cos \delta x.$
- 23)  $\varepsilon \cdot \sin \frac{\alpha}{\beta x^2 + \gamma x + \delta}.$
- 24)  $\alpha \sin \beta x \cdot \cos |x|^\delta.$
- 25)  $\alpha \cos \beta x \cdot \sin |x|^\delta.$
- 26)  $\alpha \sin \left( \operatorname{tg} \frac{\beta}{x - \gamma} \right) + \delta \cos \varepsilon x.$
- 27)  $\alpha \cos \left( \operatorname{tg} \frac{\beta}{x - \gamma} \right) + \delta \sin \varepsilon x.$
- 28)  $\alpha \cos \varepsilon x \cdot \sin \left( \operatorname{tg} \frac{\beta}{x - \gamma} \right).$
- 29)  $\alpha \sin \varepsilon x \cdot \cos \left( \operatorname{tg} \frac{\beta}{x - \gamma} \right).$
- 30)  $\varepsilon \sin \operatorname{tg} \frac{\alpha}{(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}.$
- 31)  $\alpha \sin \frac{\beta}{(x - \gamma)^2} + \delta \cos \varepsilon x.$
- 32)  $\alpha \sin \frac{\beta}{(x - \gamma)^2} \cdot \cos \delta x.$
- 33)  $\alpha \sin \beta x \cdot \cos \frac{\varepsilon}{(x - \mu)^2}.$
- 34)  $\alpha \sin(\operatorname{tg} \beta x) + \varepsilon \cos \gamma x.$
- 35)  $\alpha \cos(\operatorname{tg} \beta x) + \varepsilon \sin \gamma x.$
- 36)  $\alpha \sin \frac{\beta}{(x - \gamma)^2} + \delta \cos \frac{\varepsilon}{(x - \mu)^2}.$
- 37)  $\alpha \sin \beta x + \delta \cos \frac{\varepsilon}{(x - \mu)^2}.$
- 38)  $\alpha \sin(\operatorname{tg} \beta x) \cdot \sin \gamma x.$
- 39)  $\alpha \cos(\operatorname{tg} \beta x) \cdot \cos \gamma x.$
- 40)  $\alpha \sin |x|^\beta + \gamma \cos(\operatorname{tg} \delta x).$
- 41)  $\alpha \cos \left( \operatorname{tg}(\beta x^2 + \gamma x + \delta) \right) \cdot \sin \varepsilon x.$
- 42)  $\varepsilon \sin \frac{\alpha x}{(x - \beta)(x - \gamma)(x - \delta)}.$
- 43)  $\varepsilon \cos \left( \operatorname{tg} \frac{\alpha x}{(x - \beta)(x - \gamma)} \right).$
- 44)  $\alpha \sin \frac{\beta x^2}{(x - \gamma)(x - \delta)} + \varepsilon \cos \mu x^2.$
- 45)  $\alpha \cos \frac{\beta x^2}{(x - \gamma)(x - \delta)} + \varepsilon \sin \mu x^2.$
- 46)  $\alpha \sin \beta^{\gamma \cos \delta x}.$
- 47)  $\alpha \cos \beta^{\gamma \sin \delta x}.$
- 48)  $\alpha \cos(\delta \sin(x - \beta) - \varepsilon \cos(x - \gamma)).$
- 49)  $\alpha \sin(\delta \sin(x - \beta) - \varepsilon \cos(x - \gamma)).$
- 50)  $\alpha \operatorname{tg}(\delta \sin(x - \beta) \cdot \cos(x - \gamma)).$

### 13. Лабораторная работа № 3.

#### Численное решение систем ОДУ

##### Задание для лабораторной работы

##### Исходные данные:

Система

$$\begin{cases} \dot{x} = f_1(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t), \\ \dot{y} = f_2(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t). \end{cases}$$

##### Вход:

1. Действительные параметры:  $-100 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega \leq 100$ .
2. Действительные размеры окна:  $-100 \leq A, B, C, D \leq 100$ .
3. Шаг сетки  $\tau = 1; 0.1; 0.01; 0.001; 0.0001$ .
4. Натуральное число шагов  $0 < n \leq 10000$ .
5. Параметры области  $\Omega$ .
6. Параметр  $T = k\tau$  ( $0 \leq k \leq n$ ).

##### Выход:

1. Не менее 50 контрастных траекторий – решений системы в окне  $[A, B] \times [C, D]$ .
2. Не менее 50 контрастных траекторий – решений системы в окне  $([A, B] \times [C, D]) \setminus \Omega$ , где  $\Omega$  – некоторая область на плоскости  $O_{xy}$ .

На том же графике в области  $\Omega$  отобразить решения системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_3(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t), \\ \dot{y} = f_4(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t) \end{cases}$$

с теми же начальными условиями.

3. Не менее 50 контрастных траекторий – решений системы в окне  $[A, B] \times [C, D]$  для  $t \leq T$ . Продолжить траектории решениями системы

$$\begin{cases} \dot{x} = f_3(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t), \\ \dot{y} = f_4(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \dots, \omega, t) \end{cases}$$

для  $t \geq T$ . В качестве начальных условий  $x(T)$ ,  $y(T)$  для этой системы взять значения  $x(T)$ ,  $y(T)$  из соответствующих решений первой системы.

### Варианты функций $f_3, f_4$

1)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_1^{-1}(x, y, \alpha, \dots, \omega, t), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_2^2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t). \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t). \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) + f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) - f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t). \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) \cdot f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = \frac{f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)}{f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)}. \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = \sin(f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = \cos(f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)). \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = \ln(f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)), \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = f_2^{-1}(x, y, \alpha, \dots, \omega, t). \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} f_3(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = e^{f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)}, \\ f_4(x, y, \alpha, \dots, \omega, t) = (f_1(x, y, \alpha, \dots, \omega, t))^{f_2(x, y, \alpha, \dots, \omega, t)}. \end{cases}$$

### Варианты области $\Omega$ :

1) Окружность. Параметры:  $(x_1, y_1)$  – центр окружности,  $r$  – ее радиус.

2) Эллипс. Параметры:  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  – фокусы эллипса,  $a$  – большая полуось.

3) Треугольник. Параметры:  $V_1, V_2, V_3$  – вершины треугольника.

4) Четырехугольник. Параметры:  $V_1, V_2, V_3, V_4$  – вершины четырехугольника.

## 14. Краткое описание методов для лабораторной работы № 3

Требуется найти численное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad t > 0$$

с начальным условием

$$x(0) = x^0,$$

где  $x = (x_1(t), \dots, x_m(t))^T$ ,  $f(x, t) = (f_1(x, t), \dots, f_m(x, t))^T$ .

При построении числового алгоритма будем считать, что решение этой дифференциальной задачи существует, оно единственно и обладает необходимыми свойствами гладкости.

### Метод Эйлера

При численном решении рассматриваемой задачи будем использовать равномерную сетку по переменной  $t$  с шагом  $\tau > 0$ :

$$\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, \dots\}.$$

Приближенное решение задачи в точке  $t = t_n$  обозначим  $x^n$ .

Простейшая разностная схема для приближенного решения задачи есть

$$\frac{x^{n+1} - x^n}{\tau} = \sigma f(t_{n+1}, x^{n+1}) + (1 - \sigma)f(t_n, x^n), \quad n = 0, 1, \dots$$

При  $\sigma = 0$  имеем *явный метод Эйлера*:

$$x^{n+1} = \tau f(t_n, x^n) + x^n.$$

## 15. Исходные данные к лабораторной работе № 3

1)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y^2 + \gamma, \\ \dot{y} = \delta x + \varphi y^2 + \varepsilon. \end{cases}$$

2)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma, \\ \dot{y} = \delta y + \varphi. \end{cases}$$

3)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \gamma, \\ \dot{y} = \delta xy + \varepsilon. \end{cases}$$

4)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma, \\ \dot{y} = \delta x + \varphi. \end{cases}$$

5)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y + \rho, \\ \dot{y} = \lambda x(\delta y + \varphi x). \end{cases}$$

6)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha xy + \rho, \\ \dot{y} = (\beta x - \gamma)(\delta y + \varphi x). \end{cases}$$

7)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma, \\ \dot{y} = \delta xy + \varphi. \end{cases}$$

8)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta(\alpha x + \gamma)(\delta y + \varphi), \\ \dot{y} = \delta x^2 + \varphi y^2. \end{cases}$$

9)

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha x + \beta y)^2 + \rho, \\ \dot{y} = \delta x + \varphi y^2 + \lambda. \end{cases}$$

10)

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha x + \beta y)^2 + \varepsilon, \\ \dot{y} = (\rho x + \delta y)^2 + \varphi. \end{cases}$$

11)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \varepsilon, \\ \dot{y} = \lambda x + \eta y + \varphi. \end{cases}$$

12)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \varepsilon, \\ \dot{y} = \lambda x + \varphi. \end{cases}$$

13)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \varepsilon, \\ \dot{y} = \lambda x + \beta y + \varphi. \end{cases}$$

14)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \delta y + \rho x + \varepsilon, \\ \dot{y} = \sigma x(\lambda x + \eta y + \varphi). \end{cases}$$

15)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \delta y + \varepsilon, \\ \dot{y} = (\sigma x + \rho y)(\lambda x + \eta y + \varphi). \end{cases}$$

16)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta y^2 + \varepsilon, \\ \dot{y} = (\sigma x + \rho)(\lambda x + \eta y + \varphi). \end{cases}$$

17)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \varepsilon y, \\ \dot{y} = \ln(\lambda x + \beta x^2 + \varphi) + \ln \omega. \end{cases}$$

18)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \kappa y x + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x^3 + \eta y^3 + \psi. \end{cases}$$

19)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \kappa y x + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \varepsilon y + \eta y^3 + \psi. \end{cases}$$

20)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \kappa y x + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x^4 + \varepsilon y + \rho x + \eta y^3 + \psi. \end{cases}$$

21)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y^2 + \kappa x^2 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x^2 + \varepsilon y + \rho x + \psi. \end{cases}$$

22)

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{\varepsilon x + \lambda y} + \alpha \cos(\beta x) + \varphi, \\ \dot{y} = \sqrt{\gamma + \nu x} + \varepsilon e^y + \psi. \end{cases}$$

23)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(e^{\varepsilon x} + \alpha y + \kappa) + \varphi, \\ \dot{y} = \sqrt[3]{\gamma + \nu x} + \varepsilon y + \psi. \end{cases}$$

24)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \kappa x^2 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \varepsilon y + \rho xy + \psi. \end{cases} \quad 33)$$

25)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \kappa x^2 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \varepsilon y + \rho y^2 + \psi. \end{cases} \quad 34)$$

26)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \kappa y^2 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \varepsilon y + \rho x^2 + \psi. \end{cases} \quad 35)$$

27)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \alpha \sin x^2 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \varepsilon y + \psi. \end{cases} \quad 36)$$

28)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varphi e^{\varphi t} + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta t^2 + \psi. \end{cases} \quad 37)$$

29)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varphi \cos(\gamma t) + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta y + \psi. \end{cases} \quad 38)$$

30)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varepsilon x + \varphi e^{\varphi t} + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta y + \psi. \end{cases}$$

31)

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau \operatorname{tg}(\alpha x + \beta y) + \varphi, \\ \dot{y} = \kappa \cos\left(\frac{\pi}{3} + \rho x\right) + \varepsilon^{\delta y} + \psi. \end{cases}$$

32)

$$\begin{cases} \dot{x} = \tau \operatorname{tg}(\alpha z + \beta y) + \varphi x + \xi, \\ \dot{y} = \kappa \sqrt{\rho x + \sigma} + \varepsilon e^{\delta y} + \psi, \\ \dot{z} = \omega y + \zeta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{\alpha x} + e^{\beta z} + \xi, \\ \dot{y} = \varepsilon z + \delta \sin(\kappa x + \rho y) + \psi, \\ \dot{z} = \omega \ln(\varphi + \nu z + \gamma x) + \zeta. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha x + \varepsilon y)(\rho x + \kappa), \\ \dot{y} = \lambda xy + \varphi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \varepsilon y, \\ \dot{y} = \delta x^2 + \beta(\lambda y + \varphi)^2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\beta y^2 + \varphi), \\ \dot{y} = e^{\alpha x} + e^{\delta y} + \gamma. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\alpha x^2 + \delta y + \varepsilon} + \varphi, \\ \dot{y} = \arctg(\beta x^2 + \rho xy) + \psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \frac{\beta y^2 + \alpha y + \delta}{\nu} + \varphi, \\ \dot{y} = \varepsilon x^2 + \psi y^2 + \rho. \end{cases}$$

39)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\alpha x^2 + \delta y + \varepsilon} + \varphi, \\ \dot{y} = e^{\kappa y^{(\beta+\rho x)}} - e. \end{cases}$$

40)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha e^{\delta x} + \sqrt{\nu + \rho y}, \\ \dot{y} = \ln(\beta x + \varphi y + \kappa) + \tau. \end{cases}$$

41)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\alpha x + e) + e^{\delta y} + \psi, \\ \dot{y} = \beta x + \operatorname{tg} y + \kappa. \end{cases}$$

42)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^2 + \beta x + \delta y + \varphi, \\ \dot{y} = \varepsilon x^2 + \psi x + \gamma y + \eta. \end{cases}$$

43)

$$\begin{cases} \dot{x} = (\alpha x + \delta)(\beta y + \psi), \\ \dot{y} = \gamma xy + \varphi. \end{cases}$$

44)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha y + \varphi, \\ \dot{y} = \sin(\delta x + \beta y) + \gamma. \end{cases}$$

45)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\alpha x + \beta y^2 + \varphi), \\ \dot{y} = \psi x + \delta y + \varepsilon. \end{cases}$$

46)

$$\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\alpha x^2 + \beta y + \varphi} + \varepsilon, \\ \dot{y} = \ln(x^2 + \lambda). \end{cases}$$

47)

$$\begin{cases} \dot{x} = e^{\alpha x} + e^{\beta y} + \varphi, \\ \dot{y} = \sqrt{\delta x + \varepsilon y^2} + \lambda. \end{cases}$$

48)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln(\beta y + \sin(\alpha x) + \varphi), \\ \dot{y} = \gamma + \sqrt[3]{\delta \sin \varepsilon x - \lambda}. \end{cases}$$

49)

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda y^2 + \nu ty + \alpha y + \varepsilon x + \varphi, \\ \dot{y} = \beta x + \rho t^2 + e^{\mu t + \delta y} + \psi. \end{cases}$$

50)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^3 + \beta y + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \lambda y^3 + \psi. \end{cases}$$

51)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y + \mu xy + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \eta y + \lambda y^3 + \kappa x^3 + \psi. \end{cases}$$

52)

53)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^5 + \beta y^3 + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \eta y^3 + \lambda y^5 + \psi. \end{cases}$$

54)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^3 + \beta y^3 + \kappa xy + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x^2 + \eta y^3 + \psi. \end{cases}$$

55)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x^3 + \beta y + \kappa xy + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \eta y + \psi. \end{cases}$$

56)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x + \beta y^3 + \kappa y + \varphi, \\ \dot{y} = \delta x + \eta y + \psi. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varepsilon x + \varphi e^{\gamma t} + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta y + \psi e^{\nu t} + \rho. \end{cases}$$

57)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varepsilon x + \varphi e^{\gamma t} + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta t + \rho. \end{cases}$$

60)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \ln(\beta y + \gamma), \\ \dot{y} = \delta x^5 + \varepsilon y^5 + \varphi. \end{cases}$$

58)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varepsilon x + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta \sin \tau t + \rho. \end{cases}$$

61)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \sin \beta y + \gamma y \cos \delta x, \\ \dot{y} = \varepsilon x + \lambda y + \varphi. \end{cases}$$

59)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta y + \varepsilon x + \xi, \\ \dot{y} = \alpha x + \delta y + \psi e^{\gamma t}. \end{cases}$$

62)

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x \cos \beta y + \gamma y \sin \delta x, \\ \dot{y} = \varepsilon x + \lambda y + \varphi. \end{cases}$$

63)

$$\begin{cases} \dot{x} = \ln \left( \alpha x + e \sin^2 \left( \frac{\varphi t}{\omega} \right) \right) + e^{\delta y} + \psi, \\ \dot{y} = (\beta x^2 + \lambda) \cos(\tau t) + \nu x \sin^2(\rho t) + \vartheta \cos^3(\zeta t) + \kappa. \end{cases}$$

64)

$$\begin{cases} \dot{x} = \beta \sin \gamma y + \varphi, \\ \dot{y} = \alpha x + \sqrt{\delta \sin \varepsilon y + \omega x + \psi} + \lambda. \end{cases}$$

## 16. Лабораторная работа № 4.

### Метод итераций

#### Задание для лабораторной работы

#### Исходные данные:

Рекуррентное соотношение  $x_{n+1} = f(x_n, \alpha, \beta)$ .

#### Вход:

1. Действительные параметры:  $-100 \leq \alpha, \beta \leq 100$ .
2. Действительные размеры окна:  $-100 \leq A, B, C, D \leq 100$ .
3. Действительное начальное  $x_0 \in [C, D]$ .
4. Натуральные  $0 < m, n \leq 500$ ,  $p = 1, 2, 3, \dots, 25$ .

#### Выход:

1. Для каждого  $\alpha \in [A, B]$  изобразить в окне  $[A, B] \times [C, D]$   $n$  результатов итераций после вычисления  $m$  предварительных итераций с начальным  $x_0$ .



2. Для каждого  $\alpha \in [A, B]$  изобразить в окне  $[A, B] \times [C, D]$  каждый  $p$ -й результат из  $n$  результатов итераций после вычисления  $m$  предварительных итераций с начальным  $x_0$ .

## 17. Краткое описание методов для лабораторной работы № 4

Требуется найти решение нелинейного уравнения

$$x = g(x).$$

**Метод простой итерации** состоит в том, чтобы выбрать начальное значение  $x_0$  из области определения функции  $g(x)$  и затем последовательно находить приближения  $x_{n+1}$  по правилу

$$x_{n+1} = g(x_n).$$

## 18. Исходные данные к лабораторной работе № 4

- |  |  |
|--|--|
| 1) $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2+2} + \alpha.$                   | 11) $x_{n+1} = \alpha \cdot (1 -  x_n - 1 ).$                        |
| 2) $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n^2-2} + \alpha.$                   | 12) $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{\alpha}{x_n} \right).$ |
| 3) $x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n+2} + \alpha.$                     | 13) $x_{n+1} = \alpha x_n - \cos x_n - 1.$                           |
| 4) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin x_n + 0.25.$                   | 14) $x_{n+1} = \sin x_n + 0.25 + \alpha.$                            |
| 5) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin 2^{x_n}.$                      | 15) $x_{n+1} = \alpha \cdot \cos x_n^3.$                             |
| 6) $x_{n+1} = \sin x_n + \alpha \cdot \cos x_n.$               | 16) $x_{n+1} = \frac{1}{5}x_n^2 + \alpha.$                           |
| 7) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin(\alpha x_n).$                  | 17) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin \frac{x_n}{\beta^2+x_n^2}.$         |
| 8) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin(\alpha x_n^2).$                | 18) $x_{n+1} = \sin \frac{x_n}{x_n^2+2} + \alpha.$                   |
| 9) $x_{n+1} = \alpha \cdot \frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}.$ | 19) $x_{n+1} = \sin \frac{x_n}{x_n^2-2} + \alpha.$                   |
| 10) $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin \frac{1}{x_n}.$               | 20) $x_{n+1} = \sin \frac{x_n}{x_n+2} + \alpha.$                     |

- 21)  $x_{n+1} = \sin\left(\frac{1}{5}x_n^2\right) + \alpha.$
- 22)  $x_{n+1} = \sin\frac{2x_n^3+\beta}{x_n^2} + \alpha.$
- 23)  $x_{n+1} = \sin(1 - x_n^3)^2 + \alpha.$
- 24)  $x_{n+1} = \operatorname{tg} x_n + \alpha.$
- 25)  $x_{n+1} = \alpha \cdot \frac{x_n^3+2^{x_n}}{e^{x_n}}.$
- 26)  $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin(x_n^3) - 1.$
- 27)  $x_{n+1} = \alpha \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{2}(x_n + 1).$
- 28)  $x_{n+1} = \frac{x_n+1}{x_n-2} + \alpha.$
- 29)  $x_{n+1} = 3 \cdot x_n + 1.3^{x_n} + \alpha.$
- 30)  $x_{n+1} = \ln(x_n) + \alpha.$
- 31)  $x_{n+1} = \frac{\alpha}{\ln(|\sin x_n|)}.$
- 32)  $x_{n+1} = \frac{1}{x_n^2} + \alpha \cdot \sin x_n + x_n + 1.$
- 33)  $x_{n+1} = \alpha \sin^2(\cos 3x_n).$
- 34)  $x_{n+1} = \frac{\alpha}{\ln(|x_n|)}.$
- 35)  $x_{n+1} = (1 - x_n^3)^2 + \alpha.$
- 36)  $x_{n+1} = \cos(\sin x_n) + \alpha.$
- 37)  $x_{n+1} = \sin(\cos x_n) + \alpha.$
- 38)  $x_{n+1} = \cos(\operatorname{tg} x_n) + \alpha.$
- 39)  $x_{n+1} = \operatorname{tg}(\cos x_n) + \alpha.$
- 40)  $x_{n+1} = \cos\left(\sin \frac{x_n}{x_n+\beta}\right) + \alpha.$
- 41)  $x_{n+1} = \sin\left(\cos \frac{x_n}{x_n+\beta}\right) + \alpha.$
- 42)  $x_{n+1} = \cos\left(\operatorname{tg} \frac{x_n}{x_n+\beta}\right) + \alpha.$
- 43)  $x_{n+1} = \operatorname{tg}\left(\cos \frac{x_n}{x_n+\beta}\right) + \alpha.$
- 44)  $x_{n+1} = \ln|\sin x_n| + \alpha.$
- 45)  $x_{n+1} = \ln|\cos x_n| + \alpha.$
- 46)  $x_{n+1} = \ln|\operatorname{tg} x_n| + \alpha.$
- 47)  $x_{n+1} = \sin e^{x_n} + \alpha.$
- 48)  $x_{n+1} = \cos e^{x_n} + \alpha.$
- 49)  $x_{n+1} = \operatorname{tg} e^{x_n} + \alpha.$
- 50)  $x_{n+1} = \operatorname{tg} \frac{1}{x_n} + \alpha.$
- 51)  $x_{n+1} = x_n^{-2} + x_n^{-1} + \sin x_n - 3 + \alpha.$
- 52)  $x_{n+1} = \ln|x_n^3+3 \cdot x_n^2-13 \cdot x_n-8| + \alpha.$
- 53)  $x_{n+1} = \ln|x_n^5+x_n-1| + \alpha.$
- 54)  $x_{n+1} = \sin(x_n^2+x_n-\sin x_n-3) + \alpha.$
- 55)  $x_{n+1} = \sin(x_n^3+x_n+4 \cdot \sin x_n) + \alpha.$
- 56)  $x_{n+1} = \cos\left(\sin \frac{1-x_n^3}{1+x_n^3}\right) + \alpha.$
- 57)  $x_{n+1} = \sin\left(\cos \frac{1-x_n^3}{1+x_n^3}\right) + \alpha.$
- 58)  $x_{n+1} = \sin\left(\operatorname{tg} \frac{1-x_n^3}{1+x_n^3}\right) + \alpha.$
- 59)  $x_{n+1} = x_n \cdot \left[12 - \frac{x_n^5}{5 \cdot \alpha}\right].$
- 60)  $x_{n+1} = 1 - \alpha \cdot \sin x_n.$
- 61)  $x_{n+1} = \frac{1}{5} \cdot x_n^5 + \alpha.$
- 62)  $x_{n+1} = \sin(3 \cdot x_n) \cdot \alpha.$
- 63)  $x_{n+1} = \alpha \cdot \sin x_n^2.$
- 64)  $x_{n+1} = e^{\alpha \sin x_n}.$

## 19. Рекомендуемая литература

### Основная

1. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973.
2. *Самарский, А. А.* Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1989.
3. *Волков, Е. А.* Численные методы / Е. А. Волков. – М.: Наука, 1987.
4. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М.: Наука, 1987.
5. *Самарский, А. А.* Задачи и упражнения по численным методам: учеб. пособие / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, Е. А. Самарская. – М.: Эдиториал УРСС, 2000.

### Дополнительная

1. *Копченова, Н. В.* Вычислительная математика в примерах и задачах / Н. В. Копченова, И. А. Марон. – М.: Наука, 1972.
2. *Калиткин, Н. Н.* Численные методы / Н. Н. Калиткин. – М.: Наука, 1978.
3. Сборник задач по методам вычислений: учеб. пособие / под ред. П. И. Монастырного. – М.: Физматлит, 1994.
4. *Рябенский, В. С.* Введение в вычислительную математику / В. С. Рябенский. – М.: Физматлит, 1994.

Учебное издание

**Парфенов Павел Геннадьевич,  
Смирнов Александр Валерьевич**

## **Численные методы**

Методические указания

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова  
Компьютерная верстка А. В. Смирнов

Подписано в печать 11.10.2011. Формат 60 × 84/16.  
Бумага тип. Усл. печ. л. 2,09. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 80 экз. Заказ №

Оригинал - макет изготовлен в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.  
Отпечатано на ризографе.  
Ярославский государственный университет.  
150000 Ярославль, ул. Советская, 14.