

Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова

Н. Л. Майорова, Д. В. Глазков

Методы оптимизации

Учебное пособие

Рекомендовано
Научно-методическим советом университета
для студентов, обучающихся по направлению
Прикладная математика и информатика

Ярославль
ЯрГУ
2015

УДК 519.6 (075)
ББК В138.4я73
М 14

*Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2015 года*

Рецензенты:

д-р техн. наук, проф. Д. О. Бытев;
кафедра математического анализа, теории и методики
обучения математике Ярославского государственного
педагогического университета им. К. Д. Ушинского

Майорова, Наталия Львовна.

М 14 Методы оптимизации : учебное пособие / Н. Л. Майорова,
Д. В. Глазков ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова. — Яро-
славль : ЯрГУ, 2015. — 112 с.

ISBN 978-5-8397-1055-9

Пособие содержит описание методов решения задач нелинейной оптимизации. Подробно разбираются примеры, основанные на некоторых известных задачах.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлениям 01.03.02 (010400.62) Прикладная математика и информатика; 02.03.01 (010200.62) Математика и компьютерные науки (дисциплина «Методы оптимизации», цикл БЗ), очной формы обучения.

УДК 519.6 (075)
ББК В138.4я73

ISBN 978-5-8397-1055-9

©ЯрГУ, 2015

Оглавление

Введение	5
1. Нелинейное программирование	6
1.1. Минимизация функций. Постановка задачи	6
1.2. Теоремы существования	9
2. Задача безусловной оптимизации	11
2.1. Некоторые предварительные рассуждения	11
2.2. Дифференцируемые функции на \mathbb{R}^n	12
2.3. Вспомогательные сведения из теории квадратичных форм .	15
2.4. Необходимые условия минимума в задаче без ограничений	18
2.5. Достаточные условия минимума в задаче без ограничений .	19
3. Задачи с ограничениями	23
3.1. Задачи с ограничениями в виде равенств	23
3.2. Множители Лагранжа	26
4. Общая задача с ограничениями	34
4.1. Условия Куна – Таккера	34
4.2. Постановка задачи математического программирования . .	34
4.3. Формулировка необходимых условий оптимальности	36
5. Правила множителей Лагранжа в общей задаче с ограничениями	43
5.1. Функция Лагранжа	43
5.2. Условия регулярности	43
5.3. Отыскание решений простейших задач	47
6. Выпуклая задача оптимизации	52
6.1. Выпуклые функции	52
6.2. Выпуклая задача оптимизации	58
7. Задача выпуклого программирования	61
7.1. Безусловный минимум	61
7.2. Достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования	61
7.3. Необходимые условия минимума в задаче выпуклого программирования	62
7.4. Теорема Каратеодори	64
7.5. Теорема об очистке	66

8. Простейшая вариационная задача (ПВЗ)	68
8.1. Две задачи	68
8.2. Понятие функционала	69
8.3. Постановка простейшей вариационной задачи	70
8.4. Вспомогательные предложения	72
9. Первая вариация. Уравнение Эйлера	75
9.1. Уравнение Эйлера в интегральной форме	77
9.2. Достаточное условие глобального минимума	78
10. Некоторые случаи интегрируемости уравнений Эйлера	79
10.1. Примеры. Принцип Ферма для задачи геометрической оптики	80
10.2. Задача о наименьшей поверхности вращения	82
10.3. Задача о брахистохроне	83
11. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи	85
11.1. Случай нескольких неизвестных функций	85
11.2. Функционалы, зависящие от старших производных	87
11.3. Изопериметрическая задача	89
12. Задача об оптимальном быстродействии	96
12.1. Понятие об управляемых объектах	96
12.2. Общие подходы к постановке задачи управления	97
12.3. Задача управления	98
12.4. Допустимые управления	100
12.5. Метод динамического программирования	101
12.6. Принцип максимума Понтрягина	103
12.7. Задачи	107
Список литературы	111

Введение

С задачами оптимизации приходится встречаться в различных сферах деятельности человека. Каждое разумное действие является в определенном смысле и оптимальным, так как выбирается после сравнения с другими вариантами.

Исторически с задачами оптимизации человечество столкнулось уже в древние века. Так, уже давно были решены разнообразные задачи геометрического типа, связанные со свойствами элементарных фигур. С возникновением дифференциального исчисления появилась возможность исследования более сложных задач. Первые результаты по минимизации функций были получены Эйлером и Лагранжем. В XIX и начале XX века полностью сформировалось вариационное исчисление, в котором изучаются задачи минимизации функционалов. В конце 1940-х годов начался новый этап развития методов оптимизации. Как всегда, толчком послужили задачи, поставленные практикой. Возникли линейное программирование, выпуклое программирование, теория игр, динамическое программирование, теория оптимального управления, теория дифференциальных игр.

В основу данного пособия положен курс лекций, читаемый одним из авторов (Н. Л. Майоровой) в течение ряда лет на математическом факультете ЯрГУ. Целью данного курса является знакомство с основами теории экстремальных задач. К числу таких основ можно отнести методы решения экстремальных задач нелинейного или математического программирования для конечномерных пространств, выпуклый анализ, простейшую вариационную задачу и ее обобщения, уравнение Эйлера, условия второго порядка, связанный тип экстремума, проиллюстрированный на примере изопериметрической задачи, двойственность задачи условного экстремума, задачи оптимального управления, принцип максимума Понтрягина. Перечисленные вопросы изложены также в используемой литературе [1 – 14].

Существенное содействие в подготовке пособия оказали студенты и магистранты математического факультета ЯрГУ, обучающиеся по направлению «Прикладная математика и информатика», взявшие на себя труд по набору отдельных лекций в TeX. Всем, кто оказал такого рода помощь, авторы выражают самую искреннюю благодарность. Особую признательность за предоставленный материал отдельных разделов курса авторы выражают заведующему кафедрой математического анализа ЯрГУ им. П. Г. Демидова, профессору В. С. Климову.

1. Нелинейное программирование

Нелинейным программированием принято называть раздел математики, в котором изучаются задачи минимизации функций на множествах конечномерного пространства.

1.1. Минимизация функций. Постановка задачи

Через \mathbb{R}^n обозначается n -мерное евклидово пространство. Его элементами являются вектор – столбцы

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

где x_1, \dots, x_n — действительные числа, которые называются компонентами вектора x . Можно использовать запись $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, где T — знак транспонирования.

Стандартным образом вводятся сумма двух векторов

$$x = (x_1, \dots, x_n)^T \quad \text{и} \quad y = (y_1, \dots, y_n)^T,$$

их скалярное произведение (x, y) и произведение вектора x на число $\lambda \in \mathbb{R}^1$:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)^T, \\ \lambda x &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)^T, \\ (x, y) &= x_1 \cdot y_1 + \dots + x_n \cdot y_n, \\ |x| &= \sqrt{(x, x)}, \quad (\|x\| = \sqrt{(x, x)}). \end{aligned}$$

Типичная постановка экстремальной задачи: заданы множество $X \subset \mathbb{R}^n$ и функция $f(x)$, определенная на X . Требуется найти точку минимума или максимума функции f на X . Задача на минимум записывается в виде

$$f(x) \rightarrow \min_{x \in X}. \quad (1.1)$$

При этом f называют *целевой функцией*, X — *допустимым множеством*, любой элемент $x \in X$ — *допустимой точкой* задачи (1.1).

Элемент $x^* \in X$ называется точкой *глобального (абсолютного) минимума* функции f на множестве X или *глобальным решением* задачи (1.1), если

$$f(x^*) \leq f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X. \quad (1.2)$$

Нетрудно понять, что задача минимизации не всегда имеет решение. Например, в случае $n = 1$ у функций

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0 \end{cases} \quad или \quad f(x) = e^{-x^2}$$

нет точек минимума.

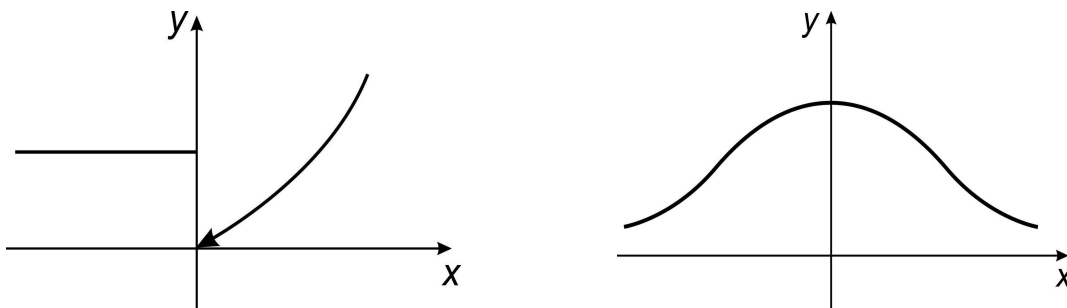


Рис. 1. Примеры функций, не имеющих точек минимума

В дальнейшем при исследовании необходимых условий, которым удовлетворяет точка минимума, предполагается, что задача минимизации имеет решение. Простое достаточное условие существования решения основано на теореме Вейерштрасса и состоит в следующем: если при некотором $c < \infty$ множество $\{x : f(x) \leq c\}$ замкнуто, непусто и ограничено, а функция $f(x)$ на нем полунепрерывна снизу, то задача минимизации функции $f(x)$ имеет решение.

Наряду с задачей минимизации (1.1), то есть задачей на абсолютный минимум, рассматривается задача на относительный минимум.

Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то $\hat{x} \in X$ называется точкой *локального (относительного) минимума* f на X или локальным решением задачи (1.1), если существует $\delta > 0$ такое, что

$$f(\hat{x}) \leq f(x) \quad для \quad \forall x \in X \cap U_\delta(\hat{x}), \quad (1.3)$$

где

$$U_\delta(\hat{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - \hat{x}| \leq \delta\}$$

— шар радиуса $\delta > 0$ с центром в точке \hat{x} .

Множество точек глобального минимума f на X обозначается символом

$$Arg \min_{x \in X} f(x).$$

Любой элемент из этого множества обозначают

$$arg \min_{x \in X} f(x).$$

Задачу максимизации функции f на X запишем в виде

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in X}. \quad (1.4)$$

Заменяя в данных выше определениях слово «минимум» на «максимум» и заменяя в (1.2), (1.3) знак неравенства на противоположный, получаем соответствующие понятия для задачи (1.4).

Точки минимума и максимума называют *точками экстремума*. Задача (1.4) эквивалентна задаче

$$-f(x) \rightarrow \min_{x \in X}.$$

Это позволяет без труда переносить результаты, полученные для задачи минимизации, на задачи максимизации, и наоборот.

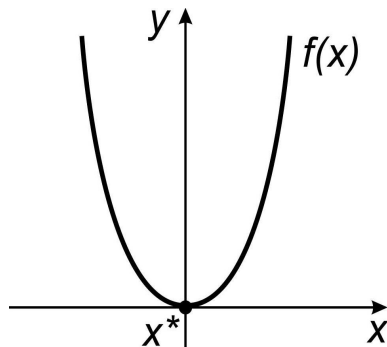


Рис. 2. Квадратичная функция

На рисунке 2 изображен график функции, которая монотонно убывает при $x \leq 0$ и монотонно возрастает при $x \geq 0$. Функция достигает своего минимума в точке $x = x^*$ и монотонна по обе стороны от точки минимума. Такие функции называются *унимодальными*.

Определение. Функция $f(x)$ является *унимодальной* на заданном отрезке $a \leq x \leq b$ в том и только том случае, если она монотонна по обе стороны от единственной на рассматриваемом интервале точки x^* .

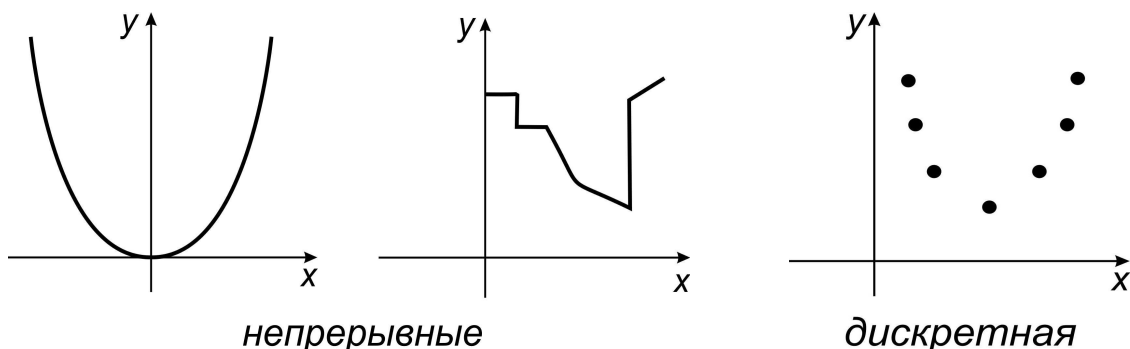


Рис. 3. Примеры унимодальных функций

Таким образом, если x^* — единственная точка минимума $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ оказывается унимодальной на данном интервале тогда и только тогда, когда для точек x_1 и x_2 :

$$\begin{array}{ll} x^* \leq x_1 \leq x_2 & \longrightarrow f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2), \\ x^* \geq x_1 \geq x_2 & \longrightarrow f(x^*) \leq f(x_1) \leq f(x_2). \end{array}$$

Если функция является унимодальной, то локальный минимум автоматически является глобальным минимумом.

Если функция не является унимодальной, то возможно наличие нескольких локальных оптимумов. При этом глобальный минимум можно определить путем нахождения всех локальных оптимумов и выбора наименьшего из них.

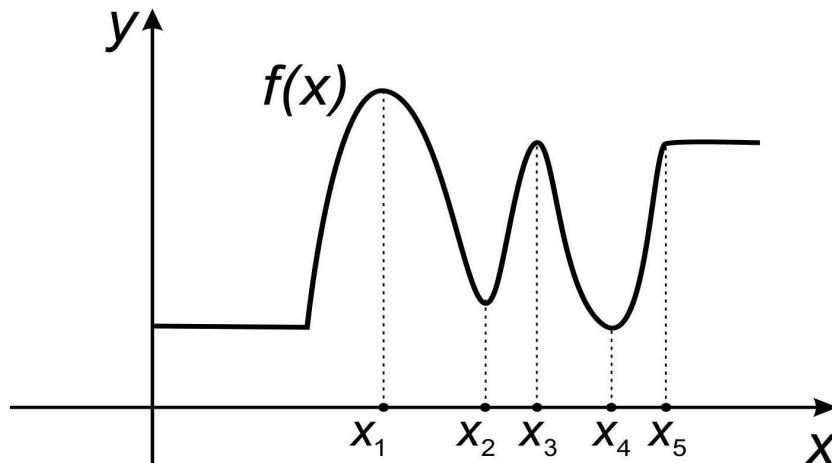


Рис. 4. Примеры экстремумов: x_1 — глобальный минимум, x_2, x_4 — локальные минимумы, x_3 — локальный максимум, x_5 — локальный минимум или максимум

1.2. Теоремы существования

Теорема 1.1. (*Вейерштрасса*) Пусть X — замкнутое ограниченное подмножество \mathbb{R}^n . $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда точка глобального минимума f на X существует.

В дальнейшем окажется полезной и иная форма теоремы 1.1.

Теорема 1.2. Пусть X — замкнутое подмножество \mathbb{R}^n , $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, причем для некоторого $x^0 \in X$ множество

$$N(x^0) = \{x \in X \mid f(x) \leq f(x^0)\}$$

ограничено. Тогда существует точка минимума f на X .

Доказательство. Из замкнутости X и непрерывности f следует, что множество $N(x^0)$ замкнуто и поэтому является компактом. По теореме

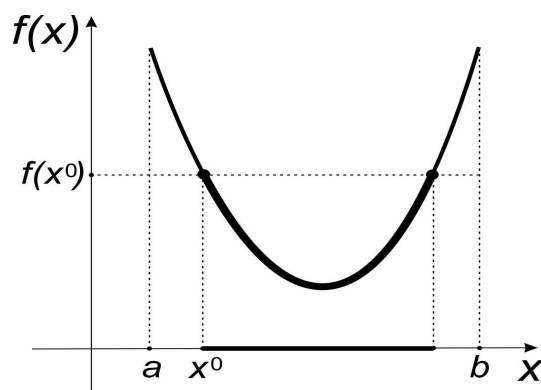


Рис. 5. Иллюстрация теоремы 1.2

1.1 точка минимума f на $N(x^0)$ существует. Из определения $N(x^0)$ ясно, что она же будет точкой минимума f на X .

Или подробнее: пусть $x_k \in N(x^0)$ — произвольная последовательность, $x_k \rightarrow x_0$. Покажем, что $x_0 \in N(x^0)$. В самом деле, из того, что для любого x_k имеет место $f(x_k) \leq f(x^0)$, переходя к пределу, можем получить $f(x_0) \leq f(x^0)$, откуда следует, что $x_0 \in N(x^0)$, то есть множество $N(x^0)$ замкнуто (и ограничено). Значит, $N(x^0)$ — компакт и по теореме Вейерштрасса существует $\min f(x)$ на $N(x^0)$. В силу определения $N(x^0)$ точка глобального минимума на X совпадает с точкой глобального минимума на $N(x^0)$. \square

Для иллюстрации теоремы существования сформулируем следующие утверждения.

Теорема 1.3. *Если X — замкнутое подмножество \mathbb{R}^n , то существует проекция на X любой точки $a \in \mathbb{R}^n$.*

Теорема 1.4. *Если X — выпуклое подмножество \mathbb{R}^n , то для любой точки $a \in \mathbb{R}^n$ существует не более чем одна проекция.*

Теорема 1.5. *Если X — выпуклое замкнутое подмножество \mathbb{R}^n , то для любой точки $a \in \mathbb{R}^n$ существует единственная проекция a на X .*

2. Задача безусловной оптимизации

2.1. Некоторые предварительные рассуждения

Предположим, что функция $f(x)$ одной переменной x определена на открытом интервале (a, b) и n -кратно дифференцируема на этом интервале. Если x^* — внутренняя точка интервала, то по теореме Тейлора можно записать изменение функции f при переходе от точки x^* к точке $x^* + \varepsilon$:

$$f(x^* + \varepsilon) - f(x^*) = \varepsilon \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x^*} + o_{n+1}(\varepsilon),$$

где через $o_{n+1}(\varepsilon)$ обозначена сумма членов, в которых степень ε равна $n + 1$ и выше.

Если x^* — локальный минимум функции f на (a, b) , то по определению должна существовать такая ε -окрестность точки x^* , что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x^*).$$

Из этого неравенства следует, что

$$\varepsilon \cdot \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} + \frac{\varepsilon^2}{2!} \cdot \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} + \dots + \frac{\varepsilon^n}{n!} \cdot \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x^*} + o_{n+1}(\varepsilon) \geq 0.$$

При достаточно малом ε первое слагаемое доминирует над остальными, а так как ε можно выбрать и положительным и отрицательным, то последнее неравенство будет выполняться только в том случае, если

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0.$$

Рассуждая аналогичным образом, нетрудно установить, что рассматриваемое неравенство будет справедливым только тогда, когда

$$\left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x=x^*} \geq 0.$$

Эта же схема применима в случае локального максимума.

Таким образом, получен общий результат, который можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Необходимые условия того, что x^* является точкой локального минимума (максимума) дважды дифференцируемой функции f на открытом интервале (a, b) , выражаются следующими соотношениями:*

$$1) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x^*} = 0, \quad 2) \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x^*} \geq 0 \quad (\leq 0).$$

Эти условия являются необходимыми, то есть когда они не выполняются, то точка x^* не может быть точкой локального минимума (максимума). Если же эти условия выполняются, мы не имеем гарантии того, что точка x^* является точкой локального минимума (максимума).

Например, для $y = x^3$ точка $x^* = 0$ не является точкой локального минимума или максимума, хотя $y'(0) = 0$.

2.2. Дифференцируемые функции на \mathbb{R}^n

Пусть U — открытое подмножество \mathbb{R}^n ; $f: U \rightarrow \mathbb{R}^1$ — числовая функция на U , $a \in U$.

Скалярная функция $f(x)$ n -мерного аргумента x называется *дифференцируемой* в точке a , если существует вектор $p = (p_1, \dots, p_n)^T$ такой, что для всех $h \in \mathbb{R}^n$:

$$f(a+h) - f(a) = (p, h) + \omega(h),$$

где $\omega(h) = o(h)$.

Вектор p , определенный таким образом, называется *градиентом* функции f в точке a и обозначается $f'(a) = \nabla f(a) = \text{grad } f(a)$. Символический вектор

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1} \overline{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \overline{e}_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \overline{e}_n$$

с проекциями

$$\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$$

на оси координат ввел в рассмотрение *Гамильтон*.

Компоненты градиента называются *частными производными* функции f в точке a и обозначаются символами

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a).$$

Напомним, что

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M) - f(M_0)}{M - M_0}$$

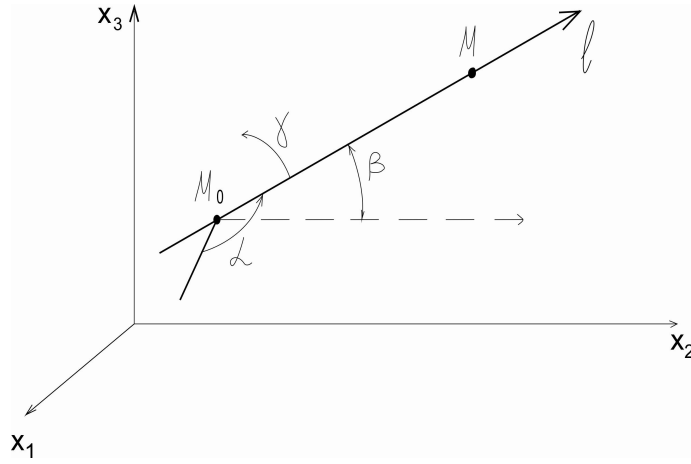


Рис. 6. «Скорость изменения» функции в точке M_0 по направлению l

называется производной от функции $f(M)$ по направлению l и обозначается

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial l} = \frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial l}.$$

Эта производная характеризует «скорость изменения» функции в точке M_0 по направлению l . Обычные частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ также можно рассматривать как производные по координатным направлениям.

Итак, градиент $\nabla f(x)$ определяется равенством

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a), h) + o(h). \quad (2.1)$$

Иначе можно сказать, что функция дифференцируема в точке a , если она допускает линейную аппроксимацию первого порядка в этой точке, то есть найдется линейная функция

$$\tilde{f}(h) = f(a) + (\nabla f(a), h)$$

такая, что $|f(a+h) - \tilde{f}(h)| = o(h)$. Ясно, что градиент определяется однозначно. Вычислять его можно непосредственно по определению, во-вторых, с помощью координатной записи и, в-третьих, с помощью правила дифференцирования сложной функции.

Пусть, например, $f(x)$ — квадратичная функция:

$$f(x) = \frac{(Ax, x)}{2} - (b, x),$$

где A — симметричная $n \times n$ матрица с вещественными элементами. Тогда

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \frac{(A(a+h), a+h)}{2} - (b, a+h) = \frac{(Aa+Ah, a+h)}{2} - (b, a+h) = \\ &= \left[(Aa, a) + (Aa, h) + (Ah, a) + (Ah, h) \right] - (b, a) - (b, h) = \\ &= \frac{(Aa, a)}{2} - (b, a) + (Aa-b, h) + \frac{(Ah, h)}{2} = f(a) + (Aa-b, h) + \frac{(Ah, h)}{2}, \end{aligned}$$

но

$$|(Ah, h)| \leq \|A\| \cdot \|h\|^2,$$

поэтому

$$\frac{(Ah, h)}{2} = o(h).$$

Итак, $f(x)$ дифференцируема в любой точке a и $\nabla f(a) = Aa - b$.

Функция $f(x)$ называется дифференцируемой на множестве $U \subset \mathbb{R}^n$, если она дифференцируема во всех точках U .

Для дифференцируемости функции f в точке a достаточно, чтобы первые производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ существовали в окрестности точки a и были непрерывны в a .

Функция f называется *дважды дифференцируемой* в точке a , если все ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ определены в окрестности точки a и дифференцируемы в этой точке. Для дважды дифференцируемой в точке a функции существуют все вторые производные $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$.

Таким образом, скалярная функция $f(x)$ на \mathbb{R}^n называется *дважды дифференцируемой* в точке a , если она дифференцируема в этой точке и найдется симметричная $n \times n$ матрица H такая, что для всех $h \in \mathbb{R}^n$

$$f(a+h) = f(a) + (\nabla f(a), h) + \frac{(Hh, h)}{2} + o(\|h\|^2). \quad (2.2)$$

Эта матрица H называется *матрицей вторых производных*, матрицей Гессе или *гессианом* и обозначается $f''(x)$ или $\nabla^2 f(x)$:

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Иначе говоря, функция дважды дифференцируема в точке a , если она допускает *квадратичную аппроксимацию* второго порядка в окрестности этой точки, то есть существует квадратичная функция

$$\tilde{f}(h) = f(a) + (\nabla f(a), h) + \frac{(\nabla^2 f(a)h, h)}{2}$$

такая, что

$$|f(a+h) - \tilde{f}(h)| = o(\|h\|)^2.$$

Имеет место формула

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)h_i h_j + o(\|h\|^2),$$

называемая *формулой Тейлора* для функции f в точке a с остатком в форме Пеано.

Для любого $h \in \mathbb{R}^n$ справедливы равенства

$$\left. \frac{d}{dt} f(a+th) \right|_{t=0} = (f'(a), h), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d^2}{dt^2} f(a+th) \right|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d}{dt} f(a+th) \right|_{t=0} \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left[(f'(a+th), h) \right]_{t=0} = (f''(a)h, h). \end{aligned} \quad (2.4)$$

2.3. Вспомогательные сведения из теории квадратичных форм

Функция n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *квадратичной формой*, если

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j = x^T Q x,$$

где

$$Q_{(n \times n)} = [q_{ij}], \quad x^T = (x_1, \dots, x_n).$$

Более подробно

$$\begin{aligned} x^T Q x &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} q_{11} & \dots & q_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \\ &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} q_{11}x_1 + \dots + q_{1n}x_n \\ \vdots \\ q_{n1}x_1 + \dots + q_{nn}x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n q_{ij} x_i x_j. \end{aligned}$$

Без потери общности матрицу Q можно всегда предполагать симметрической. В противном случае Q следует заменить симметрической матрицей

$$\frac{Q + Q^T}{2};$$

значения квадратичной формы при этом не изменятся.

Квадратичная форма называется *знакоположительной*, если неравенство $x^T Q x \geq 0$ выполняется для всех точек $x \in \mathbb{R}^n$.

Квадратичная форма называется *положительно определенной*, если $x^T Q x > 0$ для всех $x \neq 0$. Аналогично определяются *знакоотрицательные* и *отрицательно определенные* квадратичные формы. В этом

случае можно заменить Q на $(-Q)$ и проверить положительную определенность.

С введенными квадратичными формами связаны понятия *положительных* и *неотрицательных* матриц. Симметрическая матрица Q называется *положительной* (*неотрицательной*) и обозначается $Q > 0$ ($Q \geq 0$), если она служит матрицей коэффициентов положительно определенной (знакоположительной) квадратичной формы.

Квадратичная форма и вместе с ней матрица Q называются *неопределенными*, если $x^T Q x$ может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Минор матрицы Q , составленный из строк с номерами i_1, \dots, i_p и столбцов j_1, \dots, j_p , обозначим через $Q \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix}$, то есть

$$Q \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ j_1 & \dots & j_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} q_{i_1 j_1} & \dots & q_{i_1 j_p} \\ q_{i_p j_1} & \dots & q_{i_p j_p} \end{vmatrix}.$$

Минор называется *главным*, если $i_1 = j_1, \dots, i_p = j_p$, то есть он составлен из строк и столбцов с одинаковыми номерами. Например, для

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

главными минорами порядка 1 являются диагональные элементы 1, 5, 9. Главные миноры порядка 2 есть следующие матричные определители:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

Главным минором порядка 3 является определитель самой матрицы Q . Общее количество главных миноров для квадратной матрицы $n \times n$ равно $2^n - 1$.

Миноры

$$D_1 = q_{11}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{vmatrix}$$

и т. д. называются *последовательными главными*.

Существует несколько простых способов, позволяющих проверить, является ли данная матрица (а вместе с ней и соответствующая квадратичная форма) положительно определенной, отрицательно определенной, неопределенной и т. п. Все способы проверки применимы только

тогда, когда Q является *симметрической*. В противном случае следует заменить на

$$\frac{Q + Q^T}{2}.$$

Справедливы следующие утверждения (критерий Сильвестра):

1. Для того чтобы матрица была *положительной* ($Q > 0$), необходимо и достаточно, чтобы ее *последовательные главные миноры* были положительны:

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \dots, \quad D_n > 0.$$

2. Для того чтобы матрица была Q была *неотрицательной* ($Q \geq 0$), необходимо и достаточно, чтобы все ее *главные миноры* были неотрицательны:

$$Q \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n, \quad (p = 1, \dots, n).$$

Отметим, что условий $D_1 \geq 0, \dots, D_n \geq 0$ недостаточно, чтобы $Q \geq 0$. Действительно, пусть

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}, \quad q_{11} = 0, \quad q_{12} = 0, \quad q_{22} < 0.$$

Тогда $D_1 = 0$, $D_2 = 0$, однако

$$q_{11}x_1^2 + 2q_{12}x_1x_2 + q_{22}x_2^2 = q_{22}x_2^2 < 0,$$

то есть отрицательна.

3. Для того чтобы установить, что данная матрица является *отрицательно определенной* (знакоотрицательной), следует умножить ее на (-1) и проверить полученную матрицу на положительную определенность (знакоположительность).

Или воспользоваться следующими критериями:

1) критерием отрицательности матрицы:

$$(-1)^p \cdot D_p > 0, \quad p = 1, \dots, n;$$

2) критерием неположительности матрицы:

$$(-1)^p \cdot Q \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_p \\ i_1 & \dots & i_p \end{pmatrix} \geq 0, \quad p = 1, \dots, n.$$

Можно определять *выпуклость* функций следующим образом. Если соответствующая функции матрица Гессе положительно определена, то функция выпукла.

Замечание: при проверке матрицы на *неопределенность* достаточно убедиться в том, что, по крайней мере, два диагональных элемента имеют разные знаки:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2.4. Необходимые условия минимума в задаче без ограничений

Условия экстремума гладких функций на всем пространстве хорошо известны. Однако их надо рассматривать, так как они служат моделью, по которой строятся аналогичные условия в более сложных случаях.

Рассматривается задача

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

называемая задачей безусловной оптимизации или задачей без ограничений.

Теорема 2.2. (Ферма) Если \hat{x} — локальное решение задачи (2.5) и функция f дифференцируема в точке \hat{x} , то

$$f'(\hat{x}) = 0. \quad (2.6)$$

Доказательство. Так как \hat{x} — решение (2.5), то для любого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ и достаточно малых $t > 0$ справедливо неравенство

$$0 \leq f(\hat{x} + th) - f(\hat{x}) = (f'(\hat{x}), th) + o(th).$$

Разделив обе части неравенства на t и перейдя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\hat{x} + th) - f(\hat{x})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t(f'(\hat{x}), h) + o(th)}{t} = (f'(\hat{x}), h),$$

то есть $(f'(\hat{x}), h) \geq 0$, что верно для $\forall h \in \mathbb{R}^n$, то есть h — произвольный фиксированный вектор. Положим $h = -f'(\hat{x})$. Тогда

$$-(f'(\hat{x}), f'(\hat{x})) \geq 0 \quad \text{откуда} \quad f'(\hat{x}) = 0.$$

□

Точка \hat{x} , удовлетворяющая (2.6), называется *стационарной* или *критической* точкой функции f .

Теорема является лишь необходимым условием. Если какая-либо точка \hat{x} стационарна, то она не обязана быть точкой минимума. Она может быть точкой максимума или седловой точкой (точка перегиба). Только для выпуклых функций такая ситуация невозможна, а именно: если f — выпуклая функция, дифференцируемая в точке \hat{x} и $\nabla f(\hat{x}) = 0$, то \hat{x} — точка глобального минимума f на \mathbb{R}^n .

Таким образом, для выпуклых функций необходимое условие экстремума является и достаточным, причем эта ситуация является общей и для других типов выпуклых экстремальных задач.

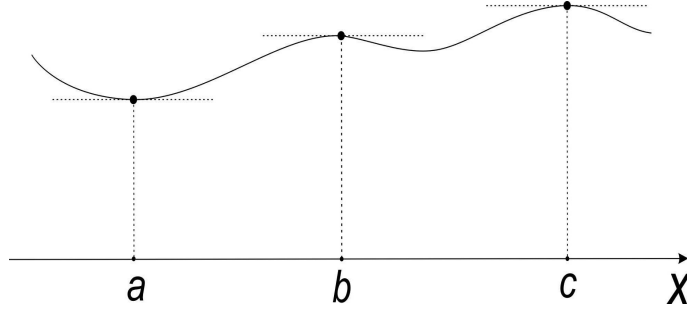


Рис. 7. Точки, удовлетворяющие условиям теоремы 2.2

Теорема 2.3. *(необходимое условие II порядка) Если \hat{x} — локальное решение задачи (2.5) и функция f дважды дифференцируема в точке \hat{x} , то*

$$(f''(\hat{x})h, h) \geq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, \quad (2.7)$$

(или $f''(\hat{x}) \geq 0$, то есть неотрицательно определенная квадратичная форма).

Доказательство. По теореме 2.2 $f'(\hat{x}) = 0$. Тогда для $\forall h \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$0 \leq f(\hat{x} + th) - f(\hat{x}) = \frac{1}{2}(f''(\hat{x})th, th) + o(|th|^2)$$

при всех достаточно малых t . Разделив обе части неравенства на t^2 и перейдя к пределу при $t \rightarrow 0$, получаем $(f''(\hat{x})h, h) \geq 0$. \square

2.5. Достаточные условия минимума в задаче без ограничений

Теорема 2.4. *Пусть функция f дважды дифференцируема в точке $a \in \mathbb{R}^n$. Предположим, что $f'(a) = 0$, а матрица $f''(a)$ положительно определена, то есть $(f''(a)h, h) > 0$ для $\forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$. Тогда a есть локальное решение задачи (2.5).*

Доказательство. Допустим противное. Тогда существует последовательность x_k , обладающая свойствами:

$$x_k \neq a, \quad x_k \rightarrow a; \quad f(x_k) \leq f(a).$$

Представим x_k в виде $x_k = a + \alpha_k h^k$, где $\alpha_k = \|x_k - a\|$, тогда

$$h^k = \frac{x_k - a}{\alpha_k} = \frac{x_k - a}{\|x_k - a\|}.$$

Поскольку $|h^k| = 1$, то без ограничения общности можно считать, что $h^k \rightarrow h, |h| = 1$. Учитывая, что $f'(a) = 0$, имеем

$$0 \geq f(x_k) - f(a) = \frac{1}{2}(f''(a)h^k, h^k)\alpha_k^2 + o(\alpha_k^2\|h^k\|^2).$$

Разделив обе части на α_k^2 и перейдя к пределу при $\alpha_k \rightarrow 0$, получим $(f''(a)h, h) \leq 0$, что противоречит условию теоремы. \square

Если в точке a выполняются необходимые условия I и II порядков (то есть $\nabla f(a) = 0$ и $\nabla^2 f(a) \geq 0$), но не выполняется достаточное условие ($\nabla^2 f(a)$ не является положительно определенной), то a может и не являться точкой минимума (например, $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}^1$) и в принципе анализ можно продолжить с помощью старших производных. Для одномерного случая правило действий хорошо известно (нужно найти первую отличную от 0 производную), для многомерного случая техника вычислений сложна.

Таким образом:

случай $n = 1$: условия $f'(a) = 0$, $f''(a) \geq 0$, $f''(a) > 0$;

случай $n = 2$: интерпретация условий $f'(a) = 0$ (система из частных производных), $f''(a) \geq 0$, $f''(a) > 0$ — критерий Сильвестра положительной определенности матрицы.

Пример 2.1. Для функции

$$f(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2^3 - 10x_1x_2 + x_2^2$$

определить классификацию точки $\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 4x_1 + 4x_2^3 - 10x_2, & \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 12x_1x_2^2 - 10x_1 + 2x_2, \\ \nabla f(\bar{x}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

то есть \bar{x} — стационарная точка. Вычислим Гессиан функции $f(x)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 24x_1x_2 + 2 = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 12x_2^2 - 10 = -10,$$

$$H = \nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\nabla^2 f(\bar{x})$ является неопределенной, так как по критерию Сильвестра $D_1 > 0$, $D_2 < 0$. Например,

$$x^T H x > 0 \quad \text{при} \quad x = (0, 1) \quad \text{и} \quad x^T H x < 0 \quad \text{при} \quad x = (1, 1).$$

Поэтому $\bar{x} = (0, 0)$ представляет собой *седловую точку*.

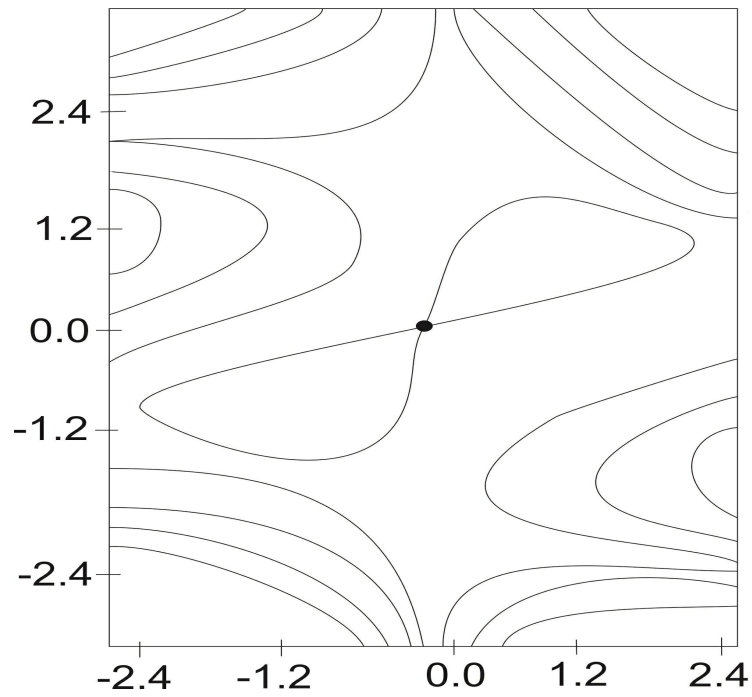


Рис. 8. Линии уровня исследуемой функции

$$x^T H x = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$x^T H x = (1, 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -14 < 0.$$

□

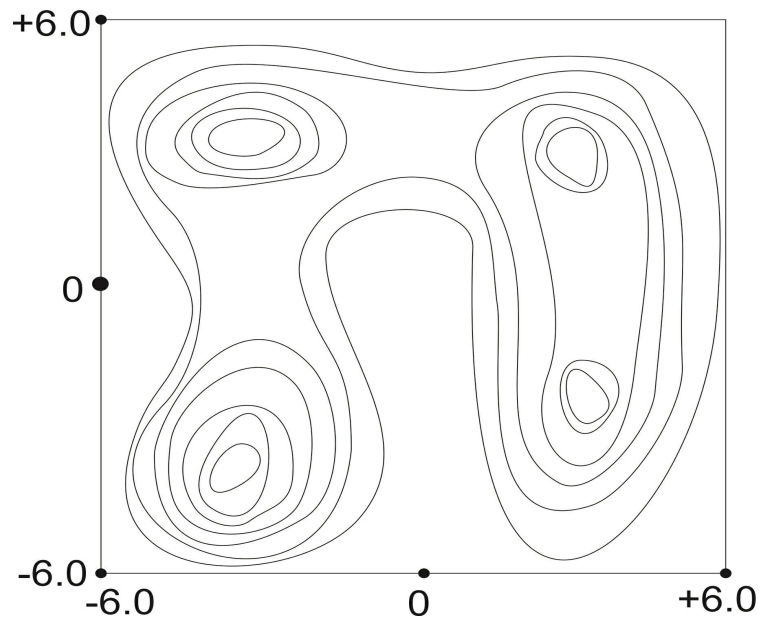


Рис. 9. Линии уровня функции Химмельблау

Пример 2.2. Нарисовать линии уровня функции Химмельблау:

$$f(x) = [x_1^2 + x_2 - 11]^2 + [x_1 + x_2^2 - 7]^2.$$

Эта функция имеет 4 различных минимума.

Пример 2.3. Найти экстремумы:

$$f(x) = x_1^3 + x_2^3 - 3x_1x_2 \rightarrow \min.$$

Можно показать, что критическая точка $x^{(1)} = (0, 0)$ не является точкой минимума или максимума, а критическая точка $x^{(2)} = (1, 1)$ является точкой локального минимума.

Пример 2.4. Исследовать на экстремумы функцию

$$f(x) = (x^2 - 1)^3.$$

Решение: В качестве градиента скалярной функции выступает ее производная

$$f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 \cdot 2x = 6x(x - 1)^2(x + 1)^2 = \nabla f(x);$$

$$x = 0, \quad x = 1, \quad x = -1$$

— критические точки. В этих точках выполняется необходимое условие I порядка.

Далее имеем

$$\begin{aligned} f''(x) &= 6(x^2 - 1)^2 + 6x \cdot 2(x^2 - 1) \cdot 2x = \\ &= 6(x - 1)^2(x + 1)^2 + 12x(x - 1)(x + 1) = \\ &= 6(x^2 - 1)(x^2 - 1 + 4x^2) = 6(x^2 - 1)(6x^2 - 1) = \nabla^2 f(x) = H(x). \end{aligned}$$

Значения

$$H(1) = H(-1) = 0, \quad H(0) = 6.$$

То есть во всех трех точках матрица Гессе положительно полуопределена, а следовательно, выполняются необходимые условия минимума II порядка. Однако лишь для точки $x = 0$ имеем $H(0) > 0$, т. е. критическая точка $x = 0$ — точка глобального минимума. \square

3. Задачи с ограничениями

Ранее были рассмотрены необходимые и достаточные условия оптимальности решений оптимизационных задач без ограничений. Однако ряд инженерных задач связан с оптимизацией при наличии некоторого количества ограничений на управляемые переменные. Такие ограничения существенно уменьшают размеры области, в которой проводится поиск оптимума. На первый взгляд может показаться, что уменьшение размеров допустимой области должно упростить процедуру поиска оптимума. Между тем, напротив, процесс оптимизации становится более сложным, поскольку установленные выше критерии оптимальности нельзя использовать при наличии ограничений. При этом может нарушаться даже основное условие, в соответствии с которым оптимум достигается в стационарной точке, характеризующейся нулевым градиентом. Например, безусловный минимум функции $f(x) = (x - 2)^2$ имеет место в стационарной точке $x = 2$. Но если задача минимизации решается с уче-

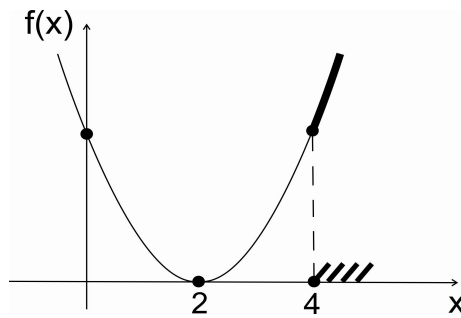


Рис. 10. График функции $f(x) = (x - 2)^2$

том ограничения $x \geq 4$, то будет найден *условный минимум*, которому соответствует точка $x = 4$. Эта точка не является стационарной точкой функции f , так как $f'(4) = 4$. Поэтому необходимо сформулировать новые условия оптимальности решений задач с ограничениями.

3.1. Задачи с ограничениями в виде равенств

Рассмотрим общую задачу минимизации, содержащую несколько ограничений в виде равенств:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \subset \mathbb{R}^n, \quad f_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, N.$$

Задача $f(x) \rightarrow \min, x \in X \subset \mathbb{R}^n$ называется задачей *условной оптимизации* (условной задачей), если X — собственное подмножество \mathbb{R}^n . Для такой задачи сохраняют силу утверждения теорем, являющихся необходимыми и достаточными условиями оптимума в безусловной задаче, если локальное решение x^* условной задачи является внутренней точкой допустимого множества X ($x^* \in \text{int} X$). Однако для многих

условных задач минимум достигается именно на границе, в силу чего для них эти классические результаты анализа не применимы. Вообще, при переходе от безусловных к условным задачам все вопросы оптимизации становятся более сложными.

Геометрическая интерпретация задач оптимизации основана на понятии *линий* (или поверхностей) *уровня* функции f , то есть множеств вида

$$L_\alpha = \{x \mid f(x) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Для геометрической интерпретации двумерной задачи необходимо изобразить ее допустимое множество X и несколько характерных линий уровня целевой функции f . Чтобы отразить характер изменения функции, у данной линии уровня L_α полезно ставить знак «+» с той стороны, где f принимает значения больше α , и знак «-» — с другой. Если функция f дифференцируема в точке x , то градиент $f'(x)$ ортогонален к проходящей через x линии уровня и направлен (если $f'(x) \neq 0$) в сторону возрастания функции, то есть в сторону знака «+».

В геометрическом плане поиск (глобального) решения сводится к нахождению минимального числа α^* среди всех α таких, что линия уровня L_α имеет непустое пересечение с X . При этом любая точка $x^* \in L_{\alpha^*} \cap X$ является решением задачи, а само $\alpha^* = f(x^*)$ — минимальным значением функции f на X . Возможны два случая: точка x^* лежит внутри X и на границе.

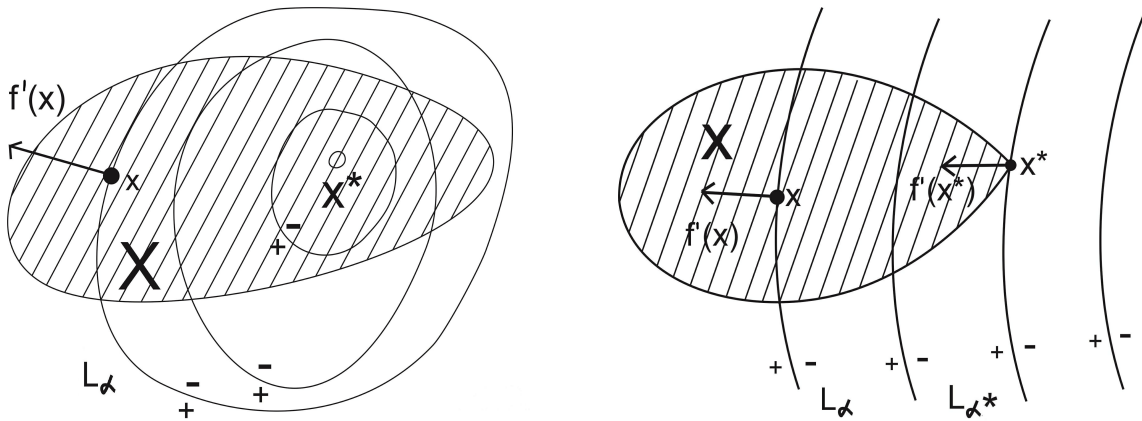


Рис. 11. Варианты возможного расположения оптимальной точки x^*

Пример 3.1.

$$f(x) = f(x_1, x_2) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \rightarrow \min, \\ X : x_1^2 + x_2^2 \leq 1.$$

Решение: линии уровня L_α функции f при $\alpha > 0$ являются окружностями радиуса $\sqrt{\alpha}$, при $\alpha = 0$ вырождаются в точку $(2, 1)$, при $\alpha < 0$ пусты.

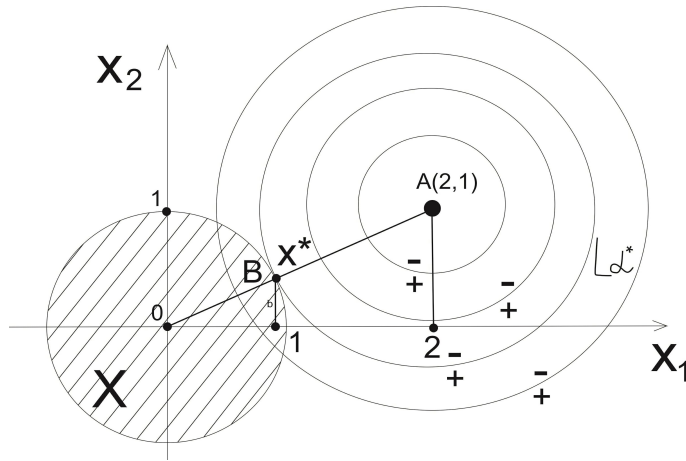


Рис. 12. Линии уровня функции

Здесь L_{α^*} — это та из указанных окружностей, которая касается круга X . Из подобия треугольников найдем величины a и b :

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{1}, \quad \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{5}};$$

$OA = \sqrt{5}$, $OB = 1$, где $O(0, 0)$, $A(2, 1)$, $B(a, b)$ — точка пересечения круга X и линии уровня L_{α^*} . Тогда $f_{\min} = (OA - OB)^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 = 6 - 2\sqrt{5}$ в точке x^* . Откуда следует $x^* = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. \square

Наряду с условными задачами в курсе математического анализа изучается так называемая *классическая задача на условный экстремум*, где допустимое множество X задается системой конечного числа уравнений:

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, N\},$$

то есть явно указывается не само допустимое множество, а система, его определяющая.

Эта задача может быть решена как задача безусловной оптимизации, полученная путем исключения из целевой функции N независимых переменных с помощью заданных неравенств, то есть уменьшением размерности исходной задачи с n до $n - N$.

Пример 3.2.

$$\begin{aligned} f(x) &= x_1 x_2 x_3 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Решение: Исключив x_3 из $f_1(x) = 0$, получаем оптимизационную задачу с двумя переменными без ограничений:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 (1 - x_1 - x_2).$$

\square

Однако метод исключения переменных применим лишь в тех случаях, когда уравнения ограничений можно разрешить относительно некоторого конкретного набора независимых переменных. Часто этот процесс становится весьма трудоемкой процедурой, если вообще возможной.

Таким образом, при решении задач, содержащих сложные ограничения в виде равенств, целесообразно использовать метод множителей Лагранжа.

3.2. Множители Лагранжа

С помощью метода множителей Лагранжа устанавливаются необходимые условия, позволяющие идентифицировать точки оптимума в задачах с ограничениями. При этом задача с ограничениями преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации, в которой фигурируют некоторые неизвестные параметры, называемые *множителями Лагранжа*.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_1(x) = 0. \quad (3.1)$$

В соответствии с методом множителей Лагранжа эта задача преобразуется в эквивалентную задачу безусловной оптимизации:

$$L(x, \lambda) = f_0(x) + \lambda f_1(x) \rightarrow \min. \quad (3.2)$$

Функция $L(x, \lambda)$ называется *функцией Лагранжа*, λ — неизвестная постоянная, называемая *множителем Лагранжа*. На знак λ никаких ограничений не накладывается.

Пусть при заданном значении $\lambda = \lambda_0$ безусловный минимум функции $L(x, \lambda)$ по x достигается в точке $x = x_0$ и x_0 удовлетворяет уравнению $f_1(x) = 0$. Тогда x_0 минимизирует (3.1), так как для всех x , удовлетворяющих $f_1(x) = 0$, $\min L(x, \lambda) = \min f_0(x)$.

Пример 3.3.

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_1^2 + x_2^2 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= 2x_1 + x_2 - 2 = 0. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= x_1^2 + x_2^2 + \lambda(2x_1 + x_2 - 2) \rightarrow \min, \\ \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 2x_1 + 2\lambda = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0, \end{aligned}$$

откуда $x_1^0 = -\lambda$, $x_2^0 = -\lambda/2$.

Для того чтобы проверить, соответствует ли стационарная точка x^0 минимуму, вычислим элементы матрицы Гессе функции $L(x, \lambda)$:

$$H_L(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

которая оказывается положительно определенной. Это означает, что $L(x, \lambda)$ — выпуклая функция и координаты $x_1^0 = -\lambda$ и $x_2^0 = -\lambda/2$ определяют точку глобального минимума. Оптимальное значение λ находится путем подстановки x_1^0 и x_2^0 в уравнение $2x_1 + x_2 - 2 = 0$.

$$-2\lambda - \frac{\lambda}{2} = 2; \quad -\frac{5}{2}\lambda = 2; \quad \lambda = -\frac{4}{5}.$$

Таким образом, *локальный минимум* достигается при $x_1^0 = 4/5$; $x_2^0 = 2/5$ и равен $f_0(x) = 4/5$. \square

Если же при решении системы $\frac{\partial L}{\partial x_i} = 0$ ($i = \overline{1, n}$) в виде явных функций получить λ нельзя, то значения x и λ находятся путем решения системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & (i = \overline{1, n}); \\ f_k(x) = 0 & (k = \overline{1, N}). \end{cases}$$

Для каждого из решений следует вычислить элементы матрицы Гессе функции L для определения положительной или отрицательной определенности соответствующей квадратичной формы.

Если x_0 — решение задачи (3.1) – (3.2), то по теореме Ферма имеем $f'_0(x_0) + \lambda_0 f'_1(x_0) = 0$, то есть градиенты $f'_0(x_0)$ и $f'_1(x_0)$ коллинеарны.

Можно показать, что допустимая (критическая) точка \bar{x} , в которой данное условие коллинеарности не выполняется, не может быть точкой минимума задачи: из \bar{x} можно сместиться, оставаясь на линии $f_1(x) = 0$ так, что значение целевой функции f_0 уменьшится.

Пример 3.4.

$$\begin{aligned} f_0(x) = x_1 + x_2 &\rightarrow \min, \\ x_1^2 + x_2^2 &= 1. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} L(x, \lambda) &= x_1 + x_2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + 2\lambda x_1 = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 1 + 2\lambda x_2 = 0 \\ f_1(x) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{aligned} (x^{(1)}, \lambda_1) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ (x^{(2)}, \lambda_2) &= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned} \end{aligned}$$

Матрица Гессе

$$H = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix},$$

откуда

$$H(x^{(1)}, \lambda_1) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

отрицательно определена;

$$H(x^{(2)}, \lambda_2) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

положительно определена. Следовательно, $(x^{(1)}, \lambda_1)$ соответствует максимуму функции L , $(x^{(2)}, \lambda_2)$ соответствует минимуму функции L , рассматриваемой как функция переменной x . Подчеркнем, что если рассматривать функцию L как функцию трех переменных x_1, x_2, λ , то точки $(x^{(1)}, \lambda_1)$ и $(x^{(2)}, \lambda_2)$ не окажутся точками минимума или максимума L , а будут являться седловыми точками функции $L(x, \lambda)$. \square

Метод множителей Лагранжа распространяется и на случай, когда задача имеет несколько ограничений в виде равенств. Пусть

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min \\ f_k(x) &= 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad x \in X. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Функция Лагранжа принимает следующий вид:

$$L(x, \Lambda) = \lambda_0 f_0(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k(x).$$

Здесь $\lambda_0, \dots, \lambda_N$ — множители Лагранжа. Приравнивая частные производные L по x к нулю, получаем систему из n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_1} = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial L(x, \lambda)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

Если найти решение системы в виде функций вектора λ затруднительно, можно расширить систему путем включения в нее ограничений в виде равенств: $f_1(x) = 0, \dots, f_N(x) = 0$. Затем проводится процедура проверки стационарных точек на основе вычисления элементов матрицы Гессе.

Частные производные функции Лагранжа по координатам вектора x имеют вид

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda_0, \Lambda) = \lambda_0 \frac{\partial f_0}{\partial x_j}(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(x), \quad j = \overline{1, n}.$$

Составленный из них вектор можно обозначить

$$L'_x(x, \lambda_0, \Lambda) = \lambda_0 \nabla f_0(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla f_k(x). \quad (3.4)$$

Справедлива теорема о необходимых условиях локальной оптимальности в задаче (3.3), известная как правило множителей Лагранжа.

Теорема 3.1. (*Правило множителей Лагранжа*) Пусть функции f_0, f_1, \dots, f_N непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки $x^* \in \mathbb{R}^n$. Если x^* — локальное решение задачи (3.3), то существует число λ_0^* и вектор $\Lambda^* = (\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*)$, не равные нулю одновременно и такие, что

$$L'_x(x^*, \lambda_0^*, \Lambda^*) = 0. \quad (3.5)$$

Если при этом градиенты $\nabla f_1(x^*), \dots, \nabla f_N(x^*)$ линейно независимы (условие регулярности), то $\lambda^* \neq 0$.

Условие (3.5) называется условием стационарности функции Лагранжа.

Условие (3.5) с учетом (3.4) означает, что градиенты $\nabla f_0(x^*)$ и $\nabla f_k(x^*)$, $k = \overline{1, N}$ линейно зависимы. В частности, если $N = 1$, то они коллинеарны.

Как и обычно, любая точка x^* , удовлетворяющая при некоторых λ_0^* и Λ^* условию (3.5) и условию допустимости $f_k(x^*) = 0$, $k = \overline{1, N}$, называется *стационарной точкой* задачи (3.3). Она определяется из системы $n + N$ уравнений с $n + N + 1$ неизвестными. Заметим, что в случае $\lambda_0^* \neq 0$ всегда можно считать $\lambda_0^* = 1$ (для этого следует поделить все множители Лагранжа на λ_0^*), то есть неизвестных в системе будет также $n + N$.

Поэтому, если выполняется указанное в теореме условие *регулярности*, то все сводится к случаю $\lambda_0^* = 1$ и можно ограничиться рассмотрением функции Лагранжа вида

$$L(x, \Lambda) = L(x, 1, \Lambda) = f_0(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k f_k(x),$$

которую называют *регулярной*.

Замечание. Как и в безусловной задаче оптимизации, стационарные точки не обязаны быть ее решениями. Здесь также существуют необходимые и достаточные условия оптимальности с привлечением вторых производных $L''_{xx}(x, \lambda_0, \Lambda)$, то есть с проверкой знакопостоянства соответствующей функции $L(x, \lambda_0, \Lambda)$ матрицы Гессе.

В более симметричной форме систему из $n + N$ уравнений для определения стационарных точек можно записать в виде

$$L_x = 0, \quad L_\lambda = 0.$$

Со времен Лагранжа почти на протяжении целого века правило множителей формулировалось с $\lambda_0 = 1$, хотя без дополнительных предположений (типа линейной независимости) в таком виде оно неверно. Например, рассмотрим задачу:

$$x_1 \rightarrow \inf, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Очевидным и единственным решением является $\hat{x} = (0, 0)$, ибо это единственная допустимая точка.

Составим функцию Лагранжа с $\lambda_0 = 1$ и применим алгоритм

$$L = x_1 + \lambda(x_1^2 + x_2^2),$$

откуда

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 2\lambda x_1 + 1 = 0, \\ L'_{x_2} = 2\lambda x_2 = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2\lambda}, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

если $\lambda \neq 0$, но условие $x_1 = -\frac{1}{2\lambda}$ несовместимо с условием связи $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Условие линейной независимости здесь не выполнено:

$$\nabla f_1 = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через

$$L''_{xx}(x, \lambda_0, \Lambda) = \lambda_0 \nabla^2 f_0(x) + \sum_{k=1}^N \lambda_k \nabla^2 f_k(x)$$

матрицу вторых производных функции Лагранжа по координатам вектора x .

Теорема 3.2. Пусть функции f_0, f_1, \dots, f_N дважды дифференцируемы в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$ и непрерывно дифференцируемы в ее некоторой окрестности, причем градиенты $\nabla f_1(x^*), \dots, \nabla f_N(x^*)$ линейно независимы. Если x^* — локальное решение задачи (3.3), то

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda_0^*, \Lambda^*)h, h) \geq 0$$

при любых λ_0^*, Λ^* , удовлетворяющих (3.5), и всех $h \in \mathbb{R}^n$ таких, что

$$(\nabla f_k(x^*), h) = 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Теорема 3.3. Пусть функции f_0, f_1, \dots, f_N дважды дифференцируемы в точке $x^* \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющей условиям $f_k(x^*) = 0$, $k = \overline{1, N}$. Предположим, что при некоторых λ_0^* и Λ^* выполняется условие (3.5) и, кроме этого,

$$(L''_{xx}(x^*, \lambda_0^*, \Lambda^*)h, h) > 0$$

при всех ненулевых $h \in \mathbb{R}^n$ и таких, что $(\nabla f_k(x^*), h) = 0$, $k = \overline{1, N}$. Тогда x^* — строгое локальное решение задачи (3.3).

Теорема 3.2 представляет собой необходимое условие II порядка наличия экстремума в точке x^* , а теорема 3.3 — достаточное условие локального решения рассматриваемой задачи.

В простейших случаях сформулированные теоремы 3.1 – 3.3 позволяют решить задачу в явном виде.

Пример 3.5. Найти локальное решение задачи

$$\frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 \rightarrow \min,$$

$$x_1^3 + x_2^3 = 1, \quad \text{где } a > 0, b > 0 \text{ — заданные числа.}$$

Решение: выпишем регулярную функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}ax_1^2 + \frac{1}{2}bx_2^2 + \lambda(x_1^3 + x_2^3 - 1),$$

так как ясно, что указанное в теореме 3.1 условие регулярности здесь выполнено.

Поскольку $L'_x(x_1, x_2, \lambda) = (ax_1 + 3\lambda x_1^2, bx_2 + 3\lambda x_2^2)$, то система для определения стационарных точек имеет вид

$$\begin{cases} ax_1 + 3\lambda x_1^2 = 0, \\ bx_2 + 3\lambda x_2^2 = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1(a + 3\lambda x_1) = 0, \\ x_2(b + 3\lambda x_2) = 0, \\ x_1^3 + x_2^3 = 1. \end{cases}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} 1) \quad & x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad \lambda = -\frac{b}{3}; \\ 2) \quad & x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad \lambda = -\frac{a}{3}; \\ 3) \quad & x_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \quad \lambda = -\frac{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}{3}. \end{aligned}$$

$$x_1 = -\frac{a}{3\lambda}, \quad x_2 = -\frac{b}{3\lambda} \rightarrow -\frac{a^3}{27\lambda^3} - \frac{b^3}{27\lambda^3} = 1; \quad -\frac{a^3 + b^3}{27\lambda^3} = 1.$$

Далее,

$$L''_{xx}(x_1, x_2, \lambda) = \begin{pmatrix} a + 6\lambda x_1 & 0 \\ 0 & b + 6\lambda x_2 \end{pmatrix}$$

и для указанных решений принимает соответственно вид

$$A_1 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}.$$

Условие $(\nabla f_k(x^*), h) = 0$ выглядит здесь как $3x_1^2 h_1 + 3x_2^2 h_2 = 0$.

Разберем каждый из трех случаев:

$$1) \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad h_2 = 0, \quad h_1 - \text{любой};$$

$$\begin{aligned} (A_1 h, h) &= \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} ah_1 \\ -bh_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right) = ah_1^2 - bh_2^2 = ah_1^2 > 0, \end{aligned}$$

что соответствует условию строгого локального решения задачи;

$$2) \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h_1 = 0, \quad h_2 - \text{любой и} \\ (A_2 h, h) = -ah_1^2 + bh_2^2 > 0 - \text{строгое локальное решение задачи};$$

3) если же

$$x_1 = \frac{a}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}}, \quad x_2 = \frac{b}{\sqrt[3]{a^3 + b^3}},$$

то

$$\begin{aligned} \frac{3a^2 h_1}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} + \frac{3b^2 h_2}{\sqrt[3]{(a^3 + b^3)^2}} &= 0, \quad a^2 h_1 + b^2 h_2 = 0; \\ (A_3 h, h) &= \left(\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right) = \\ &= \left(\begin{pmatrix} -ah_1 \\ -bh_2 \end{pmatrix}, (h_1, h_2) \right) = -ah_1^2 - bh_2^2 = -(ah_1^2 + bh_2^2) < 0, \end{aligned}$$

поэтому точка $(a, b)/\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ не может быть решением данной задачи. Эта точка служит, однако, строгим локальным решением задачи максимизации той же функции при тех же ограничениях. \square

Пример 3.6. Пусть A — симметрическая матрица размером $n \times n$. Требуется найти точки глобального минимума и максимума функции $f(x) = (Ax, x)$ на сфере единичного радиуса.

Решение: отметим, что в силу теоремы Вейерштрасса такие точки существуют.

Задача имеет вид

$$\begin{aligned} (Ax, x) &\rightarrow \min(\max), \\ 1 - \|x\|^2 &= 0. \end{aligned}$$

Ее функция Лагранжа

$$L(x, \lambda) = (Ax, x) + \lambda(1 - \|x\|^2).$$

Условие регулярности здесь выполнено. Найдем $L'(x, \lambda)$:

$$\begin{aligned} (A(x+h), x+h) &= (Ax, x) + (Ax, h) + (Ah, x) + (Ah, h) = \\ &= (Ax, x) + 2(Ax, h) + o(h), \text{ так как } (Ah, h) \leq \|A\|\|h\|^2, \text{ откуда} \\ (Ax, x)' &= \nabla f(x) = 2Ax, \\ L'(x, \lambda) &= 2Ax - 2\lambda x = 2(Ax - \lambda x). \end{aligned}$$

Система нахождения стационарной точки имеет вид

$$\begin{cases} Ax = \lambda x, \\ \|x\| = 1. \end{cases}$$

Но это не что иное, как система, определяющая собственные значения и собственные векторы матрицы A . Как известно, у симметрической матрицы все n собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ действительны. Будем считать, что они упорядочены: $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$. Пусть x^1, \dots, x^n — соответствующие им нормированные собственные векторы. Таким образом, пары $(x^1, \lambda_1), \dots, (x^n, \lambda_n)$ представляют собой все решения указанной системы. При этом $f(x^1) = \lambda_1, \dots, f(x^n) = \lambda_n$, поскольку

$$f(x^i) = (Ax^i, x^i) = (\lambda_i x^i, x^i) = \lambda_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f_{\text{глоб. min}}(x^1) &= \lambda^1, \\ f_{\text{глоб. max}}(x^n) &= \lambda^n. \end{aligned} \quad x^1, x^n \in \text{единичной сфере.}$$

□

4. Общая задача с ограничениями

4.1. Условия Куна – Таккера

Кун и Таккер обобщили задачу минимизации с ограничениями в виде равенств на случай общей задачи нелинейного программирования с ограничениями, как в виде равенств, так и в виде неравенств.

Рассмотрим задачу

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} f_i(x) &= 0, & i &= \overline{1, k}; \\ f_j(x) &\leq 0, & j &= \overline{k+1, m}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Для задачи (4.1) – (4.2) естественным образом вводятся понятия глобального и локального решений.

Ограничения $f_j(x) \leq 0$ называются *активными* или связывающими в точке \bar{x} , если $f_j(\bar{x}) = 0$, и *неактивными* (пассивными) или *несвязывающими*, если $f_j(\bar{x}) < 0$.

Если существует возможность обнаружить ограничения, которые неактивны в точке оптимума, до непосредственного решения задачи, то эти ограничения можно исключить из модели и уменьшить ее размеры. Основная трудность заключается в их идентификации.

Кун и Таккер построили необходимые и достаточные условия оптимальности для задач нелинейного программирования, исходя из предположения дифференцируемости функций f_0, f_j ($j = 1, \dots, m$). Эти условия широко известны как *условия Куна – Таккера*. Их можно сформулировать в виде задачи нахождения решения некоторой системы нелинейных уравнений и неравенств, или, как говорят, *задачи Куна – Таккера*.

4.2. Постановка задачи

математического программирования

Пусть $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x), \dots, f_m(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ — дифференцируемые функции n переменных.

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0, \quad f_{k+1}(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0\}.$$

Задача о минимизации функции f_0 на определенном таким образом множестве X называется задачей математического или линейного программирования со смешанными ограничениями и записывается следующим образом:

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \dots = f_k(x) = 0, \\ f_{k+1}(x) &\leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Очевидно, что классическая задача на условный экстремум является частным случаем задачи математического программирования, когда отсутствуют ограничения-неравенства. При геометрической интерпретации используются те же приемы, и при изображении области $f_i(x) \leq 0$ указывается линия уровня $f_i(x) = 0$ и знаки «-» и «+» с тех сторон, где $f_i(x) < 0$ или $f_i(x) > 0$.

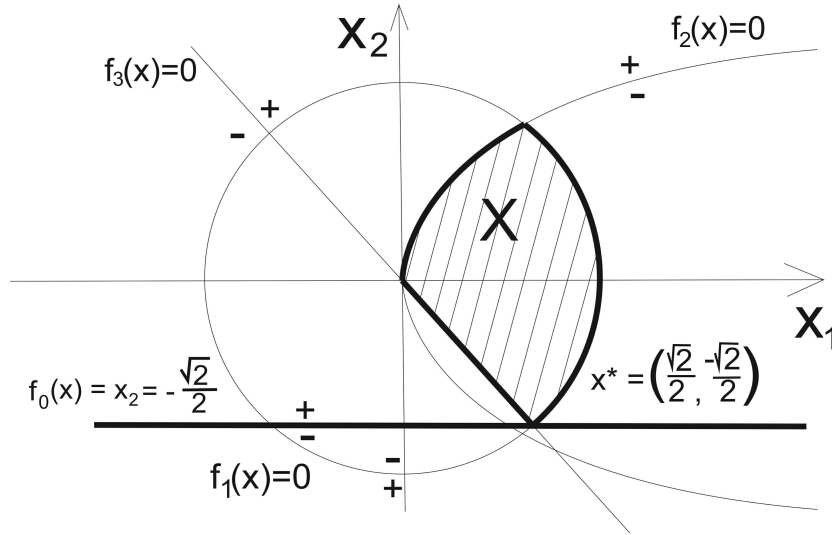


Рис. 13. Геометрическая интерпретация задачи

Например, в задаче

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_2 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ f_2(x) &= -x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ f_3(x) &= x_1 + x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

решением является «нижняя» точка пересечения окружности $f_1(x) = 0$ и прямой $f_3(x) = 0$, то есть точка $x^* = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Введем в рассмотрение такую непрерывно дифференцируемую на всей оси функцию $g(t)$, что

$$g(t) = \begin{cases} t^2/2, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad \frac{dg}{dt} = \begin{cases} t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Положим

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k f_i^2(x) + \sum_{i=k+1}^m g(f_i(x)).$$

Как нетрудно видеть, $\Phi(x)$ — дифференцируемая функция и

$$\Phi'(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) \cdot f_i'(x) + \sum_{i=k+1}^m g' \cdot [f_i(x)] \cdot f_i'(x).$$

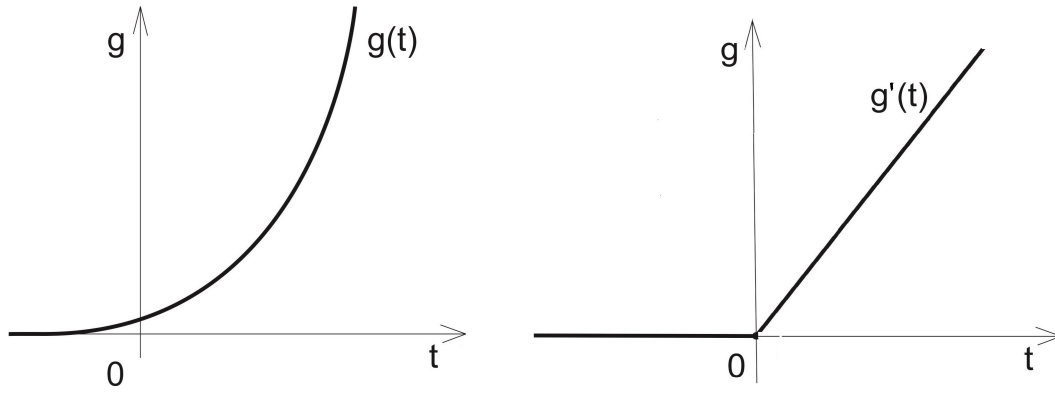


Рис. 14. График функции и её производной

Равенство $\Phi(x) = 0$ эквивалентно соотношениям (4.4), поэтому задача (4.3) – (4.4) эквивалентна задаче

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad \Phi(x) = 0, \quad (4.5)$$

то есть задаче условной оптимизации с ограничениями-равенствами.

4.3. Формулировка необходимых условий оптимальности

Теорема 4.1. Пусть x^* — локальное решение задачи (4.3) – (4.4), функции $f_0(x), f_1(x), \dots, f_k(x), \dots, f_m(x)$ непрерывно дифференцируемы в окрестности x^* . Тогда найдутся числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_k^*, \dots, \lambda_m^*$, не все равные нулю, такие, что

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* \cdot f_i'(x^*) = 0, \quad (4.6)$$

$$\lambda_i^* f_i^*(x) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.7)$$

$$\lambda_0^* \geq 0, \quad \lambda_i^* \geq 0 \quad (i = \overline{k+1, m}). \quad (4.8)$$

Числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ называются множителями Лагранжа; равенства (4.7) называют условиями дополнительной нежесткости, которые означают, что множители Лагранжа, соответствующие пассивным ограничениям-неравенствам, должны обращаться в нуль.

Условия дополнительной нежесткости требуют, чтобы $\lambda_i = 0$, если соответствующее ограничение в точке x^* неактивно, то есть $f_i(x^*) < 0$. Точно так же $\lambda_i > 0$ только для активных в точке x^* ограничений.

Любая точка $x^* \in X$, удовлетворяющая условиям (4.6) – (4.7), называется стационарной точкой задачи (4.3) – (4.4).

Доказательство. Пусть $\Phi(x)$ — функция, введенная в предыдущем пункте. Каждому натуральному числу N поставим в соответствие функцию

$$\Phi^N(x) = f_0(x) + N\Phi(x) + \frac{\|x - x^*\|^2}{2}$$

и сформулируем экстремальную задачу:

$$\Phi^N(x) \rightarrow \min; \quad x \in U = \{\|x - x^*\| \leq R\}. \quad (4.9)$$

1 этап. *Разрешимость задачи (4.9).*

Существование решения x^N задачи (4.9) следует из теоремы Вейерштрасса. Более того, можно утверждать, что при больших N элемент x^N есть внутренняя точка множества U .

Действительно, справедливо соотношение

$$\Phi^N(x^N) \leq \Phi^N(x^*),$$

тогда

$$f_0(x^N) + N\Phi(x^N) + \frac{\|x^N - x^*\|^2}{2} \leq f_0(x^*),$$

$$\Phi(x^N) \leq \frac{1}{N} \left[f_0(x^*) - f_0(x^N) - \frac{\|x^N - x^*\|^2}{2} \right].$$

Здесь функция f_0 непрерывна, $f_0(x^*)$ есть число, $x_N \in U$, $f_0(x_N)$ ограничено на множестве U , величина $\|x^N - x^*\|^2/2$ также ограничена.

Поскольку выражение в квадратных скобках ограничено, то при $N \rightarrow \infty$ правая часть стремится к нулю, следовательно, $\Phi(x^N) \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$. Последовательность x^N компактна, так как ограничена на замкнутом множестве U . Если \hat{x} — предельная точка этой последовательности (или какой-либо ее подпоследовательности), то $\Phi(\hat{x}) = 0$, и

$$f_0(\hat{x}) + \frac{\|\hat{x} - x^*\|^2}{2} \leq f_0(x^*).$$

С другой стороны, $f_0(x^*) \leq f_0(\hat{x})$, поскольку x^* — решение задачи (4.5). Тогда $\|\hat{x} - x^*\|^2/2 \leq 0$, то есть $\hat{x} = x^*$. Таким образом, всякая предельная точка последовательности $\{x^N\}$ совпадает с x^* , то есть $x^N \rightarrow x^*$. Следовательно, при больших N элемент x^N есть внутренняя точка U .

2 этап. *Предельный переход.*

Так как $x^N \in \text{int}U$, то необходимое условие минимума для нее принимает вид

$$\nabla \Phi^N(x^N) = 0,$$

то есть

$$\begin{aligned} \nabla f_0(x^N) + N \sum_{i=1}^k f_i(x^N) \nabla f_i(x^N) + \\ + N \sum_{i=k+1}^m \nabla g[f_i(x^N)] \nabla f_i(x^N) + (x^N - x^*) = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Здесь $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\nabla g = g'$.

Введем величины:

$$\begin{aligned} \lambda_0^N &= \frac{1}{\sqrt{1 + N^2 \sum_{i=1}^k f_i^2(x^N) + N^2 \sum_{i=k+1}^m (\nabla g[f_i(x^N)])^2}}, \\ \lambda_i^N &= \frac{N f_i(x^N)}{\sqrt{1 + N^2 \sum_{i=1}^k f_i^2(x^N) + N^2 \sum_{i=k+1}^m (\nabla g[f_i(x^N)])^2}}, \quad i = \overline{1, k}, \\ \lambda_i^N &= \frac{N \nabla g[f_i(x^N)]}{\sqrt{1 + N^2 \sum_{i=1}^k f_i^2(x^N) + N^2 \sum_{i=k+1}^m (\nabla g[f_i(x^N)])^2}}, \quad i = \overline{k+1, m}. \end{aligned}$$

Разделим равенство (4.10) на выражение

$$\sqrt{1 + N^2 \sum_{i=1}^k f_i^2(x^N) + N^2 \sum_{i=k+1}^m (\nabla g[f_i(x^N)])^2},$$

которое далее для простоты будем обозначать $\sqrt{\dots}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\nabla f_0(x^N)}{\sqrt{\dots}} + \frac{N \sum_{i=1}^k f_i(x^N) \nabla f_i(x^N)}{\sqrt{\dots}} + \\ + \frac{N \sum_{i=k+1}^m \nabla g[f_i(x^N)] \nabla f_i(x^N)}{\sqrt{\dots}} + \frac{x^N - x^*}{\sqrt{\dots}} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, будем иметь

$$\lambda_0^N \nabla f_0(x^N) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^N \nabla f_i(x^N) + \lambda_0^N (x^N - x^*) = 0. \quad (4.11)$$

Причем

$$\sum_{i=0}^m (\lambda_i^N)^2 = 1 \quad \text{для любого } N,$$

поэтому последовательность $\Lambda^N = (\lambda_0^N, \dots, \lambda_m^N)$ компактна.

Без ограничения общности можно считать ее сходящейся к $\Lambda^* = (\lambda_0^*, \dots, \lambda_m^*)$. Переходя к пределу в (4.11) при $N \rightarrow \infty$, получаем (4.6). В силу определений $\lambda_0^N \geq 0$, $\lambda_i^N \geq 0$ ($i = \overline{k+1, m}$), откуда следует (4.8). Равенство (4.7) очевидно, если $f_i(x^*) = 0$.

Если же $f_i(x^*) < 0$, то $f_i(x^N) < 0$ при больших N , следовательно, по построению функции g ($g'(t) = 0$ при $t < 0$)

$$\lambda_i^N = \lambda_0^N N \cdot \nabla g[f_i(x^N)] = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_i^N = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i^* = 0 \quad \text{для } i = \overline{k+1, m}.$$

□

В данном доказательстве эксплуатируется идея использования необходимого условия экстремума в задаче без ограничений для получения необходимого условия в задаче с ограничениями. При этом строится последовательность ($N \rightarrow \infty$) задач безусловной минимизации, отличающихся все большим «штрафом» за нарушение ограничений (член $N\Phi(x)$ в $\Phi^N(x)$), решения которых в пределе стремятся к решениям исходной задачи условной минимизации.

Условия (4.6) – (4.8) предложены Ф. Джоном (1948 г.). В векторной форме эти уравнения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \lambda_0^* \nabla f_0(x^*) + \nabla f_i(x^*) \lambda_i^* &= 0, \\ \lambda_i^* f_i(x^*) &= 0, \\ (\lambda_0, \bar{\Lambda}) &\geq (0, 0), \quad \bar{\Lambda} = (\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_m), \\ (\lambda_0, \Lambda^*) &\neq (0, 0), \quad \Lambda^* = (\lambda_1, \dots, \lambda_m). \end{aligned}$$

Если $\lambda_0 = 0$, то условия Ф. Джона не используют информацию, которую представляет градиент целевой функции. В этом случае они просто констатируют, что существует неотрицательная, нетривиальная и равная нулю линейная комбинация градиентов функций — активных ограничений в исследуемой точке.

В связи с этим более интересен случай, когда $\lambda_0 > 0$. Кун и Таккер (1951 г.) независимо от Ф. Джона получили необходимые условия оптимальности точно того же типа, но с дополнительным свойством $\lambda_0 > 0$. Чтобы гарантировать положительность множителя λ_0 , можно предъявлять различные требования к функциям ограничений. Обычно эти требования называют *условиями регулярности*.

Пример 4.1.

$$(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \rightarrow \min,$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 5, \\ x_1 + 2x_2 \leq 4, \\ -x_1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0. \end{cases}$$

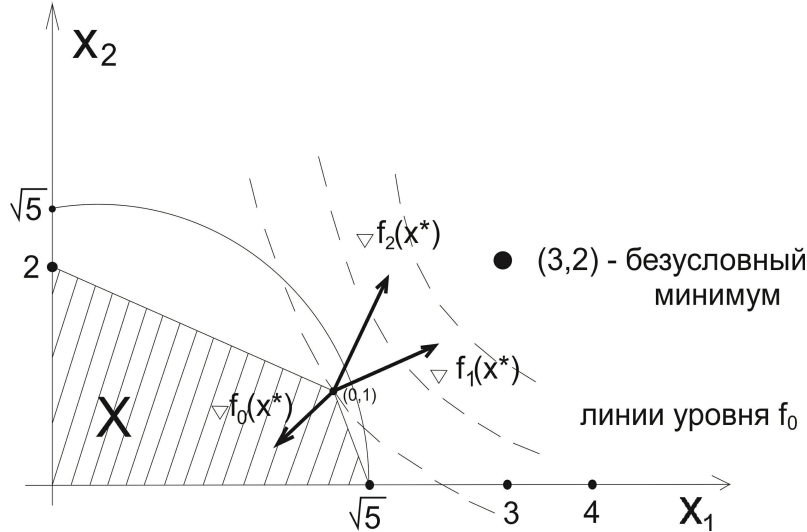


Рис. 15. Графическая интерпретация задачи

Решение: $I = \{1, 2\}$ — множество индексов активных в $x^* = (2, 1)$ ограничений.

Следовательно, $\lambda_3^* = \lambda_4^* = 0$ (так как соответствуют $f_3 = -x_1 < 0$ и $f_4 = -x_2 < 0$).

$$\nabla f_0 = \begin{pmatrix} 2(x_1 - 3) \\ 2(x_2 - 2) \end{pmatrix}, \quad \nabla f_0(x^*) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_1(x^*) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получен ненулевой вектор $(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$, для которого выполняется условие Куна – Таккера (или Ф. Джона 1948 г.) $\Lambda = (3, 1, 2)$.

Проверим теперь, выполняются ли условия Джона в точке $\hat{x} = (0, 0)^T$. Здесь $I = \{3, 4\}$ и, следовательно, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$$\nabla f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_3(\hat{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \nabla f_4(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Равенство

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

справедливо, если

$$\begin{aligned} -6\lambda_0 - \lambda_3 &= 0; & \lambda_3 &= -6\lambda_0, \\ -4\lambda_0 - \lambda_4 &= 0; & \lambda_4 &= -4\lambda_0, \end{aligned}$$

то есть если $\lambda_0 > 0$, то $\lambda_3 < 0$ и $\lambda_4 < 0$, что противоречит условию неотрицательности множителей Лагранжа.

Если же $\lambda_0 = 0$, то $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, в то время как вектор $(\lambda_0, \lambda_3, \lambda_4)$ должен быть ненулевой. Таким образом, в точке $\hat{x} = (0, 0)$ условия Ф. Джона не выполнены, откуда следует, что $(0, 0)$ — не оптимальная точка. \square

Пример 4.2.

$$\begin{cases} -x_1 \rightarrow \min \\ x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0; \end{cases}$$

— задача Куна – Таккера (1951 г.)

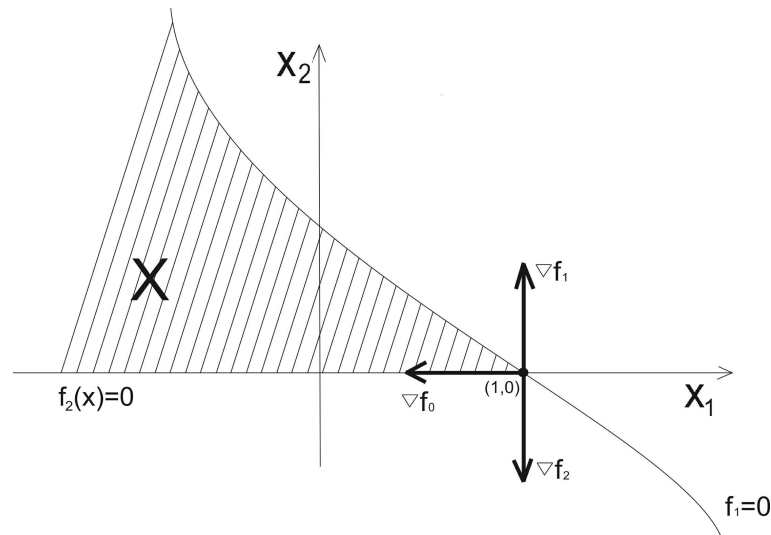


Рис. 16. Графическая интерпретация задачи

Решение: здесь $I = \{1, 2\}$ — множество активных ограничений.

$$\nabla f_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_1 = \begin{pmatrix} 3(1-x_1)^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\lambda_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\lambda_0 = 0; \quad \lambda_1 = \alpha; \quad \lambda_2 = \alpha \quad (\alpha > 0).$$

Таким образом, условия Ф. Джона в точке $(1, 0)$ выполняются, то есть точка $x^* = (1, 0)$ — оптимальная. В этом примере $\nabla f_i(x^*)$ линейно зависимы, поэтому здесь $\lambda_0 = 0$. \square

Пример 4.3.

$$\begin{cases} -x_1 \rightarrow \min, \\ x_1 + x_2 - 1 \leq 0, \\ -x_2 \leq 0. \end{cases}$$

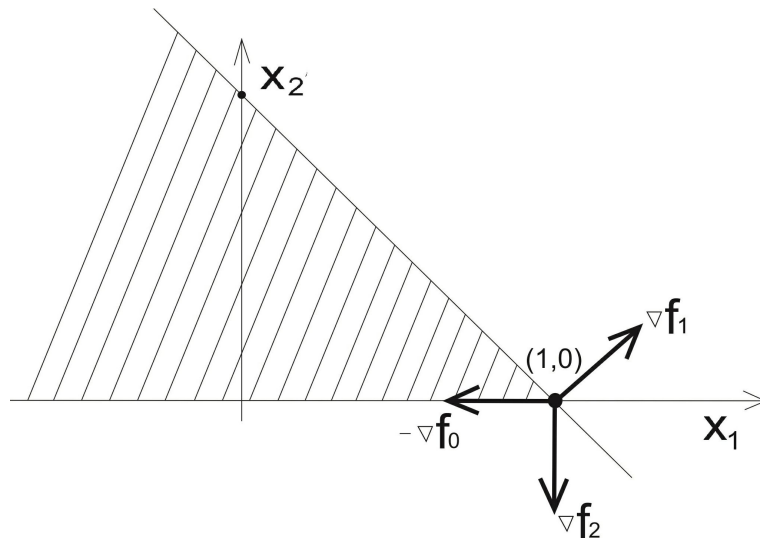


Рис. 17. Графическая интерпретация задачи

Решение:

$$\nabla f_0 = (-1, 0)^T; \quad \nabla f_1 = (1, 1)^T; \quad \nabla f_2 = (0, -1)^T.$$

Условия Ф. Джона выполняются при $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \alpha > 0$, то есть $x^* = (1, 0)$ — оптимальная точка. \square

5. Правила множителей Лагранжа в общей задаче с ограничениями

5.1. Функция Лагранжа

Как и раньше, функцией Лагранжа задачи

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} f_i(x) &= 0, & i &= \overline{1, k}, \\ f_j(x) &\leq 0, & j &= \overline{k+1, m} \end{aligned} \quad (5.2)$$

назовем функцию

$$f(x, \Lambda) = \sum_{i=0}^m \lambda_i f_i(x),$$

где $\lambda_0, \dots, \lambda_m$ — множители Лагранжа. Набор $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ называют допустимым, если $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_{k+1} \geq 0, \dots, \lambda_m \geq 0$ и хотя бы одно из чисел λ_i ($i = 0, 1, \dots$) отлично от нуля. Допустимый набор Λ называют нормированным, если его длина $|\Lambda| = 1$. Теорема 4.1 гарантирует существование такого допустимого набора Λ , что локальное решение задачи (5.1) – (5.2) является стационарной точкой функции Лагранжа $f(x, \Lambda)$. Иначе говоря, элемент x^* удовлетворяет необходимым условиям минимума I порядка следующей экстремальной задачи:

$$f(x, \Lambda^*) \rightarrow \min, \quad x \in R^n. \quad (5.3)$$

Переход от задачи (5.1) – (5.2) к задаче (5.3) и выражает правило множителей Лагранжа. Сказанное не следует понимать в том смысле, что решение задачи (5.1) – (5.2) является решением задачи (5.3). Речь идет лишь о совпадении некоторых необходимых условий минимума.

5.2. Условия регулярности

Нас будут интересовать условия, при которых можно гарантировать, что $\lambda_0^* \neq 0$, то есть условия регулярности. Так как набор Λ^* , фигурирующий в правиле множителей Лагранжа, определяется с точностью до постоянного множителя, то можно считать $\lambda_0^* = 1$.

Положим

$$I(x^*) = \{i : f_i(x^*) = 0, i = 1, \dots, m\}$$

есть множество индексов i , характеризующих активные ограничения. Простейшие из условий регулярности имеют следующий вид.

Условие регулярности А: векторы $\nabla f_i(x^*)$, $i \in I$ линейно независимы.

Теорема 5.1. Пусть выполнены условия регулярности А. Тогда в предположениях теоремы 4.1 можно взять $\lambda_0^* = 1$.

Доказательство. Если $\lambda_0^* = 0$, то градиенты $\nabla f_i(x^*)$, $i \in I$ линейно зависимы. Получено противоречие. \square

Замечание. Условие $\lambda_0^* = 1$ означает, что антиградиент целевой функции является неотрицательной линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения в точке x^* . Можно изобразить

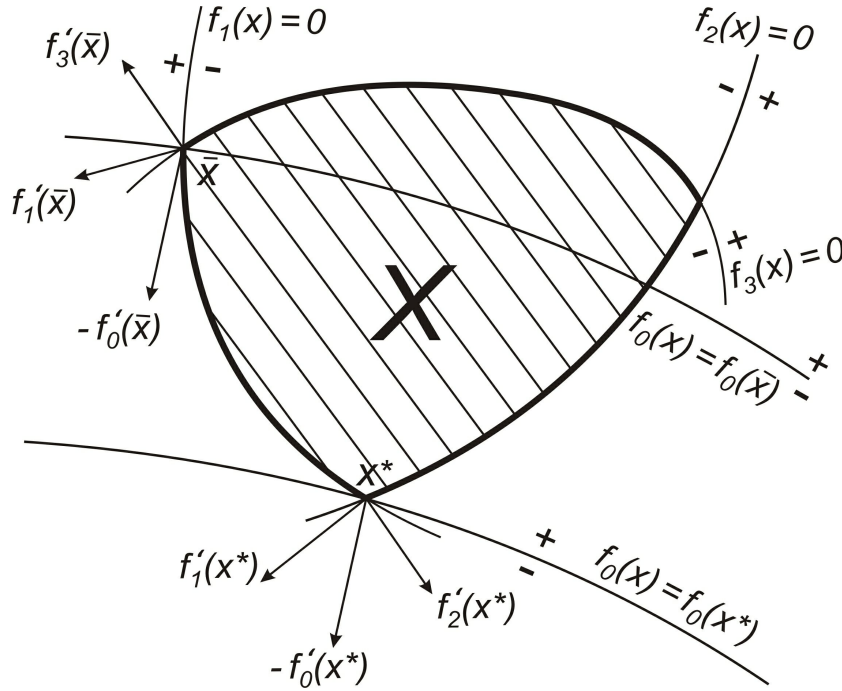


Рис. 18. Геометрическая интерпретация условия А

множество X , образованное неравенствами $f_i(x) \leq 0$ ($i = 1, 2, 3$), и линии уровня некоторой функции f_0 . В точке x^* эта функция достигает минимума на X . Активными в x^* являются первое и второе ограничения: $I(x^*) = \{1, 2\}$. При этом антиградиент $-f'_0(x^*)$ по необходимости оказывается в конусе, натянутом на градиенты $f'_1(x^*)$ и $f'_2(x^*)$. Стало быть, $-f'_0(x^*)$ представим как их неотрицательная линейная комбинация. Заметим, что точка \bar{x} , для которой подобное условие не выполняется, не может быть точкой минимума f_0 на X : из нее можно сместиться, оставаясь в рамках X и уменьшая значение f_0 . Условие регулярности А является довольно ограничительным и не всегда выполняется.

Условие регулярности Б: векторы $\nabla f_i(x^*)$, $i = 1, \dots, k$ линейно независимы, и найдется вектор $s_0 \in R^n$ такой, что

$$(\nabla f_i(x^*), s_0) = 0 \quad (i = \overline{1, k}),$$

$$(\nabla f_i(x^*), s_0) < 0, \quad i > k, \quad f_i(x^*) = 0.$$

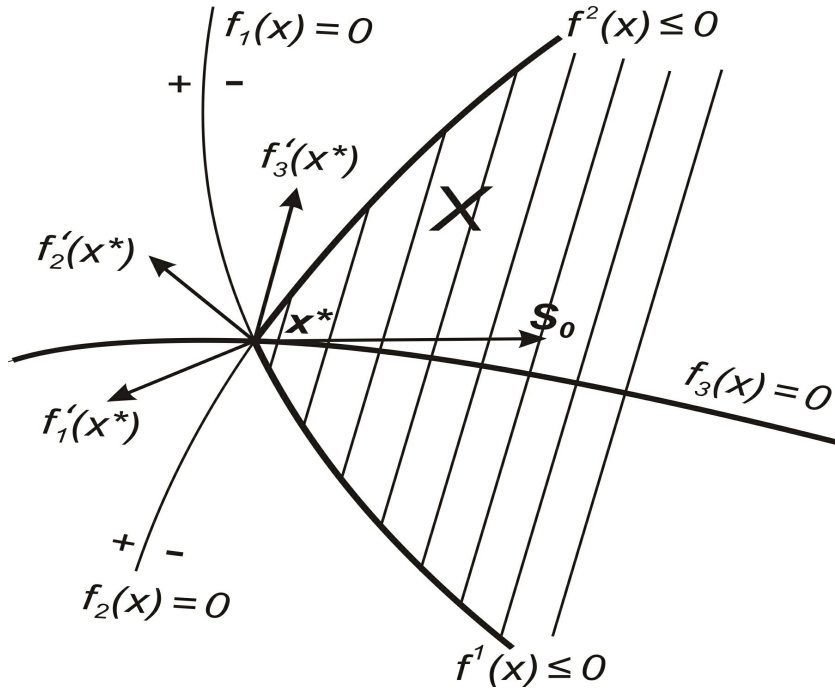


Рис. 19. Геометрическая интерпретация условия Б

Иначе говоря, найдется элемент из касательного подпространства к ограничениям типа равенств в точке x^* , который ведет строго внутрь каждого из множеств $f_i(x) \leq 0$, $i \in I(x^*)$ для неравенств. Это следует из того, что углы между S_0 и $\nabla f_i(x^*)$ для ограничений типа неравенств тупые, а для ограничений типа равенств прямые.

Теорема 5.2. При замене условия А на условие В утверждения теоремы 5.1 остаются справедливыми.

Доказательство. Пусть Λ^* — набор, фигурирующий в правиле множителей Лагранжа. В частности,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0.$$

Предположим, что $\lambda_0^* = 0$. Умножая скалярно это равенство на s_0 , получаем

$$0 = \sum_{i=0}^m (\lambda_i^* \nabla f_i(x^*), s_0) = \sum_{i>k} (\lambda_i^* \nabla f_i(x^*), s_0),$$

что приводит к тому, что $\lambda_i^* = 0$ ($i > k$). Следовательно,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0.$$

Противоречие линейной независимости $\nabla f_i(x^*)$, ($i = \overline{1, k}$). □

Пример 5.1. Нерегулярной задачи Какой геометрической ситуации соответствует случай $\lambda_0^* = 0$? Рассмотрим задачу

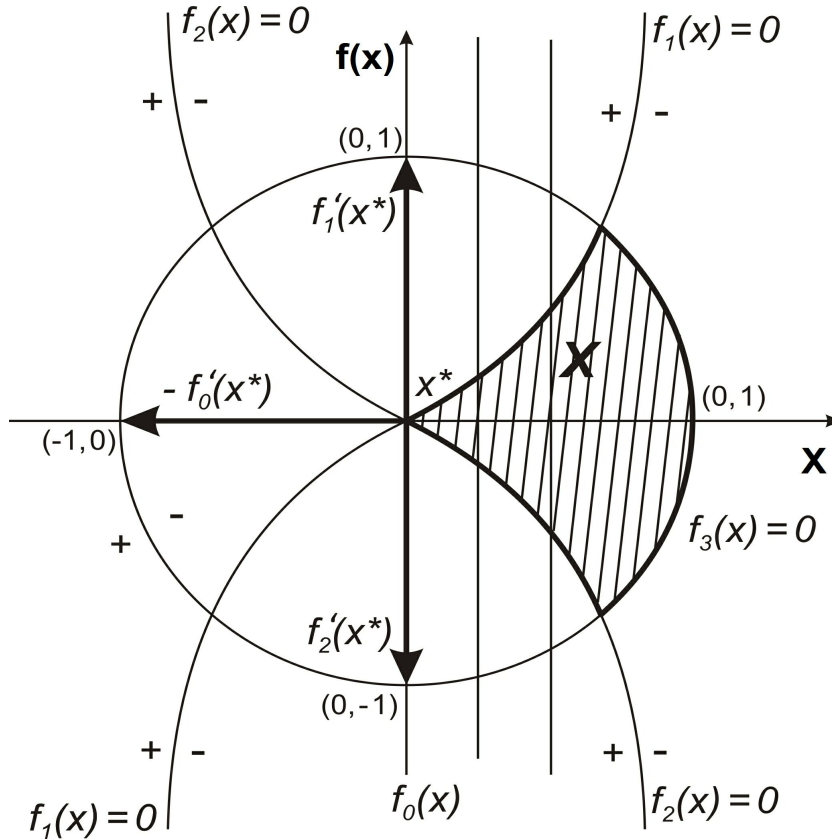


Рис. 20. Геометрическая интерпретация задачи

$$\begin{aligned} f_0(x) &= x_1 \rightarrow \min, \\ f_1(x) &= -x_1^3 + x_2 \leq 0, \quad f_2(x) = -x_1^3 - x_2 \leq 0, \\ f_3(x) &= x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad x \in R^2. \end{aligned}$$

Решение: решением задачи служит $x^* = (0, 0)$. Активными в x^* выступают первое и второе ограничения. При этом

$$\begin{aligned} f_0'(x^*) &= (1, 0), \\ f_1'(x^*) &= (0, 1), \\ f_2'(x^*) &= (0, -1). \end{aligned}$$

Ясно, что вектор $\nabla f_0(x^*)$ нельзя представить в виде линейной комбинации векторов $\nabla f_1(x^*)$ и $\nabla f_2(x^*)$: соотношение

$$\lambda_0^* \nabla f_0(x^*) + \sum_i \lambda_i^* \nabla f_i(x^*) = 0$$

может выполняться лишь при $\lambda_0^* = 0$, $\lambda_1^* = \alpha$, $\lambda_2^* = \alpha$ ($\alpha > 0$). Здесь градиенты $\nabla f_1(x^*)$ и $\nabla f_2(x^*)$ линейно зависимы. \square

Вообще, **условием регулярности** называется любое дополнительное предположение, при котором в теореме 4.1 обеспечивается случай $\lambda_0^* = 1$.

Как было сформулировано, простейшим примером такого условия служит требование линейной независимости градиентов $\nabla f_1(x^*), \dots, \nabla f_m(x^*)$ в классической задаче на условный экстремум. К сожалению, условия регулярности подобного типа труднопроверяемы, так как, помимо прочего, они формулируются в терминах самой точки минимума x^* , которую и требуется найти. Существуют более удобные условия регулярности с выпуклыми ограничениями-неравенствами и линейными ограничениями-равенствами. Например, справедлива

Теорема 5.3. Пусть в задаче (5.1) – (5.2) множество P ($x \in P$) выпукло, функции f_0, f_{k+1}, \dots, f_m дифференцируемы в точке $x^* \in P$, и функции f_{k+1}, \dots, f_m выпуклы в P , ограничения-равенства (т. е. функции f_1, \dots, f_k) отсутствуют. Пусть дополнительно существует точка $\bar{x} \in P$ такая, что $f_i(\bar{x}) < 0$ при всех $i = k + 1, \dots, m$. Если x^* — локальное решение задачи (5.1) – (5.2), то существует вектор Λ^* такой, что при $\lambda_0^* = 1$ выполняется условие теоремы 4.1.

Такое дополнительное условие называют *условием Слейтера*. Это наиболее простое и часто используемое условие регулярности.

5.3. Отыскание решений простейших задач

В некоторых случаях изложенная теория позволяет в явном виде найти решение задачи математического программирования. Последовательность действий состоит из следующих этапов:

- 1) составление функции Лагранжа,
- 2) составление системы, характеризующей стационарные точки,
- 3) решение системы,
- 4) исследование стационарных точек в целях отбора среди них решений.

На этапе 1 задачу необходимо привести к виду (5.1) – (5.2). Если дана задача максимизации f_0 , то ее следует рассматривать как задачу минимизации функции $-f_0$; если имеются ограничения вида $f_i(x) \geq 0$, то их надо заменить на ограничение $-f_i(x^*) \leq 0$ и т. п. Кроме того, проверяется выполнение какого-либо условия регулярности и строится регулярная функция Лагранжа. На этапе 2 выписывается система из теоремы 4.1. Этап 3 наиболее трудный, и преодолеть его удастся лишь в редких случаях. Этап 4 для регулярной задачи выпуклого программирования сводится к теореме, приведенной в примере 5.2. В общем случае этот этап также непросто. Иногда удастся воспользоваться очень громоздкими условиями оптимальности второго порядка. В некоторых случаях проще

провести непосредственное исследование целевой функции в стационарной точке. (Например, если известно, что задача на \min имеет глобаль-

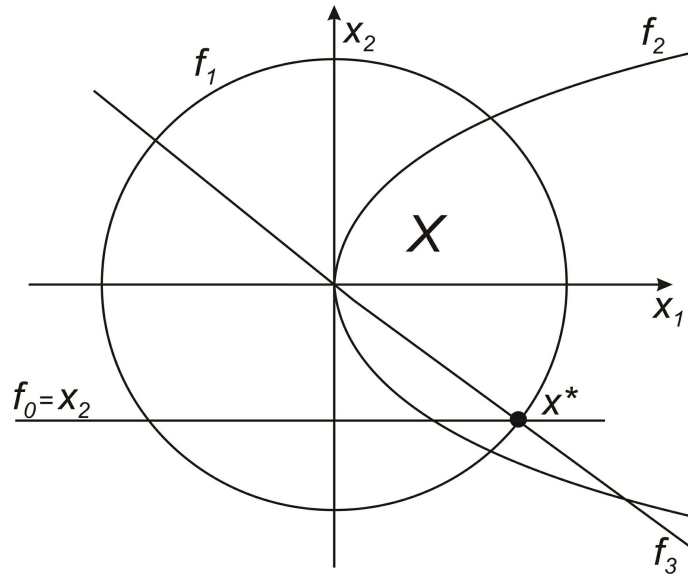


Рис. 21. Геометрическая интерпретация примера 5.2.

ное решение, то им и будет являться та стационарная точка, в которой целевая функция принимает наименьшее значение.)

Пример 5.2.

$$f_0(x) = x_2 \rightarrow \min,$$

$$x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \quad -x_1 + x_2^2 \leq 0, \quad x_1 + x_2 \geq 0.$$

Решение: задача удовлетворяет условию Слейтера (из геометрических соображений), поэтому выписываем регулярную функцию Лагранжа:

$$L(x, \Lambda) = x_2 + \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) + \lambda_2(-x_1 + x_2^2) + \lambda_3(-x_1 - x_2).$$

Система, удовлетворяющая теореме 4.1, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 + 2\lambda_2 x_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, \\ \lambda_2(-x_1 + x_2^2) = 0, \\ \lambda_3(x_1 + x_2) = 0, \\ \lambda_1 \geq 0, \quad \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_3 \geq 0, \\ X \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 1 \leq 0, \\ -x_1 + x_2^2 \leq 0, \\ x_1 + x_2 \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Если воспользоваться геометрическими соображениями, то можно заметить, что ограничения f_1 и f_3 активны, а f_2 пассивно, поэтому λ_2 должно быть равно нулю, то есть $\lambda_2 = 0$. Перепишем систему:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_3 = 0, & (1) \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0, & (2) \\ \lambda_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) = 0, & (3) \\ \lambda_3(x_1 + x_2) = 0, & (4) \\ \lambda_1 \geq 0, \lambda_3 \geq 0. \end{cases}$$

1. $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_3 = 0 \longrightarrow (2) \longrightarrow 1 = 0$ — несовместность.

2. $\lambda_1 = 0, \quad \lambda_3 \neq 0 \longrightarrow (1) \longrightarrow \lambda_3 = 0$ — случай 1.

3. $\lambda_1 \neq 0, \quad \lambda_3 = 0$:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ 2\lambda_1 x_1 = 0, \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -\frac{1}{2\lambda_1} \longrightarrow \frac{1}{4\lambda_1^2} = 1, \quad \lambda_1 = \pm \frac{1}{2},$$

но $\lambda_1 \geq 0$, откуда $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, $x_1 = 0, \quad x_2 = -1$, но $(0, -1) \notin X$.

4. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$$x_1 = -x_2, \quad 2x_1^2 = 1, \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} 2\lambda_1 x_1 - \lambda_3 = 0, \\ 1 + 2\lambda_1 x_2 - \lambda_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - \lambda_3 = 0, \\ 1 + 2\lambda_1(-\frac{\sqrt{2}}{2}) - \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

$$\lambda_3 = \lambda_1 \sqrt{2}, \quad 1 - \lambda_1 \sqrt{2} = 0, \quad 2\sqrt{2}\lambda_1 = 1,$$

система неравенств

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0, \\ \lambda_3 = \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям минимума.

Таким образом, найденная точка $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ является стационарной точкой для данной задачи. Из геометрических соображений очевидно, что $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = x^*$, то есть это и составляет решение задачи. \square

В данной ситуации для аналитической проверки x^* на оптимальность хорошо «работает» следующая теорема, которая показывает, что для регулярной задачи выпуклого программирования соотношения теоремы 4.1 являются не только необходимыми, но и достаточными:

Теорема 5.4. Пусть в задаче (5.1) – (5.2) множество P выпукло, функции f_0, f_{k+1}, \dots, f_m выпуклы на P и дифференцируемы в точке $x^* \in X$; функции f_1, \dots, f_k линейны. Если при $\lambda_0^* = 1$ и некотором наборе Λ^* выполняются условия теоремы 4.1, то x^* — решение (глобальное) задачи (5.1) – (5.2).

Пример 5.3.

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n \rightarrow \min,$$

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 = R^2.$$

Решение: $f_0(x) = (a, x)$, $f_1(x) = (x, x) - R^2 = 0$. Минимум существует, так как целевая функция непрерывна, а сфера — компакт (т. Вейерштрасса). Здесь легко проверяется условие регулярности: $f'_1 = 2x^*$ линейно-независима, $x^* \neq 0$, иначе $\sum_{j=1}^n x_j^2 = 0 \neq R^2$). Тогда по теореме 4.1

$$\lambda_0^* f'_0(x^*) + \lambda_1^* f'_1(x^*) = 0$$

и $\lambda_0^* = 1$. Имеем $a + \lambda_1^* 2x^* = 0$. (Δ) Умножив на x^* скалярно, получим:

$$(a, x^*) + 2\lambda_1^*(x^*, x^*) = 0, \quad f_0(x^*) + 2\lambda_1^* R^2 = 0.$$

Теперь Δ умножим скалярно на a :

$$(a, a) + \lambda_1^* 2(x^*, a) = 0; \quad (a, a) + 2\lambda_1^* f_0(x^*) = 0.$$

Получим систему

$$\begin{cases} f_0(x^*) + 2\lambda_1^* R^2 = 0, \\ (a, a) + 2\lambda_1^* f_0(x^*) = 0; \\ \|a\|^2 - 4\lambda_1^{*2} R^2 = 0, \quad \lambda_1^{*2} = \frac{\|a\|^2}{4R^2}, \quad \lambda_1^* = \pm \frac{\|a\|}{2R}, \end{cases}$$

где «+» соответствует \min , «−» — \max .

Получаем

$$\begin{aligned} f_0(x^*) &= -2R^2 \frac{\|a\|}{2R} = -\|a\| R; \\ x^* &= -\frac{a}{2\lambda_1^*} = -a \frac{2R}{2\|a\|} = -\frac{aR}{\|a\|}; \\ f_0\left(-\frac{aR}{\|a\|}\right) &= -\|a\| R. \end{aligned}$$

□

Пример 5.4.

$$\begin{cases} f_0(x) = x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow \max, \\ \sum_{j=1}^n x_j = a > 0, \\ x_j \geq 0. \end{cases}$$

Проверим условие регулярности. Из геометрических соображений можно понять, что активным является только ограничение $f_1(x)$:

$$\nabla f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

т. е. выполнено условие линейной независимости. Следовательно, $\lambda_0^* = 1$.

Решение:

$$\begin{cases} f_0(x) = - \prod_{j=1}^n x_j \rightarrow \min, \\ f_1(x) = \sum_{j=1}^n x_j - a = 0, \\ f_{j+1}(x) = -x_j \leq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_0 = 1, \\ f'_0(x^*) + \lambda_1 f'_1(x^*) + \sum_{j=1}^n \lambda_{j+1} f'_{j+1} = 0, \\ \lambda_1 f_1(x^*) = 0, \\ \lambda_{j+1} f_{j+1}(x^*) = 0, \quad \lambda_{j+1} \leq 0 \quad (j = \overline{1, n}). \end{cases}$$

Так как $\lambda_{j+1} f_{j+1}(x^*) = 0$ и $f'_{j+1} \neq 0$, то $\lambda_{j+1} f'_{j+1}(x^*) = 0$ при $\lambda_{j+1} = 0$, где $j = \overline{1, n}$. Поэтому верно равенство

$$f'_0(x^*) + \lambda_1 f'_1(x^*) = 0.$$

Далее

$$\begin{cases} -x_2 x_3 \dots x_n + \lambda_1 = 0 \\ -x_1 x_3 \dots x_n + \lambda_1 = 0 \\ \dots \\ -x_1 x_2 \dots x_{n-1} + \lambda_1 = 0 \end{cases} \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{array} \Rightarrow \begin{cases} f_0 = \lambda_1 x_1 \\ f_0 = \lambda_1 x_2 \\ \dots \\ f_0 = \lambda_1 x_n \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n,$$

откуда

$$x_j = a/n \quad (j = \overline{1, n}) \quad \text{и} \quad f_{0,\max} = (a^n)/(n^n).$$

□

6. Выпуклая задача оптимизации

6.1. Выпуклые функции

Функция f , определенная на выпуклом множестве $X \subset R^n$, называется *выпуклой* на X , если

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \quad (6.1)$$

при всех $x^1, x^2 \in X$, $\lambda \in [0, 1]$. Если при всех $x^1, x^2 \in X$, $x^1 \neq x^2$ и $\lambda \in [0, 1]$ неравенство (6.1) выполняется как строгое, то f называется *строго выпуклой* на X . Функция f называется *вогнутой*, если $-f$ выпукла. Геометрически выпуклость f означает, что любая точка произвольной хорды графика f располагается не ниже соответствующей точки самого графика f .

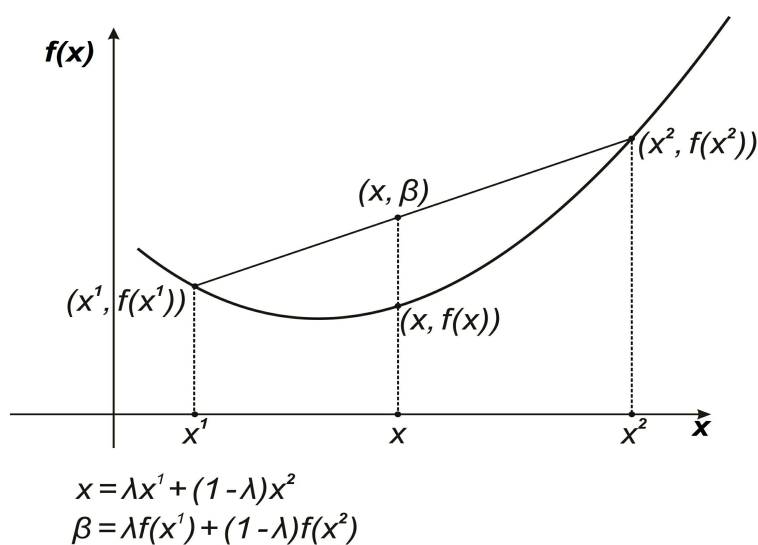


Рис. 22. Пример выпуклой функции

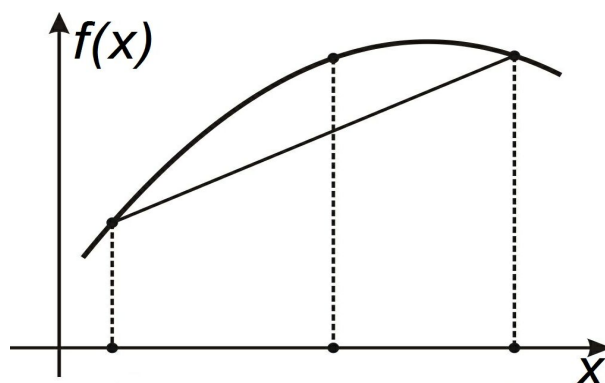


Рис. 23. Пример вогнутой функции

Примеры: функции $f(x) = x^2$, $f(x) = e^x$ выпуклы на R^n , $f(x) = \ln x$ вогнута на R^+ , $f(x) = \sin x$ вогнута на $[0, \pi]$ и выпукла на $[\pi, 2\pi]$; функ-

цию вида $f(x) = (a, x) + b$, $a \in R^n$, $b \in R$ называют *линейной*, и она одновременно и выпукла и вогнута на R^n , но не строго. Функция $f(x) = \|x\|$ выпукла на R^n :

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\| \leq \lambda\|x_1\| + (1-\lambda)\|x_2\|.$$

Неравенство (6.1), определяющее выпуклую функцию, можно распространить на любое конечное число точек.

Теорема 6.1. *Если f — выпуклая функция на выпуклом множестве X , то*

$$f\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x^i\right) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i f(x^i) \quad (6.2)$$

при всех $m = 1, 2, \dots$, $x^i \in X$; $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1, m}$; $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Доказательство. Проводится по индукции. При $m = 1$ утверждение теоремы очевидно. Предположим, что (6.2) верно для $m = k$.

Пусть $m = k + 1$. Обозначим $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i x^i = x$; $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i = 1$;

$$\begin{aligned} x &= (1 - \lambda_{k+1}) \left[\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \dots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \right] + \lambda_{k+1} x^{k+1} = \\ &= (1 - \lambda_{k+1}) \bar{x} + \lambda_{k+1} x^{k+1}. \end{aligned}$$

Используя сначала выпуклость f , а затем индуктивное предположение, получим

$$\begin{aligned} f(x) &\leq (1 - \lambda_{k+1}) f(\bar{x}) + \lambda_{k+1} f(x^{k+1}) \leq (1 - \lambda_{k+1}) \sum_{i=1}^k \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} f(x^i) + \\ &+ \lambda_{k+1} f(x^{k+1}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x^i) + \lambda_{k+1} f(x^{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f(x^i). \end{aligned}$$

□

Формула (6.2) называется неравенством Йенсена. Это неравенство содержит в себе частные случаи ряда известных неравенств.

Пример 6.1. Функция $f(x) = -\ln x$ выпукла на $\text{int } R_+$. Поэтому для любых $m = 1, 2, \dots$, $x_i > 0$, $\lambda_i \geq 0$; $i = \overline{1, m}$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ имеем

$$-\ln\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) \leq -\sum_{i=1}^m \lambda_i \ln x_i = -\ln\left(\prod_{i=1}^m x_i^{\lambda_i}\right).$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^m x_i^{\lambda_i}.$$

В частности, при $\lambda_i = 1/m$ ($i = \overline{1, m}$) получаем классическое неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_i \geq \sqrt[m]{\prod_{i=1}^m x_i}.$$

Укажем несколько простейших операций над выпуклыми функциями.

Теорема 6.2. *Неотрицательная линейная комбинация конечного числа выпуклых функций есть выпуклая функция.*

Доказательство. Пусть f_1, \dots, f_m — выпуклые функции на выпуклом множестве X , $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — неотрицательные числа. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(x).$$

Для любых x^1 и x^2 из X , $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$\begin{aligned} f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &= \sum_{i=1}^m \alpha_i f_i(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \alpha_i [\lambda f_i(x^1) + (1-\lambda)f_i(x^2)] = \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2), \end{aligned}$$

а значит, f выпукла. □

Теорема 6.3. *Точная верхняя грань любого числа выпуклых функций есть выпуклая функция.*

Доказательство. Пусть $f_i: X \rightarrow R$ — выпуклые функции, $i \in I$,

$$f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x), \tag{6.3}$$

$x_0 \in X$, $x_1 \in X$, $0 \leq \lambda \leq 1$. В силу выпуклости функций f_i и определения функции f при любом $i \in I$ справедливо соотношение:

$$f_i[(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1] \leq (1-\lambda)f_i(x_0) + \lambda f_i(x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1).$$

Правая часть не зависит от $i \in I$. Беря \sup по всем $i \in I$, приходим к (6.3). □

Следствие теоремы 6.3. Точная верхняя грань любого семейства аффинных функций есть выпуклая функция.

Теорема 6.4. Если возрастающая функция $\phi: R \rightarrow R$, функция $g: X \rightarrow R$ выпуклы, то функция $f(x) = \phi[g(x)]$ выпукла на X .

Доказательство.

$$\begin{aligned} f((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2) &= \phi[g((1-\lambda)x^1 + \lambda x^2)] \leq \phi[(1-\lambda)g(x^1) + \lambda g(x^2)] \leq \\ &\leq (1-\lambda)\phi[g(x^1)] + \lambda\phi[g(x^2)] = (1-\lambda)f(x^1) + \lambda f(x^2). \end{aligned}$$

□

Теорема 6.5. Пусть X — непустое выпуклое множество в R^n , функция $f: X \rightarrow R$ выпукла на X . Тогда f непрерывна во внутренних точках множества X .

Любая функция f , определённая на множестве X , может быть полностью описана множеством $\{(x, f(x)) : x \in X\} \in R_{n+1}$, называемым *графиком функции*.

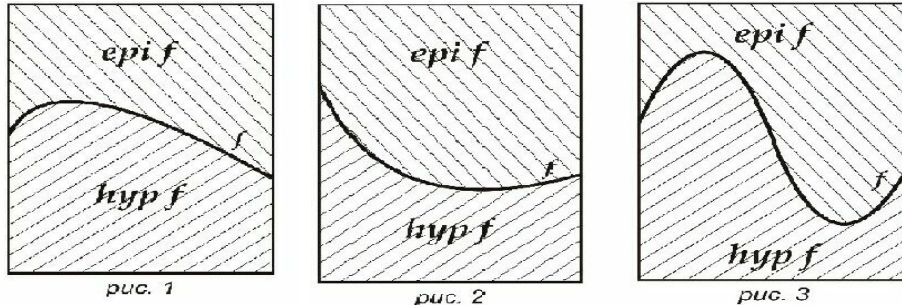


Рис. 24. Надграфик и подграфик

Можно построить два множества, которые связаны с графиком функции f : *надграфик* или *эпиграф* f , состоящий из всех точек, лежащих не ниже графика f , и *подграфик* или *гипограф*, состоящий из всех точек, лежащих не выше графика f .

Определение. Пусть $R^{n+1} = R^n \times R$, $f: X \subset R^n \rightarrow R$ — числовая функция, определяемая на множестве $X \subset R^n$. *Надграфиком* функции f называется подмножество R^{n+1} , обозначаемое $\text{epi } f$ и задаваемое равенством:

$$\text{epi } f = \{(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})^T : x_{n+1} \geq f(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n)^T \in X\}.$$

На рис. 24.3 ни $\text{epi } f$, ни $\text{hyp } f$ не являются выпуклыми множествами, $\text{hyp } f$ на рис. 24.1 и $\text{epi } f$ на рис. 24.2 есть выпуклые множества.

Отсюда напрашивается вывод, что функция выпукла в том и только том случае, если её $\text{epi } f$ является выпуклым множеством.

Теорема 6.6. Пусть X — выпуклое подмножество R^n ; $f: X \rightarrow R$ — числовая функция. Для выпуклости функции f необходимо и достаточно выпуклости её надграфика $\text{epi} f$.

Доказательство. Пусть f — выпукла, $P_0 = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$, $P_1 = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$ — точки из $\text{epi} f$. Следовательно, $x_{n+1} \geq f(x_1, \dots, x_n)$, $y_{n+1} \geq f(y_1, \dots, y_n)$. Тогда

$$\begin{aligned} (1-\lambda)x_{n+1} + \lambda y_{n+1} &\geq (1-\lambda)f(x_1, \dots, x_n) + \lambda f(y_1, \dots, y_n) \geq \\ &\geq f[(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, \dots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n], \end{aligned}$$

то есть точка $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \in \text{epi} f$. Следовательно, $\text{epi} f$ есть выпуклое множество.

Обратно, пусть множество $\text{epi} f$ выпукло. Положим

$$P_0 = (x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))^T; \quad P_1 = (y_1, \dots, y_n, f(y_1, \dots, y_n))^T.$$

При любом $\lambda \in [0, 1]$ точка $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \in \text{epi} f$. Это означает, что точка

$$[(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, \dots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n, (1-\lambda)f(x_1, \dots, x_n) + \lambda f(y_1, \dots, y_n)] \in \text{epi} f.$$

Другими словами,

$$(1-\lambda)f(x_1, \dots, x_n) + \lambda f(y_1, \dots, y_n) \geq f[(1-\lambda)x_1 + \lambda y_1, \dots, (1-\lambda)x_n + \lambda y_n]$$

при $\forall \lambda \in [0, 1]$, то есть функция f выпукла. \square

Иногда *выпуклыми* называются функции с выпуклым надграфиком. Это позволяет использовать функции, принимающие бесконечные значения.

Рассмотрим теперь *дифференцируемые* на X выпуклые функции. Пусть X — открытое выпуклое подмножество на R^n , $f: X \rightarrow R$ — дифференцируемая функция,

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

есть градиент функции f в точке x .

Теорема 6.7. (Критерий выпуклости дифференцируемой функции) Для выпуклости функции f необходимо и достаточно, чтобы для любой пары $x, y \in X$ имело место неравенство

$$f(x) - f(y) \geq (f'(y), x - y). \quad (6.4)$$

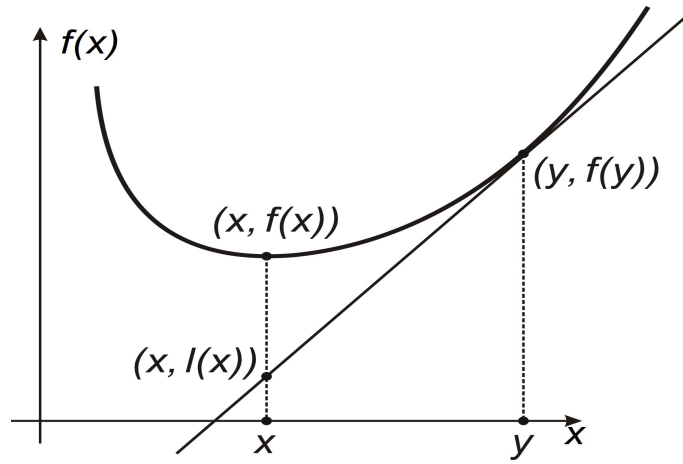


Рис. 25. Геометрическая интерпретация задачи

Доказательство. Геометрически график линейной функции

$$l(x) = f(y) + (f'(y), x - y)$$

называется *касательной гиперплоскостью* к графику функции f в точке $(y, f(y))$. Таким образом, соотношение (6.4) означает, что график функции f лежит не ниже касательной гиперплоскости к нему в точке $(y, f(y))$.

Пусть f выпукла. Фиксируем x и y из X . В силу неравенства Йенсена

$$f(y + \lambda(x - y)) - f(y) \leq \lambda[f(x) - f(y)] \quad (0 \leq \lambda \leq 1).$$

Тогда

$$\frac{f(y + \lambda(x - y)) - f(y)}{\lambda} \leq f(x) - f(y).$$

При $\lambda \rightarrow +0$ получим (6.4).

Обратно, пусть имеет место (6.4). Тогда

$$f(x) = \sup_{y \in X} \{f(y) + (f'(y), x - y)\}.$$

Отметим, что здесь можно писать \max , т. к. \sup достигается при $x = y$.

Теперь выпуклость f вытекает из следствия теоремы 6.3. \square

Для дважды дифференцируемых функций справедлив критерий выпуклости.

Теорема 6.8. Для выпуклости f необходимо и достаточно, чтобы вторая производная $f''(x)$ была неотрицательной матрицей в каждой точке x .

Эта теорема в комбинации с критерием Сильвестра составляет удобный аппарат для проверки выпуклости функций небольшого числа переменных, когда вычисление миноров не составляет труда.

Пример 6.2. Выпукла ли функция

$$f(x) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2?$$

Решение: имеем

$$\nabla f(x) = (2ax_1 + bx_2, 2cx_2 + bx_1)^T, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} 2a & b \\ b & 2c \end{pmatrix}.$$

По критерию Сильвестра $\nabla^2 f(x) \geq 0$ (неотрицательно определенная или полуположительная), если $a \geq 0$, $c \geq 0$, $4ac \geq b^2$ и положительно определена ($\nabla^2 f(x) > 0$), если $a > 0$, $4ac > b^2$. Поэтому в первом случае f выпукла, во втором сильно выпукла. \square

Пример 6.3. Выпукла ли функция

$$f(x) = \frac{x_1^2}{x_2} \quad \text{на} \quad X = \{x \in R^2 / x_2 > 0\}?$$

Решение:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{2x_1}{x_2}, -\frac{x_1^2}{x_2^2} \right)^T, \quad \nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x_2} & -\frac{x_1^2}{x_2^2} \\ -\frac{2x_1}{x_2^2} & \frac{2x_1^2}{x_2^2} \end{pmatrix}.$$

При $x_2 > 0$, $\nabla^2 f(x) \geq 0$, то есть f выпукла на X .

Отметим, что доказательство непосредственно по определению привело бы к громоздким выкладкам. \square

6.2. Выпуклая задача оптимизации

Задача

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in X \quad (6.5)$$

называется *выпуклой*, если X — выпуклое множество, f — выпуклая функция X . Данный тип задач оптимизации весьма интересен.

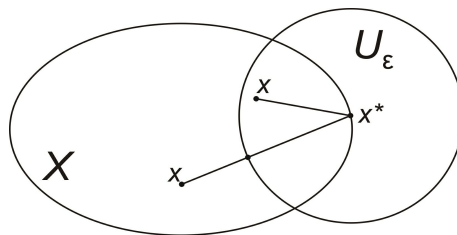


Рис. 26. Геометрическая интерпретация теоремы 6.9

Теорема 6.9. Если задача (6.5) выпукла, то любое её локальное решение является также глобальным.

Доказательство. Пусть x^* — локальное решение задачи (6.5), то есть при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется

$$f(x^*) \leq f(x) \quad (6.6)$$

при всех $x \in X \cap U_\varepsilon(x^*)$, где $U_\varepsilon(x^*) = \{x \in R^n / \|x - x^*\| < \varepsilon\}$ — шар радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в x^* .

Для любой точки $x \in X$, $x \neq x^*$, положим $\lambda = \min(\frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}, 1)$. Тогда $\lambda x + (1 - \lambda)x^* \in X \cap U_\varepsilon(x^*)$. В самом деле, если $x \in U_\varepsilon(x^*)$, то $\frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|} > 1$ и $\lambda = 1$, тогда $\lambda x + (1 - \lambda)x^* = x \in U_\varepsilon(x^*)$, а значит, и $x \in X \cap U_\varepsilon(x^*)$; если $x \in X$ и $x \notin U_\varepsilon(x^*)$, то $\frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|} < 1$ и $\lambda = \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}$. Тогда

$$x \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|} + \left(1 - \frac{\varepsilon}{\|x - x^*\|}\right) x^* = \frac{\varepsilon(x - x^*)}{\|x - x^*\|} + x^* = \varepsilon + x^* \in U_\varepsilon(x^*)$$

и $x \in X \cap U_\varepsilon(x^*)$. Следовательно, из (6.6)

$$f(x^*) \leq f(\lambda x + (1 - \lambda)x^*) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(x^*),$$

$$f(x^*) \leq \lambda f(x) + f(x^*) - \lambda f(x^*), \quad f(x^*) \leq f(x),$$

то есть x^* — глобальное решение задачи. \square

Таким образом, для выпуклых задач понятия локального и глобального решений не различаются и можно говорить просто о решении. Второе свойство выпуклых задач можно высказать в виде следующего простого принципа: *необходимые условия* оптимальности в том или ином классе задач оптимизации при соответствующих предположениях выпуклости *оказываются и достаточными*.

Теорема 6.10. Пусть функция f выпукла на R^n и дифференцируема в точке $x^* \in R^n$. Если $\nabla f(x^*) = 0$, то x^* — точка минимума f на X , то есть решение задачи (6.5).

Доказательство. Для любых $x \in X$ и $\lambda \in [0, 1]$ имеем

$$f[\lambda x + x^* - \lambda x^*] \leq \lambda f(x) + f(x^*) - \lambda f(x^*)$$

или

$$f(x) - f(x^*) \geq \frac{f(x^* + \lambda(x - x^*)) - f(x^*)}{\lambda} = \frac{(\nabla f(x^*), \lambda(x - x^*)) + o(\lambda)}{\lambda},$$

так как $\nabla f(x^*) = 0$, то $f(x) - f(x^*) = \frac{o(\lambda)}{\lambda}$.

Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, получаем $f(x) \geq f(x^*)$, то есть x^* — решение задачи (6.5). \square

Полученные свойства выпуклых задач имеют важное значение не только в теории, но и в численных методах оптимизации. Дело в том, что большинство существующих численных методов позволяют, вообще говоря, находить лишь локальные решения, а точнее, лишь стационарные точки задачи. Поэтому теоремы 6.9 и 6.10 говорят о том, что для выпуклой задачи отыскание стационарной точки означает отыскание решения, причем глобального.

Укажем еще одно полезное свойство выпуклых задач.

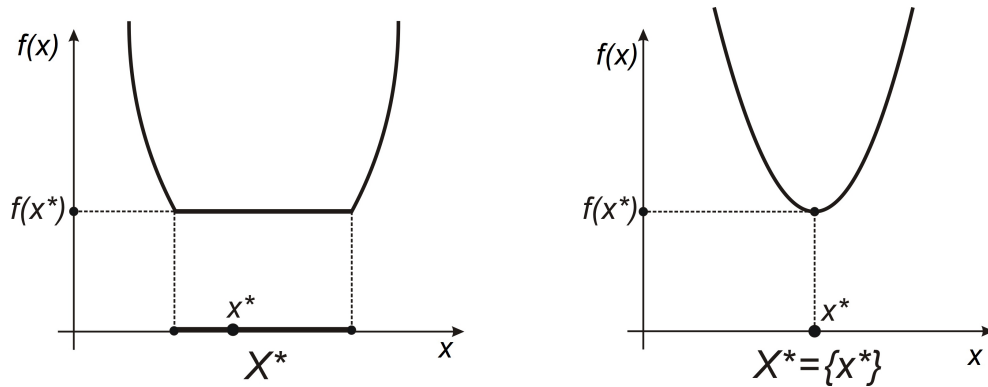


Рис. 27. Геометрическая интерпретация для выпуклой задачи

Теорема 6.11. Пусть задача (6.5) выпукла и имеет решение. Тогда множество её решений

$$X^* = \underset{x \in X}{\operatorname{Argmin}} f(x)$$

выпукло. Если при этом f строго выпукла на X , то решение задачи единственно, то есть X состоит из одной точки.

Доказательство. Пусть $x^1, x^2 \in X^*, \lambda \in [0, 1]$. Тогда $f(x^1) = f(x^2) = f^*$. При этом

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) = \lambda f^* + f(x^2) - \lambda f(x^2) = f^*. \quad (6.7)$$

По определению X^* неравенство здесь может выполняться только как равенство (X^* — гиперплоскость). Следовательно, $f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) = f^*$, то есть $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X^*$, то есть X^* выпукло. Пусть f строго выпукла. Если предположить, что в X^* существуют две различные точки x^1 и x^2 , то при $\lambda \in [0, 1]$ неравенство (6.7) должно быть строгим, что невозможно. \square

7. Задача выпуклого программирования

7.1. Безусловный минимум

Теорема 7.1. Пусть $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая дифференцируемая функция. Для того чтобы элемент $x^* \in \mathbb{R}^n$ был решением задачи

$$f(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (7.1)$$

необходимо и достаточно чтобы

$$f'(x^*) = 0. \quad (7.2)$$

Доказательство. Необходимость: имеет место для любой дифференцируемой в точке локального минимума x^* функции f .

Достаточность: если f выпукла, то

$$f(x) - f(x^*) \geq (f'(x^*), x - x^*) = 0 \quad \text{для любого } x \in \mathbb{R}^n,$$

т. е. $f(x) \geq f(x^*)$ и x^* — решение (7.1). \square

Замечание. Для выпуклой функции локальный минимум совпадает с глобальным.

7.2. Достаточные условия минимума в задаче выпуклого программирования

Рассматривается задача

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad (7.3)$$

$$f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0.$$

Здесь $f_i(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция, заданная на \mathbb{R}^n . Естественным образом определяется понятие решения задачи (7.3).

Теорема 7.2. Пусть существуют неотрицательные числа y_1^*, \dots, y_n^* и точка x^* , удовлетворяющая условиям

$$f_1(x^*) \leq 0, \dots, f_m(x^*) \leq 0, \quad (7.4)$$

$$y_1^* f_1(x^*) = \dots = y_m^* f_m(x^*) = 0, \quad (7.5)$$

$$\begin{aligned} f_0(x) + y_1^* f_1(x) + \dots + y_m^* f_m(x) &\geq \\ &\geq f_0(x^*) + y_1^* f_1(x^*) + \dots + y_m^* f_m(x^*). \end{aligned} \quad (7.6)$$

Тогда x^* — решение задачи (7.3).

Доказательство. Пусть x — допустимый элемент для задачи (7.3). Тогда

$$f_1(x) \leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0$$

и

$$y_1^* f_1(x) + \dots + y_m^* f_m(x) \leq 0.$$

Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} f_0(x) &\geq f_0(x) + y_1^* f_1(x) + \dots + y_m^* f_m(x) \geq \\ &\geq f_0(x^*) + y_1^* f_1(x^*) + \dots + y_m^* f_m(x^*) \geq f_0(x^*), \end{aligned}$$

то есть $f_0(x) \geq f_0(x^*)$ для любого допустимого x . Следовательно, x^* — решение задачи (7.3). \square

Условия (7.4) означают допустимость x^* , (7.5) — условия дополнительной нежесткости, (7.6) означает, что функция

$$L(x, y) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i f_i(x)$$

при $y = y^*$ достигает своего минимума в точке x^* .

Функция $L(x, y)$, как и обычно, называется функцией Лагранжа задачи (7.3).

7.3. Необходимые условия минимума в задаче выпуклого программирования

Если в (7.3) все функции выпуклы, то (7.3) называется задачей выпуклого программирования. Для таких задач теорема 7.2 допускает обращение.

Именно, если x^* — решение задачи (7.3), то при некоторых дополнительных ограничениях существуют неотрицательные числа y_1^*, \dots, y_m^* , удовлетворяющие условиям (7.5) и (7.6).

Определение. Задачи (7.3) называются *сильно совместными*, если существует элемент \tilde{f} , для которого

$$f_1(\tilde{f}) \leq 0, \dots, f_m(\tilde{f}) \leq 0. \quad (7.7)$$

Неравенства (7.7) называются *условиями Слейтера*. Эти неравенства гарантируют непустоту множества допустимых элементов задачи (7.3) с определенным запасом.

Теорема 7.3. Пусть $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 0, 1, \dots, m$) — выпуклые функции, непрерывно дифференцируемые в некоторой окрестности решения x^* задачи выпуклого программирования (7.3). Пусть ограничения задачи (7.3) сильно совместны. Тогда существуют неотрицательные числа y_1^*, \dots, y_m^* , обладающие свойствами (7.5) и (7.6).

Доказательство. Согласно теореме Джона найдутся такие числа $\lambda_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$, не все равные нулю, что

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* f_i'(x^*) = 0, \quad (*)$$

$$\lambda_i^* f_i'(x^*) = 0, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (**)$$

$$\lambda_i^* \geq 0, \quad (i = 0, 1, \dots, m). \quad (***)$$

Функция $f(x) = \sum_{i=0}^m \lambda_i^* f_i(x)$ выпукла на \mathbb{R}^n . Поэтому из (*) вытекает, что x^* есть решение задачи (7.3). Поэтому $f(x) \geq f(x^*)$ или

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* [f_i(x) - f_i(x^*)] \geq 0, \quad (7.8)$$

в частности,

$$\sum_{i=0}^m \lambda_i^* [f_i(\tilde{x}) - f_i(x^*)] \geq 0. \quad (7.9)$$

Введем множества

$$I_0 = \{i / \lambda_i^* = 0, \quad i = 0, 1, \dots, m\},$$

$$I_+ = \{i / \lambda_i^* > 0, \quad i = 0, 1, \dots, m\}.$$

Докажем, что $0 \in I_+$, т. е. что $\lambda_0^* > 0$.

Предположим противное, $\lambda_0^* = 0$. Если $i \in I_+$, то $f_i(x^*) = 0$ и в силу $f_i(\tilde{x}) < 0$

$$0 > f_i(\tilde{x}) - f_i(x^*) \geq (f_i(x^*), \tilde{x} - x^*).$$

Сложим по всем $i \in I_+$ последние неравенства. Имеем $\lambda_0^* > 0$.

$$0 > \sum_{i \in I_+} \lambda_i^* (f_i(\tilde{x}) - f_i(x^*)) = \sum_{i=0}^m \lambda_i^* (f_i(\tilde{x}) - f_i(x^*)),$$

что противоречит (7.9). Следовательно, $\lambda_0^* > 0$.

Разделим (7.8) на $\lambda_0^* > 0$. Тогда

$$f_0(x) - f_0(x^*) + \sum_{i=0}^m \frac{\lambda_i^*}{\lambda_0^*} [f_i(x) - f_i(x^*)] \geq 0.$$

Соотношение (7.6) доказано с $y_i^* = \lambda_i^* / \lambda_0^*$. Соотношение (7.5) следует из необходимого условия минимума (условия Ф. Джона), т. е. (**) с теми же y_i^* . \square

Замечание. Требование непрерывной дифференцируемости функций f_i ($i = 0, 1, \dots, m$) не может быть опущено.

7.4. Теорема Каратеодори

Напомним, что вектор x , определяемый соотношением

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k},$$

называется *выпуклой комбинацией* векторов x_1, \dots, x_k . Совокупность всевозможных выпуклых комбинаций векторов из X

$$\text{con}(X) = \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i / x_i \in X_i, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \right]$$

называется *выпуклой оболочкой* этих векторов ($\text{con } X$ от англ. convex).

Линейная комбинация $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ векторов x_1, \dots, x_k называется *неотрицательной*, если $\alpha_i \geq 0$ ($i = \overline{1, k}$).

Совокупность всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов из множества X называется *конической оболочкой* множества X (порожденной множеством X) и обозначается

$$\text{con}(X) = \left[\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i / x_i \in X_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad k \in \mathbb{N} \right].$$

Утверждение. Коническая оболочка $\text{con}(X)$ — выпуклое множество. Пусть a_1, \dots, a_m — конечная система векторов из \mathbb{R}^n , т. е. $\{a_i\}: i \in I$.

Теорема 7.4. Теорема Каратеодори. Для любого элемента $a \neq 0$ из K существует такое подмножество I_+ множества I , что справедливы утверждения:

- 1) векторы a_i ($i \in I$) линейно независимы;
- 2) $a = \sum_{i \in I_+} \lambda_i a_i$ при $\lambda_i > 0$ ($i \in I_+$).

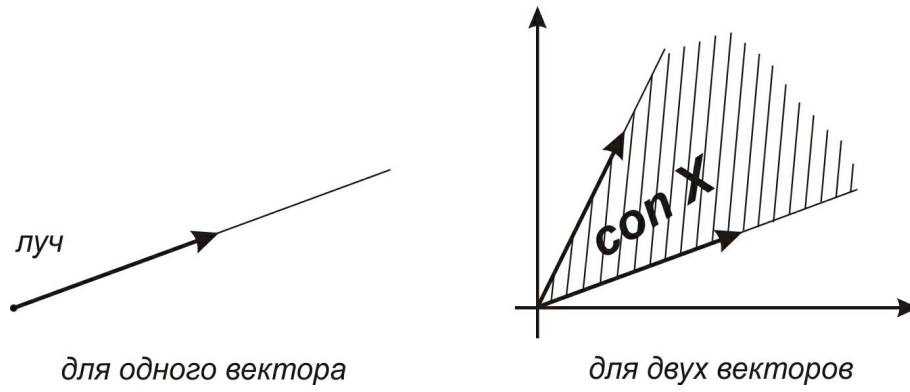


Рис. 28. Примеры конических оболочек

Доказательство. По определению множество K состоит из всевозможных неотрицательных комбинаций любых элементов системы a_i . Пусть $a \in K \setminus 0$. Тогда $a = \sum_{i \in I} \mu_i a_i = \sum_{i \in I_1} \mu_i a_i$, где $\mu_i \geq 0$ и не все равны 0, $I_1 = \{i / \mu_i > 0\}$.

Если векторы a_i ($i \in I_1$) линейно независимы, то все доказано. В противном случае найдутся такие числа ξ_i ($i \in I_1$), не все равные нулю, что

$$\sum_{i \in I_1} \xi_i a_i = 0 \quad (\text{линейная зависимость}).$$

Среди этих чисел ξ_i ($i \in I_1$) есть и отрицательные. Поэтому множество индексов $Y = \{i / \xi_i < 0\}$ непусто. Рассмотрим отношения $\frac{\mu_i}{\xi_i} = \gamma_i$ ($i \in Y$) и выберем среди них наибольшее: $\gamma_k = \max_Y \gamma_i$. Умножим обе части соотношений $\sum_{i \in I_1} \xi_i a_i = 0$ на γ_k и вычтем из соотношения $a = \sum_{i \in I_1} \mu_i a_i = 0$. Получим

$$a = \sum_{i \in I_1} (\mu_i - \xi_i \gamma_k) a_i.$$

Определим знаки коэффициентов $\mu_i - \xi_i \gamma_k$:

1. $i \notin Y \Rightarrow \mu_i - \xi_i \gamma_k > 0$;
2. $i = k \Rightarrow \mu_k - \xi_k \gamma_k = \mu_k - \xi_k \frac{\mu_k}{\xi_k} = 0$;
3. $i \notin Y \setminus K \Rightarrow \mu_i - \xi_i \gamma_k = \xi_i \gamma_i - \xi_i \gamma_k = \xi_i (\gamma_i - \gamma_k) > 0$.

Из таблицы видно, что коэффициенты $\mu_i - \xi_i \gamma_k$ неотрицательны и, по крайней мере, один из них обращается в нуль. Таким образом уменьшен набор элементов a_i , конической оболочкой которых является a . После конечного числа подобных прореживаний исходного множества I получим искомое множество I_+ . \square

Следствие. Пусть размерность пространства равна n . Тогда любой элемент a из $K \setminus 0$ может быть представлен в виде положительной линейной комбинации не более чем n элементов a_i .

7.5. Теорема об очистке

Рассматривается задача выпуклого программирования вида

$$\begin{aligned} f_0(x) &\rightarrow \min, \\ f_1(x) &\leq 0, \dots, f_m(x) \leq 0 \quad (i=0, 1, \dots, m). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Здесь $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые функции на \mathbb{R}^n .

Теорема 7.5. Пусть задача (7.10) имеет решение x^* , функции f_i ($i=0, 1, \dots, m$) — непрерывно дифференцируемы в окрестности x^* и система ограничений (7.10) сильно совместна. Тогда существует такое подмножество I_+ множества $\{1, \dots, m\}$, что

1) x^* является решением задачи выпуклого программирования

$$f_0(x) \rightarrow \min, \quad f_i(x) \leq 0 \quad (i \in I_+), \quad (7.11)$$

2) $f_i(x^*) = 0$ ($i \in I_+$),

3) векторы $f'_i(x^*)$ ($i \in I_+$) линейно независимы, в частности, $|I_+| \leq n$.

Доказательство. Вырожденный случай. Имеем $f'_0(x^*) = 0$. Тогда x^* минимизирует f_0 на всем \mathbb{R}^n , т. е. точка x^* — точка глобального минимума. В качестве I_+ можно взять \emptyset .

Невырожденный случай. Здесь $f'_0(x^*) \neq 0$. Применим теорему 7.3, согласно которой существуют неотрицательные числа y_i^* ($i = \overline{1, m}$), обладающие свойствами:

$$y_i^* f_i(x^*) = 0, \quad (i = \overline{1, m}), \quad (7.12)$$

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^m y_i^* f_i(x) \geq f_0(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* f_i(x^*). \quad (7.13)$$

Это неравенство означает наличие минимума в точке x^* функции Лагранжа, а значит, выполняется необходимое условие экстремума:

$$f'_0(x^*) + \sum_{i=1}^m y_i^* f'_i(x^*) = 0. \quad (7.14)$$

Без ограничения общности можно считать, что $y_i^* > 0$, а $f_i(x^*) = 0$, ($i = \overline{1, m}$), т. е. вектор

$$-f'_0(x^*) = \sum_{i=1}^m y_i^* f'_i(x^*)$$

есть неотрицательная комбинация векторов $f'_i(x^*)$.

Согласно теореме Каратеодори существует множество $I_+ \subset \{1, \dots, m\}$ такое, что

- 1) $f'_i(x^*)$ ($i \in I_+$) линейно зависимы;
- 2) $-f'_0(x^*) = \sum_{i \in I_+} \lambda_i f'_i(x^*)$, $\lambda_i > 0$.

Функция

$$f(x) = f_0(x) + \sum_{i \in I_+} \lambda_i f_i(x)$$

достигает своего минимума на \mathbb{R}^n в точке x^* . Кроме того,

$$\lambda_i f_i(x^*) = 0 \quad (i \in I_+).$$

В силу теоремы 7.2 точка x^* есть решение задачи (7.11). \square

Теорема 7.6. Пусть $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклые функции на \mathbb{R}^n ($i \in I$), \hat{x} — решение задачи

$$\max_{i \in I} g_i(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

функции g_i непрерывно дифференцируемы в окрестности точки \hat{x} . Тогда найдется такое множество $I_+ \in I$, $|I_+| \leq n+1$, что \hat{x} есть решение задачи

$$\max_{i \in I_+} g_i(x) \rightarrow \min, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad g_i(\hat{x}) = \max_{i \in I} g_i(\hat{x}).$$

8. Простейшая вариационная задача (ПВЗ)

Началом разработки вариационного исчисления можно считать 1696 год, когда Иоганн Бернулли поставил задачу о линии наискорейшего ската (брахистохроне). В решении этой задачи приняли участие лучшие математики того времени: Лейбниц, Ньютон, Бернулли, Лопиталь. После этого в XVIII веке Эйлером и Лагранжем были даны общие методы решения задач вариационного исчисления. Их работу в XIX веке продолжили Лежандр, Коши, Якоби, Гаусс, Пуассон, Остроградский и др.

Однако до недавнего времени решения задач были неполны, и лишь в конце XIX века в работах Вейерштрасса и Гильберта было дано полное решение основных задач вариационного исчисления.

8.1. Две задачи

Задача. Среди линий, соединяющих две точки плоскости, найти ту, дуга которой при вращении около оси OX образует поверхность с наименьшей площадью.

Пусть данные точки будут: $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$ и пусть $y = f(x)$ — уравнение линии, их соединяющей. Тогда величина площади поверхности вращения выразится интегралом

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Таким образом, поставленная задача сводится к отысканию такой линии $y = f(x)$, проходящей через точки A и B , для которой величина S , или, что то же самое, интеграл

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

достигает наименьшего значения.

Задача. Найти среди линий, соединяющих две данные точки A и B , ту, двигаясь по которой свободно пущенная материальная точка пройдет путь в кратчайшее время.

Примем первую точку за начало координат и направим ось OY вертикально вниз. Пусть $y = f(x)$ — уравнение кривой, соединяющей точку A со второй точкой $B(x_1, y_1)$. Найдем время T , нужное для прохождения тяжелой материальной точкой пути AB , при движении по этой кривой.

Пусть движущаяся точка в момент времени t занимает положение $M(x, y)$ и имеет скорость v . Тогда по уравнению силы

$$\frac{mv^2}{2} = mgy,$$

где $mv^2/2$ — приращение силы от $t=0$ до t , т. к. в начальный момент времени скорость равна 0, а mgy есть работа силы тяжести.

Из этого уравнения определяем скорость v :

$$v = \sqrt{2gy},$$

откуда

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad dS = \sqrt{1+y'^2} dx, \quad dt = \frac{dS}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}} = \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}}.$$

Тогда все время T , нужное для прохождения пути AB , будет

$$T = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{2gy}},$$

где g — ускорение свободного падения — константа. В нашем случае задача приведена к нахождению функции, дающей минимум некоторому интегралу

$$J = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} dx.$$

8.2. Понятие функционала

Вариационное исчисление занимается только задачами нахождения максимума и минимума функционалов, ограничиваясь при этом простейшими из них.

Функционал является важнейшим обобщением понятия функции. Существенное отличие функционала состоит в том, что значения его аргументов не числа, а функции одного или нескольких переменных, т. е. функционал — такого рода зависимость, что каждой функции (или нескольким функциям) определенного класса ставится в соответствие число — значение функционала. Геометрически разница в том, что обычная функция одного или нескольких переменных есть *функция точки* на прямой, плоскости или в пространстве, функционал же есть *функция* более сложных геометрических образований: *линий, поверхностей* и т. п. Например, если функционал зависит от двух функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, то

он представляет собой функцию от пространственной кривой $y = f(x)$, $z = \varphi(x)$.

Простейшим примером функционала является определенный интеграл функции

$$V[f(x)] = \int_a^b f(x) dx.$$

Другим важным общим примером функционала является интеграл

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx,$$

который каждой дифференцируемой функции ставит в соответствие число. При частном выборе функции F из I получаются интегралы J , к исследованию которых приводится решение задач п.1, т. е. эти интегралы J также представляют собой некие функционалы.

8.3. Постановка простейшей вариационной задачи

Основной задачей вариационного исчисления является задача о минимизации функционала

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y(x), \frac{dy}{dx}(x)) dx$$

на совокупности функций, удовлетворяющих краевым условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$.

Задача записывается так:

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx \rightarrow \min, \\ y(x_0) &= y_0; \quad y(x_1) = y_1. \end{aligned} \tag{8.1}$$

Задача (8.1) поставлена недостаточно четко, поскольку не определен класс функций, на которых минимизируется функционал, не указаны предположения относительно функции L , называемой *интегрантом* функционала F .

Пусть m — целое неотрицательное число. Обозначим через $C^m[x_0, x_1]$ совокупность непрерывных m раз дифференцируемых на $[x_0, x_1]$ функций. При естественном определении *суммы* функций и

умножении функции на число класс $C^m[x_0, x_1]$ образует линейное пространство.

Если в $C^m[x_0, x_1]$ ввести норму

$$\|y\|_m = \sum_{i=0}^m \max_{[x_0, x_1]} \left| \frac{d^i}{dx^i} y(x) \right|,$$

то $C^m[x_0, x_1]$ становится банаховым пространством. Положим

$$M = \{y(x) : y \in C^1[x_0, x_1], \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1\},$$

$$M_0 = \{y(x) : y \in C^1[x_0, x_1], \quad y(x_0) = y(x_1) = 0\}.$$

Элемент y^* из M назовем точкой *абсолютного минимума* функционала F на множестве M или глобальным решением задачи (8.1), если

$$F(y^*) \leq F(y) \quad \text{для} \quad (\forall) y(x) \in M. \quad (8.2)$$

Элемент y^* из M называется точкой *локального минимума* функционала F на M или локальным решением задачи (8.1), если $(\exists) \delta > 0$, что

$$F(y^*) \leq F(y) \quad \text{для} \quad (\forall) y \in M \cap U_\delta(y^*), \quad (8.3)$$

где

$$U_\delta(y^*) = \{y(x) : y \in C^1[x_0, x_1], \quad \|y - y^*\|_1 < \delta\},$$

т. е. шар радиуса δ с центром в точке y^* .

Таким образом, ПВЗ есть задача об отыскании такой кривой $y = f(x)$, лежащей в области M и проходящей через две данные точки $A(x_0, y_0)$ и $B(x_1, y_1)$, на которой интеграл $F(y)$ принимает наименьшее значение.

Эти кривые будем называть *допустимыми*.

Задача о *максимуме*, как и обычно, сводится к задаче о минимуме, если заменить функцию L на $-L$.

Замечание. Поставленная задача (8.1) аналогична задаче об абсолютном минимуме в дифференциальном исчислении, но существенная разница между ними заключается в том, что основная задача вариационного исчисления в отличие от задачи дифференциального исчисления не всегда имеет решение.

Так же, как и в дифференциальном исчислении, для решения задачи об абсолютном минимуме нужно предварительно решить задачу об относительном (локальном) минимуме, т. е. о нахождении таких *допустимых кривых*, которые дают интегралу $F(y)$ значение, меньшее по сравнению с *соседними кривыми*. Если будет найдено конечное число кривых, дающих интегралу локальный минимум, и если из физических

или каких-либо других соображений ясно, что задача об *абсолютном минимуме* должна иметь *единственное решение*, то искомую кривую можно выбрать из найденных кривых. В дальнейшем будем решать задачу о локальном минимуме.

Определение. Будем говорить, что допустимая кривая близка к другой допустимой кривой $y = f(x)$ и лежит в области M_ε , если в промежутке $[x_0, x_1]$ справедливо неравенство

$$f(x) - \varepsilon < \bar{y} < f(x) + \varepsilon$$

или что $\bar{y} = f(x) + \omega(x)$, где $\omega(x) \in C^1[x_0, x_1]$, $\omega(x_0) = \omega(x_1) = 0$, $|\omega(x)| < \varepsilon$ для $x_0 < x < x_1$.

Таким образом, кривая $y = f(x)$ дает минимум интегралу $F(y)$, если $\exists \varepsilon > 0$, что для $\forall \bar{y} \in M_\varepsilon$:

$$\int_{x_0}^{x_1} L[x, f(x), f'(x)] dx < \int_{x_0}^{x_1} L[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)] dx,$$

где $\omega(x)$ удовлетворяет сформулированным условиям.

8.4. Вспомогательные предложения

Для анализа задачи (8.1) потребуются вспомогательные предложения, представляющие самостоятельный интерес.

Лемма 8.1. Если интеграл $\int_{x_0}^{x_1} G(x)\eta(x) dx$, где $G(x)$ — непрерывная в $[x_0, x_1]$ функция, обращается в нуль для всякой функции $\eta(x)$, непрерывной вместе со своей производной в $[x_0, x_1]$ и обращающейся в нуль на его концах: $\eta(x_0) = \eta(x_1) = 0$, т. е. $\eta(x) \in M_0$, то $G(x) = 0$ для любого $x \in [x_0, x_1]$.

Доказательство. Предположим, что $\exists \xi \in [x_0, x_1]$, что $G(\xi) \neq 0$. Например, $G(\xi) > 0$. Тогда за счет непрерывности $G(x)$ она будет положительна и в некотором промежутке $(\xi_1, \xi_2) \subset [x_0, x_1]$, т. е. $x_0 < \xi_1 < \xi < \xi_2 < x_1$.

Определим функцию $\eta(x)$ следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & x_0 \leq x < \xi_1, \\ (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2, & \xi_1 \leq x < \xi_2, \\ 0, & \xi_2 \leq x \leq x_1. \end{cases}$$

Построенная $\eta(x)$ удовлетворяет ограничениям леммы, т. е. $\eta(x) \in M_0$. Отметим, что непрерывность в точках ξ_1 и ξ_2 доказывается по определению:

$$\eta(\xi_1-0) = \eta(\xi_1) = \eta(\xi_1+0)$$

и т. п. Тогда

$$\int_{x_0}^{x_1} G(x)\eta(x) dx = \int_{x_0}^{\xi_1} + \int_{\xi_1}^{\xi_2} + \int_{\xi_2}^{x_1} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2 G(x) dx > 0,$$

т. е. подынтегральная функция положительна, что противоречит условию леммы. Итак, $G(x) = 0$ для $\forall x \in [x_0, x_1]$. \square

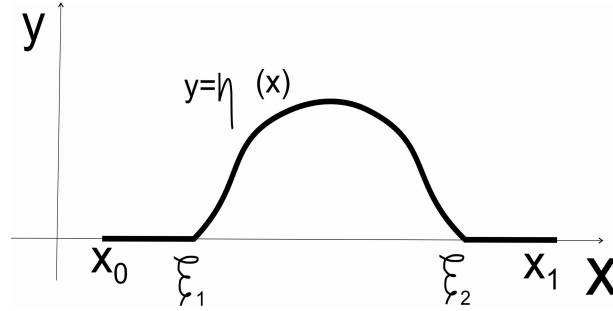


Рис. 29. Иллюстрация леммы 8.1

Лемма 8.2. (Лемма Дюбуа-Реймона) Пусть $g(x)$ непрерывная на $[x_0, x_1]$ функция и

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x)h'(x) dx = 0 \quad (8.4)$$

для любой функции $h(x) \in M_0$. Тогда $g(x) \equiv C$.

Доказательство. Подберем константу C таким образом, чтобы уравнение $\frac{dh}{dx} = g(x) - C$ имело решение класса M_0 . Это возможно, если

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x) dx = C(x_1 - x_0), \quad (h(x) \in M_0).$$

Справедливо равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} [g(x) - C]^2 dx \stackrel{\text{I}}{=} \int_{x_0}^{x_1} [g(x) - C] \frac{dh}{dx} dx \stackrel{\text{II}}{=} \int_{x_0}^{x_1} g(x) \frac{dh}{dx} dx \stackrel{\text{III}}{=} 0. \quad (8.5)$$

I Следует из равенства $h' = g - C$;

II Основано на равенстве $h(x_0) = h(x_1) = 0$;

III Следует из (8.4);

Функция $[g(x) - C]^2$ неотрицательна, непрерывна на $[x_0, x_1]$, и интеграл от нее равен нулю. Это возможно лишь в случае $g(x) \equiv C$. \square

Лемма 8.3. Пусть $p(x)$, $g(x)$ — непрерывные на $[x_0, x_1]$ функции и

$$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)h(x) + g(x)h'(x)] dx = 0 \quad (8.6)$$

для любой $h(x) \in M_0$. Тогда

$$g(x) - \int_{x_0}^x p(s) ds = C.$$

Доказательство. Положим

$$P(x) = \int_{x_0}^x p(s) ds.$$

Тогда верны равенства

$$\int_{x_0}^{x_1} p(x)h(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} P'(x)h(x) dx = - \int_{x_0}^{x_1} P(x)h'(x) dx + \underbrace{P(x)h(x) \Big|_{x_0}^{x_1}}_{=0},$$

$$\int_{x_0}^{x_1} [p(x)h(x) + g(x)h'(x)] dx = \int_{x_0}^{x_1} [g(x) - P(x)]h'(x) dx = 0$$

для любой функции $h(x) \in M_0$. Тогда в силу леммы 8.2 функция $g(x) - P(x) \equiv C$. \square

9. Первая вариация. Уравнение Эйлера

Займемся поиском необходимых условий, чтобы кривая $y = f(x) \in M$ являлась решением задачи (8.1). По сформулированному определению для этого необходимо и достаточно, чтобы при достаточно малом ε для всякой функции $\omega(x)$, удовлетворяющей условию

$$\omega(x) \in M_0 \quad \text{и} \quad |\omega(x)| < \varepsilon \quad \text{для} \quad \forall x \in [x_0, x_1] \quad (9.1)$$

выполнялось условие

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x, f(x), f'(x)) dx < \int_{x_0}^{x_1} L[x, f(x) + \omega(x), f'(x) + \omega'(x)] dx. \quad (9.2)$$

Рассмотрим функцию $\eta(x) \in M_0$. Тогда при достаточно малом α функция $\omega(x) = \alpha\eta(x)$ будет удовлетворять условиям (9.1), а также при $\omega(x) = \alpha\eta(x)$ будет выполняться неравенство (9.2):

$$\int_{x_0}^{x_1} L(x, f(x), f'(x)) dx < \int_{x_0}^{x_1} L[x, f(x) + \alpha\eta(x), f'(x) + \alpha\eta'(x)] dx = Y(\alpha).$$

Тогда при достаточно малых α

$$J(0) < J(\alpha),$$

т. е. функция $J(\alpha)$ достигает минимума при $\alpha = 0$. Это означает, что задача приведена, в известной части, к задаче дифференциального исчисления.

Разложим функцию $J(\alpha)$ в ряд Маклорена:

$$J(\alpha) = J(0) + \frac{\alpha}{1} J'(0) + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} J''(0) + \dots$$

Выражения $\alpha J'(0), \alpha^2 J''(0), \dots$ называются *первой, второй, ... вариацией* интеграла J и обозначаются $\delta J, \delta^2 J, \dots$

Из теорем дифференциального исчисления вытекает, что для того, чтобы функция $y = f(x)$ являлась решением задачи (8.1), т. е. давала минимум интегралу $\int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx$, необходимо, чтобы $J'(0) = 0$, т. е.

$$\delta J = 0, \quad (9.3)$$

причем это условие должно выполняться для всякой функции $\eta(x) \in M_0$.

Распишем выражение $\delta J = \alpha J'(0)$. Дифференцируя $J(\alpha)$ под знаком интеграла по α и полагая затем $\alpha = 0$, найдем $J'(0)$:

$$\delta J = \alpha J'(0) = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx. \quad (9.4)$$

При этом предполагается, что функция $L(x, y, \dot{y})$ имеет непрерывные частные производные.

Преобразуем второе слагаемое правой части (9.4) при условии, что функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$. Интегрируя по частям, получим

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y'} \eta'(x) dx = \left[\eta(x) \frac{\partial L}{\partial y'} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) dx,$$

при этом в силу $\eta(x) \in M_0$ выражение $\left[\eta(x) \frac{\partial L}{\partial y'} \right] \Big|_{x_0}^{x_1} = 0$. Тогда

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] dx.$$

При $\delta J = 0$ выполнены все условия леммы 1, поэтому в промежутке $[x_0, x_1]$

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (9.5)$$

Таким образом, для того чтобы функция $y = f(x)$ являлась решением задачи (8.1), *необходимо*, чтобы эта функция удовлетворяла дифференциальному уравнению (9.5).

Это уравнение было найдено впервые *Эйлером* и носит его имя.

Раскрывая член $\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right)$, можно переписать уравнение Эйлера (9.5) в развернутом виде:

$$\frac{\partial^2 L(x, y, y')}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

т. е. уравнение Эйлера для ПВЗ есть дифференциальное уравнение второго порядка.

Его общее решение $f_1(x, C_1, C_2)$ содержит две произвольных постоянных C_1 и C_2 . Если потребовать, чтобы интегральная кривая прошла через две заданные точки A и B , то константы C_1 и C_2 надо выбрать

так, чтобы $f_1(x_0, C_1, C_2) = y_0$ и $f_1(x_1, C_1, C_2) = y_1$. Т. к. число уравнений равно числу неизвестных, то эта задача, вообще говоря, имеет решение.

Интегральные кривые уравнения Эйлера называют *экстремальями* функционала F .

9.1. Уравнение Эйлера в интегральной форме

Как и раньше, предполагается, что функция $L(x, y, u)$ и ее частные производные

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x, y, u) \quad \text{и} \quad \frac{\partial L}{\partial u}(x, y, u)$$

непрерывны по совокупности переменных.

Теорема 9.1. Пусть y^* — локальное решение задачи (8.1),

$$L_y^*(x) = \frac{\partial}{\partial y} L(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)), \quad L_u^*(x) = \frac{\partial}{\partial u} L(x, y^*(x), \dot{y}^*(x)).$$

Тогда

$$L_u^*(x) - \int_{x_0}^x L_y^*(s) ds = C. \quad (9.6)$$

Доказательство. Пусть $h \in M_0$. При любом λ функция $y^* + \lambda h \in M$. Введем в рассмотрение функцию

$$\varphi(\lambda) = F(y^* + \lambda h), \quad \text{где} \quad F(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y') dx.$$

Функция $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ дифференцируема в любой точке, в частности

$$\varphi'(0) = \int_{x_0}^{x_1} [L_y^*(x)h(x) + L_u^*(x)h'(x)] dx.$$

Поскольку y^* — локальное решение задачи (8.1), то $\lambda = 0$ — точка локального минимума функции $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Поэтому $\varphi'(0) = 0$.

Выполнены все условия леммы 3 при $p(x) = L_y^*(x)$ и $g(x) = L_u^*(x)$. Теперь (9.6) следует из леммы 3. \square

Следствие. В условиях теоремы 9.1 функция

$$L_y^*(x) \in C^1[x_0, x_1] \quad \text{и} \quad \frac{d}{dx} L_u^*(x) = L_y^*(x). \quad (9.7)$$

Уравнение (9.6) называется *уравнением Эйлера в интегральной форме*, а (9.7) — дифференциальным уравнением Эйлера.

Теорема 9.1 означает, что всякое *локальное решение* ПВЗ есть *экстремаль*. Обратное, вообще говоря, неверно.

Если функция L дважды дифференцируема, $y^*(x) \in C^2[x_0, x_1]$, то (9.7) есть дифференциальное уравнение II порядка.

Теорема 9.2. (Гильберта) Пусть $y^*(x) \in C^1[x_0, x_1]$; $L \in C^2$, y_0 — решение уравнения Эйлера в интегральной форме,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} L(x, y_0(x), y'_0(x)) > 0. \quad (9.8)$$

Тогда $y_0(x) \in C^2[x_0, x_1]$.

Условие (9.8) называют *условием Гильберта*. Оно гарантирует повышенную гладкость экстремалей ПВЗ.

Уравнение Эйлера — это необходимое условие, аналогичное условию существования экстремума I порядка в конечномерных задачах.

Необходимому условию II порядка в вариационном исчислении соответствует условие Гильберта $\frac{\partial^2 L}{\partial u^2} \geq 0$.

9.2. Достаточное условие глобального минимума

Теорема 9.3. Пусть функции L , $\frac{\partial L}{\partial y}$, $\frac{\partial L}{\partial u}$ непрерывны по совокупности переменных и при $\forall x$ из $[x_0, x_1]$ функция $L(x, \cdot, \cdot): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла. Если y^* — экстремаль функционала F и удовлетворяет граничным условиям $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$, то y^* — глобальное решение ПВЗ.

Доказательство. Пусть $h \in M_0$, $\varphi(\lambda) = F(y^* + \lambda h)$. Из выпуклости функции $L(x, \cdot, \cdot)$ следует, что $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ выпукла. Поскольку y^* — экстремаль функционала F , то $\varphi'(0) = 0$. За счет выпуклости функции φ точка 0 является точкой глобального минимума функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. В частности, $\varphi(1) \geq \varphi(0)$, т. е. $F(y^* + h) \geq F(y^*)$. Если $y = y^* + h$, где $y^* \in M$, а $h \in M_0$, то $y \in M$. Следовательно, для любой функции $y \in M$ верно $F(y) \geq F(y^*)$, т. е. y^* — глобальное решение ПВЗ. \square

10. Некоторые случаи интегрируемости уравнений Эйлера

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение II порядка. Интересны случаи, когда порядок уравнения может быть понижен. Отметим 4 ситуации. Рассмотрим случаи, когда интегрант L , стоящий под знаком интеграла (1), не зависит от каких-либо переменных x, y, y' .

1) $L = L(y')$. В этом случае уравнение Эйлера (9.5) приводится к виду:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \cdot y'' = 0$$

или просто $y'' = 0$. Его общий интеграл есть $y = ax + b$ и экстремали суть прямые линии.

2) $L = L(y, y')$. Уравнение Эйлера имеет вид

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \cdot y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial y'} \cdot y' - \frac{\partial L}{\partial y} = 0.$$

Чтобы найти его первый интеграл, рассмотрим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(L - \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot y' \right) &= \frac{\partial L}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot y'' - \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot y'' - \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} \cdot y'^2 - \frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \cdot y' \cdot y'' = \\ &= -y' \left(\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \cdot y'' + \frac{\partial^2 L}{\partial y' \partial y} \cdot y' - \frac{\partial L}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Если функция y удовлетворяет уравнению Эйлера, то правая часть последнего равенства обращается в нуль и

$$L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} = C \quad (10.1)$$

дает первый интеграл уравнения Эйлера. После этого интегрирование может быть доведено до конца с помощью квадратуры.

В задачах механики $L_{\dot{y}}(x, y, \dot{y})\dot{y} - L(x, y, \dot{y})$ есть *энергия*, поэтому соотношение (10.1) называют *интегралом энергии*.

3) $L = L(x, y')$. Так как в этом случае

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 0,$$

то уравнение Эйлера будет

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) = 0,$$

а следовательно,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}(x, y') = C. \quad (10.2)$$

Замечание. В механических задачах $L_{\dot{y}}$ — импульс, поэтому соотношение (10.2) выражает *закон сохранения импульса*. Функция $L_{\dot{y}}(x, \dot{y})$ вовсе не обязана быть постоянной. Она постоянна лишь вдоль экстремалей.

Решая это уравнение относительно y' и интегрируя, находим общее решение уравнения Эйлера.

4) $L = L(x, y)$. В этом случае уравнение Эйлера

$$\frac{\partial L(x, y)}{\partial y} = 0 \quad (10.3)$$

не будет дифференциальным. Как правило, уравнение (10.3) не имеет решений, удовлетворяющих краевым условиям, фигурирующим в исходной экстремальной задаче. Основная задача разрешима здесь лишь при исключительных точках (x_0, y_0) и (x_1, y_1) .

10.1. Примеры. Принцип Ферма для задачи геометрической оптики

Пусть в прозрачной среде с переменной оптической плотностью даны две точки A и B . Требуется определить траекторию луча света, идущего от A к B . Решение задачи основано на так называемом принципе Ферма: из всех кривых, соединяющих A и B , траектория луча света есть линия, по которой свет проходит из A в B в кратчайшее время.

Ограничиваясь плоским случаем, примем за плоскость распространения света плоскость XOY и пусть

$$A = (x_0, y_0), \quad B = (x_1, y_1),$$

а

$$y = y(x), \quad x_0 \leq x \leq x_1$$

есть некоторая кривая, соединяющая эти точки.

Обозначим через $v(x, y)$ скорость света в точке (x, y) . Пусть

$$y = y(x)$$

есть уравнение кривой, по которой движется точка из A в B . Скорость движения точки равна отношению приращения пути к приращению времени

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{dt},$$

где dS и dt — бесконечно малые промежутки пройденного пути и времени соответственно. Отсюда

$$dt = \frac{\sqrt{1 + y'^2} dx}{v(x, y)}.$$

Интегрируя, получим время T , потребное для покрытия луча света от точки A до точки B по кривой $y = y(x)$:

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} dx}{v(x, y(x))}.$$

Согласно принципу Ферма, задача определения траектории луча света сводится к определению линии, для которой интеграл (функционал) T принимает наименьшее значение: $T \rightarrow \min$.

Частный случай: $v(x, y) = y$. Тогда интеграл энергии

$$y' \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = C,$$

поскольку $L = L(y, y')$.

Экстремали являются окружностями в полуплоскости $y > 0$ с центрами на оси OX .

$$y' \frac{y'}{y\sqrt{1 + y'^2}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{y} = C,$$

$$\frac{y'^2 - (1 + y'^2)}{y\sqrt{1 + y'^2}} = C,$$

$$Cy\sqrt{1 + y'^2} = -1,$$

$$C^2 y^2 (1 + y'^2) = 1,$$

$$1 + y'^2 = \frac{1}{C^2 y^2},$$

$$\frac{1}{C^2 y^2} - 1 = y'^2,$$

$$\frac{1 - C^2 y^2}{C^2 y^2} = y'^2,$$

$$\frac{\sqrt{1 - C^2 y^2}}{Cy} = \frac{dy}{dx},$$

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{1 - C^2 y^2}} = \int \frac{dx}{C},$$

$$-\frac{1}{2C} \int \frac{d(1 - C^2 y^2)}{\sqrt{1 - C^2 y^2}} = \int dx,$$

$$-\frac{1}{C} \sqrt{1 - C^2 y^2} = x + C_1,$$

$$\frac{1}{C^2} (1 - C^2 y^2) = (x + C_1)^2,$$

$$(x - C_1)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2}$$

— семейство экстремалей — кривые окружностей.

10.2. Задача о наименьшей поверхности вращения

Рассмотрим функционал

$$J = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + y'^2} dx,$$

определяющий площадь поверхности, образованной вращением гладкой кривой $y = y(x)$ вокруг оси OX .

Имеем $L = L(y, y')$, поэтому уравнение Эйлера записываем по формуле (10.1) для частного случая:

$$\begin{aligned} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} - y' \cdot y \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C, \\ y \cdot (1 + y'^2) - y \cdot y'^2 &= C \cdot \sqrt{1 + y'^2}, \\ y &= C \cdot \sqrt{1 + y'^2}, & y^2 &= C^2 \cdot (1 + y'^2), \\ y'^2 &= \frac{y^2 - C^2}{C^2}, & y' &= \frac{\sqrt{y^2 - C^2}}{C}, \\ dx &= \frac{C \cdot dy}{\sqrt{y^2 - C^2}}, \end{aligned} \quad (*)$$

то есть

$$\begin{aligned} x - C_1 &= C \cdot \ln(y + \sqrt{y^2 - C^2}), \\ y + \sqrt{y^2 - C^2} &= \exp\left(\frac{x - C_1}{C}\right) \end{aligned}$$

— это уравнение цепной линии, записанное относительно переменной x (вернее, неявно заданное).

Используем другой метод интегрирования. В (*) сделаем подстановку $y = C \cdot \operatorname{ch} t$. Получаем

$$dx = \frac{C^2 \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{C^2 \operatorname{ch}^2 t - C^2}},$$

то есть

$$dx = \frac{C^2 \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{C^2 \operatorname{sh}^2 t}}, \quad dx = C dt$$

или

$$Ct = x + C_1, \quad t = \frac{x + C_1}{C}.$$

Таким образом,

$$y = C \cdot \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C}.$$

Следовательно, искомые экстремальные кривые представляют семейство цепных линий, имеющих ось симметрии, параллельную оси OY . Поверхность вращения такой цепной линии называется *катеноидом*.

Постоянные C и C_1 определяются из условий, что кривая проходит через две заданные точки A и B , но эта задача разрешима не при всех положениях этих точек A и B (при различных положениях A и B задача может иметь два, одно или не иметь ни одного решения).

10.3. Задача о брахистохроне

Имеем

$$J = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2} dx}{\sqrt{y}}.$$

Здесь снова $L = L(y, \dot{y})$. Тогда

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}} - \frac{y'^2}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}},$$

$$\frac{(1+\dot{y}^2) - \dot{y}^2}{\sqrt{y} \cdot \sqrt{1+\dot{y}^2}} = \frac{1}{\sqrt{C_1}}, \quad \frac{1}{y \cdot (1+\dot{y}^2)} = \frac{1}{C_1},$$

$$\dot{y}^2 = \frac{C_1 - y}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{C_1 - y}}{\sqrt{y}}.$$

Имеем $\frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{C_1 - y}} = dx$, то есть интеграл от дифференциального бинома, который подстановкой $\frac{C_1}{y} - 1 = z^2$ приводится к $\int \frac{dz}{(z^2+1)^2}$, то есть к интегрированию рациональных функций. Используя рекуррентную формулу

$$\int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n} = \frac{2ax + b}{(n-1) \cdot (4ac - b^2) \cdot (ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2n-3}{n-1} \cdot \frac{2a}{4ac - b^2} \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^{n-1}},$$

получаем зависимость

$$x + c = \frac{\sqrt{C_1 y - y^2}}{2C_1} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{C_1 - y}{y}},$$

по которой трудно судить о виде кривой — экстремали.

Воспользуемся другим способом, для этого вернемся к дифференциальному уравнению.

Сделаем в $\dot{y}^2 = \frac{C_1 - y}{y}$ замену, полагая $y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u)$, откуда

$$\dot{y} = \frac{C_1}{2} \sin u \cdot u'.$$

Тогда

$$\frac{C_1^2}{4} \sin^2 u \cdot \dot{u}^2 = \frac{C_1 - \frac{C_1}{2} + \frac{C_1}{2} \cos u}{\frac{C_1}{2}(1 - \cos u)},$$

$$\frac{C_1^2}{4} \sin^2 u \cdot \dot{u}^2 = \frac{1 + \cos u}{1 - \cos u},$$

$$\dot{u}^2 = \frac{1 + \cos u}{(1 - \cos u) \frac{C_1^2}{4} (1 - \cos u) (1 + \cos u)},$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{\pm 1}{\frac{C_1}{2}(1 - \cos u)}, \quad \frac{C_1}{2}(1 - \cos u) du = \pm dx,$$

$$\begin{cases} x = \pm \frac{C_1}{2}(u - \sin u) + C_2, \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u). \end{cases}$$

Так как кривая должна проходить через начало координат, то для этого нужно положить $C_2 = 0$ (при $u = 0$).

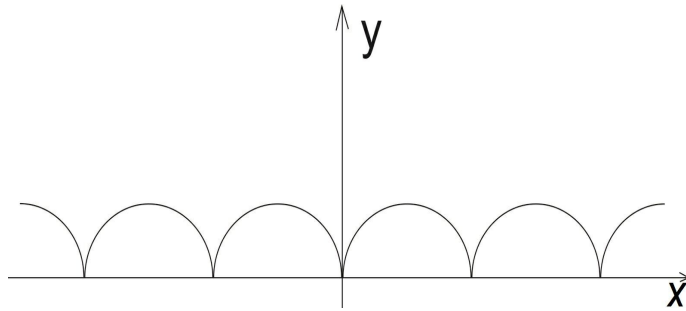


Рис. 30. Циклоида

Видно, что искомая кривая — брахистохрона — есть *циклоида*.

$$\begin{cases} x = \pm \frac{C_1}{2}(u - \sin u), \\ y = \frac{C_1}{2}(1 - \cos u). \end{cases}$$

Постоянная C_1 должна быть найдена из условия, что искомая кривая проходит через данную точку $B(x_1, y_1)$.

11. Некоторые обобщения простейшей вариационной задачи

В ПВЗ интегрант L функционала $F(y)$ зависел только от неизвестной функции y и ее производной. Существуют и более общие случаи:

1) функция L зависит от нескольких неизвестных функций y, z, \dots и от их первых производных y', z', \dots

2) функция L зависит от неизвестной функции y и от ее производных до n -го порядка: $y', y'', \dots, y^{(n)}$.

Необходимые условия для этих задач находятся теми же методами, что и для ПВЗ.

11.1. Случай нескольких неизвестных функций

Ограничимся случаем, когда имеются две неизвестные функции y и z , так как случай большего числа неизвестных ничем от него не отличается.

Постановка задачи: найти кривую

$$y = f(x), \quad z = f_1(x),$$

проходящую через две данные точки

$$A(x_0, y_0, z_0) \quad \text{и} \quad B(x_1, y_1, z_1),$$

которая дает минимальное значение интегралу

$$J = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y', z, z') dx. \quad (11.1)$$

Функция L предполагается непрерывной вместе с частными производными до III порядка, а функции f и $f_1 \in C^{(2)}[x_0, x_1]$. Поступим, как и в ПВЗ. За близкую кривую возьмем

$$y = f(x) + \alpha h(x), \quad z = f_1(x) + \alpha h_1(x),$$

где $h(x)$ и $h_1(x)$ принадлежат классу $C^{(1)}$ и обращаются в нуль на концах интервала (обозначим множество таких функций $\hat{C}^{(1)}$).

Как и в ПВЗ, составим выражение для δJ :

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y} h(x) + \frac{\partial L}{\partial z} h_1(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} h'(x) + \frac{\partial L}{\partial z'} h'_1(x) \right] dx.$$

Проинтегрировав два последних слагаемых в скобках по частям, найдем

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left\{ h(x) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right] + h_1(x) \left[\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) \right] \right\} dx.$$

Так как $\delta J = 0$ для всяких $h(x)$ и $h_1(x) \in \dot{C}^{(1)}$ (за счет необходимого условия экстремума), то, взяв сначала $h_1(x) = 0$, а $h(x)$ произвольным, убедимся, что

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0,$$

(см. лемму 1). При $h(x) = 0$, а $h_1(x)$ — произвольной получаем

$$\frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial z'} \right) = 0.$$

Эта система уравнений играет ту же роль, что и уравнение Эйлера в ПВЗ. Выпуклость функции $L = (x, \cdot, \cdot, \cdot) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ является достаточным условием того, что найденные экстремали являются решениями поставленной задачи.

Пример 11.1.

$$\int_1^2 (\dot{x}_1^2 + x_2^2 + \dot{x}_2^2) dt \rightarrow \min;$$

$$\begin{aligned} x_1(1) &= 1, & x_1(2) &= 2, \\ x_2(1) &= 0, & x_2(2) &= 1. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(2\dot{x}_1) = 0, \\ 2x_2 - \frac{d}{dt}(2\dot{x}_2) = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 = 0, \\ x_2 - \ddot{x}_2 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = c_1 t + c_2, \\ x_2 = c_3 e^t + c_4 e^{-t}. \end{cases}$$

$$c_1 = 1, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{1}{e^2 - 1}, \quad c_4 = -\frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

$$\text{Ответ: } \left(t, \frac{e^t}{e^2 - 1} - \frac{e^2 e^{-t}}{e^2 - 1} \right).$$

□

11.2. Функционалы, зависящие от старших производных

Продолжим изучать обобщения простейшей вариационной задачи. Пусть $C^m[x_0, x_1]$ — пространство m раз непрерывно дифференцируемых на отрезке $[x_0, x_1]$ функций со стандартной нормой $\|x\|_m$. Введем множество

$$X = \left\{ y \mid y \in C^m[x_0, x_1], \quad y^{(j)}(x_0) = A_j, \quad y^{(j)}(x_1) = B_j, \quad j = \overline{0, m-1} \right\}, \quad (11.2)$$

где $A_0, \dots, A_{m-1}, B_0, \dots, B_{m-1}$ — фиксированные числа. Пусть

$$X_0 = \left\{ y \mid y \in C^m[x_0, x_1], \quad y^{(j)}(x_0) = y^{(j)}(x_1) = 0, \quad j = 0, \dots, m-1 \right\}.$$

Иногда X_0 обозначают символом $\mathring{C}^m[x_0, x_1]$.

Пусть $L(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(m)})$ — функция на $[x_0, x_1] \times \mathbb{R}^{m+1}$, предполагаемая всюду далее непрерывной по совокупности аргументов вместе с производными

$$\frac{\partial L}{\partial y^{(i)}}, \quad i = 0, \dots, m.$$

Для любой функции $y(x)$ из $C^m[x_0, x_1]$ определим интеграл

$$F(y) = \int_{x_0}^{x_1} L(x, y, y^{(1)}, \dots, y^{(m)}) dx. \quad (11.3)$$

Равенство (11.3) определяет функционал $F: C^m[x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}$, зависящий от старших производных. Рассматривается вариационная задача

$$F(y) \rightarrow \min, \quad y \in X, \quad (11.4)$$

где X, F заданы формулами (11.2) и (11.3). Для задачи (11.4) определяются понятия решения и локального решения соответственно. За близкую кривую примем

$$y = f(x) + \alpha \eta(x),$$

где $\eta(x)$ — произвольная функция класса \mathring{C}^m . Тогда δJ будет

$$\delta J = \alpha \int_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial L}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot \eta'(x) + \dots + \frac{\partial L}{\partial y^{(m)}} \cdot \eta^{(m)}(x) \right] dx.$$

Преобразуем все слагаемые правой части, кроме первого, проинтегрировав каждое K раз ($k = 1, \dots, m$) по частям. Например:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \cdot \eta^{(k)} dx &= \left[\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \cdot \eta^{(k-1)}(x) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot \eta^{(k-2)}(x) + \dots + \right. \\ &+ (-1)^{k-1} \cdot \frac{d^{(k-1)}}{dx^{(k-1)}} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot \eta(x) \Big|_{x_0}^{x_1} + (-1)^k \cdot \int_{x_0}^{x_1} \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(k)}} \right) \cdot \eta(x) dx. \end{aligned}$$

Так как $\eta(x) \in \mathring{C}^m[x_0, x_1]$, то выражение в квадратных скобках равно нулю. Следовательно, δJ равно

$$\alpha \int_{x_0}^{x_1} \eta(x) \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) - \dots + (-1)^m \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(m)}} \right) \right] dx.$$

Поскольку $\delta J = 0$ для всякой функции $\eta(x)$ класса $\mathring{C}^m[x_0, x_1]$, то в силу обобщения леммы 3 множитель при $\eta(x)$ в интегранте должен быть равен тождественно нулю в (x_0, x_1) , то есть

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \dots + (-1)^m \cdot \frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{\partial L}{\partial y^{(m)}} \right) = 0. \quad (11.5)$$

Таким образом, функция $y = f(x)$ должна удовлетворять уравнению (11.5), соответствующему уравнению Эйлера в ПВЗ. Соотношение (11.5) называется *уравнением Эйлера-Пуассона*, а его решения — экстремалими задачи (11.4). Для этой задачи справедлив аналог теоремы Гильберта. Выпуклость функции $L(x, \cdot, \cdot, \dots) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ является достаточным условием того, что экстремали задачи (11.4) являются искомыми решениями.

Пример 11.2.

$$\begin{aligned} \int_0^1 (360x^2 y - y''^2) dx &\rightarrow \min, \\ y(0) &= 0, \quad y(1) = 0, \\ y'(0) &= 1, \quad y'(1) = 5/2. \end{aligned}$$

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{\partial L}{\partial y''} \right) &= 0, \\ 360x^2 + \frac{d^2}{dx^2} (-2y'') &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
360x^2 - 2y^{(4)} &= 0, & y^{(4)} &= 180x^2, \\
y^{(3)} &= 60x^3 + C_1, & y^{(2)} &= 15x^4 + C_1x + C_2, \\
y' &= 3x^5 + C_1 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2 \cdot x + C_3, \\
y &= \frac{x^6}{2} + \frac{C_1 \cdot x^3}{6} + \frac{C_2 \cdot x^2}{2} + C_3 \cdot x + C_4,
\end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_4 = 0, \\ \frac{1}{2} + \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} + C_3 = 0, \\ C_3 = 1, \\ 3 + \frac{C_1}{2} + C_2 + C_3 = \frac{5}{2}. \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} C_3 = 1, \\ C_4 = 0, \\ \frac{C_1}{6} + \frac{C_2}{2} = -\frac{3}{2}, \\ \frac{C_1}{2} + C_2 = -\frac{3}{2}. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 + 3C_2 = -9, \\ C_1 + 2C_2 = -3. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
C_2 &= -6, & C_1 &= 9, \\
y &= \frac{1}{2}x^6 + \frac{3}{2}x^3 - 3x^2 + x
\end{aligned}$$

есть искомая экстремаль. □

11.3. Изопериметрическая задача

До сих пор рассматривались задачи вариационного исчисления, когда искомые функции должны были удовлетворять лишь некоторым условиям на границе, кроме само собой разумеющихся условий непрерывности. Многие вопросы приводят, однако, к таким задачам об экстремуме определенного интеграла, когда искомые функции, кроме названных граничных условий и условий непрерывности, должны удовлетворять еще дополнительным требованиям, относящимся к поведению их во всем промежутке интегрирования. Уравнения, выражающие эти требования, называют *уравнениями связи*.

Рассматриваемый тип связанного экстремума возник из частной задачи о нахождении замкнутой кривой заданной длины $2l$, ограничивающей наибольшую площадь, и получил, благодаря ей, название *изопериметрической задачи*.

Постановка задачи. Изопериметрической называют задачу

$$F_0(y) = \int_{x_0}^{x_1} L_0(x, y, y') dx \rightarrow \min, \quad (11.6)$$

$$F_i(y) = \int_{x_0}^{x_1} L_i(x, y, y') dx = C_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Естественным образом определяются понятия решения и локального решения задачи (11.6). Например, y^* есть локальное решение (11.6), если y^* удовлетворяет ограничениям задачи (11.6) и существует такое $\delta > 0$, что для всех функций y , удовлетворяющих неравенству $\|y - y^*\|_1 < \delta$ и ограничениям задачи (11.6), имеет место неравенство $F_0(y) \geq F_0(y^*)$.

Не оговариваясь каждый раз, считаем, что функции $L_i(x, y, y')$ и их частные производные по y и y' непрерывны по совокупности переменных.

Теорема 11.1. (Правило множителей Лагранжа) Пусть \hat{y} — локальное решение задачи (1). Тогда существует такой ненулевой набор $\hat{\lambda}_0, \dots, \hat{\lambda}_m$, что \hat{y} есть экстремаль функционала

$$F(y) = \hat{\lambda}_0 \cdot F_0(y) + \dots + \hat{\lambda}_m \cdot F_m(y) = \hat{\lambda}_0 \cdot F_0(y) + \sum_{i=1}^m \hat{\lambda}_i \cdot F_i(y).$$

Доказательство. Ограничимся случаем $m = 1$.

1. Частный случай. Дано, что \hat{y} — экстремаль функционала F_0 и

$$F(y) = \lambda_0 \cdot F_0(y) + \lambda_1 \cdot F_1(y).$$

Пусть \hat{y} является также экстремалью функционала $F_1(y)$. Тогда минимум функционала F будет достигаться при $\lambda_0 = 0$ и $\lambda_1 = 1$, так как $F_1(\hat{y}) = C_1$ и само это значение должно быть экстремальным для $F(y)$.

2. Общий случай. Пусть \hat{y} не является экстремалью функционала $F_1(y)$. По лемме 3 следует, что если бы y было экстремалью F_1 , то для $\forall h(x) \in M_0$ выполнялось равенство

$$\int_{x_0}^{x_1} (L'_{1y} \cdot h(x) + L'_{1y'} \cdot h'(x)) dx = 0,$$

то есть уравнение Эйлера. В нашем случае $\exists h_1(x) \in M_0$ такое, что

$$\int_{x_0}^{x_1} (\hat{L}_{1y} \cdot h_1 + \hat{L}_{1y'} \cdot h'_1) dx \neq 0.$$

Фиксируем произвольную функцию $h_2(x) \in M_0$. Введем в рассмотрение две числовые функции:

$$\varphi_0(\xi_1, \xi_2) = F_0(\hat{y} + \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2),$$

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2) = F_1(\hat{y} + \xi_1 h_1 + \xi_2 h_2).$$

Поскольку \hat{y} есть решение задачи (11.5), то точка $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ есть решение следующей экстремальной задачи:

$$\begin{cases} \varphi_0(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \min, \\ \varphi_1(\xi_1, \xi_2) = C_1, \end{cases}$$

то есть задачи минимизации числовой функции двух переменных с ограничением типа равенства. К этой задаче применяем правило множителей Лагранжа: $\exists \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1$ такие, что

$$L = \hat{\lambda}_0 \cdot \varphi_0(\xi_1, \xi_2) + \hat{\lambda}_1 \cdot \varphi_1(\xi_1, \xi_2) \rightarrow \min$$

в точке $(0, 0)$. Из этого следует, что в точке $(0, 0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \xi_1} = 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \xi_2} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \hat{\lambda}_0 \cdot \frac{\partial \varphi_0(0, 0)}{\partial \xi_1} + \hat{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_1} = 0, \\ \hat{\lambda}_0 \cdot \frac{\partial \varphi_0(0, 0)}{\partial \xi_2} + \hat{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1(0, 0)}{\partial \xi_2} = 0. \end{cases}$$

Распишем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}(0) &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\hat{L}_{1y} \cdot h_1 + \hat{L}_{1y'} \cdot h'_1 \right] dx, \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}(0) &= \int_{x_0}^{x_1} \left[\hat{L}_{1y} \cdot h_2 + \hat{L}_{1y'} \cdot h'_2 \right] dx. \end{aligned} \tag{11.7}$$

Аналогичные равенства верны и для функции φ_0 . Первое из равенств (11.7) влечет соотношение

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}(0, 0) \neq 0,$$

что означает для задачи (11.6) выполнение условия регулярности (А), а это, в свою очередь, влечет $\hat{\lambda}_0 = 1$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_1}(0) + \hat{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_1}(0) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi_2}(0) + \hat{\lambda}_1 \cdot \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi_2}(0) = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения однозначно находится $\hat{\lambda}_1$. Второе уравнение в развернутом виде есть

$$\int_{x_0}^{x_1} \left(\left[\hat{L}_{0y} \cdot h_2 + \hat{L}_{0y'} \cdot h'_2 \right] + \lambda_1 \cdot \left[\hat{L}_{1y} \cdot h_2 + \hat{L}_{1y'} \cdot h'_2 \right] \right) dx = 0,$$

для функции $h_2(x) \in M_0$ или

$$\int_{x_0}^{x_1} \left[\left(\hat{L}_{0y} + \hat{\lambda}_1 \hat{L}_{1y} \right) \cdot h_2 + \left(\hat{L}_{0y'} + \hat{\lambda}_1 \hat{L}_{1y'} \right) \cdot h'_2 \right] dx = 0, \quad \forall h_2 \in M_0,$$

что, по лемме 3, означает справедливость выполнения уравнения Эйлера для интегранта

$$L = L_0 + \hat{\lambda}_1 L_1,$$

соответствующего функционалу

$$F(y) = F_0(y) + \hat{\lambda}_1 F_1(y).$$

Следовательно, \hat{y} — экстремаль функционала $F(y)$, а соответствующее уравнение Эйлера можно записать в виде

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial(F_0 + \hat{\lambda} F_1)}{\partial y'} \right) - \frac{\partial(F_0 + \hat{\lambda} F_1)}{\partial y} = 0.$$

Общий случай рассматривается аналогично. □

Пример 11.3. (Задача Дидоны) Среди всех кривых длины l , соединяющих две данные точки A и B , определить кривую, ограничивающую вместе с отрезком AB наибольшую площадь.

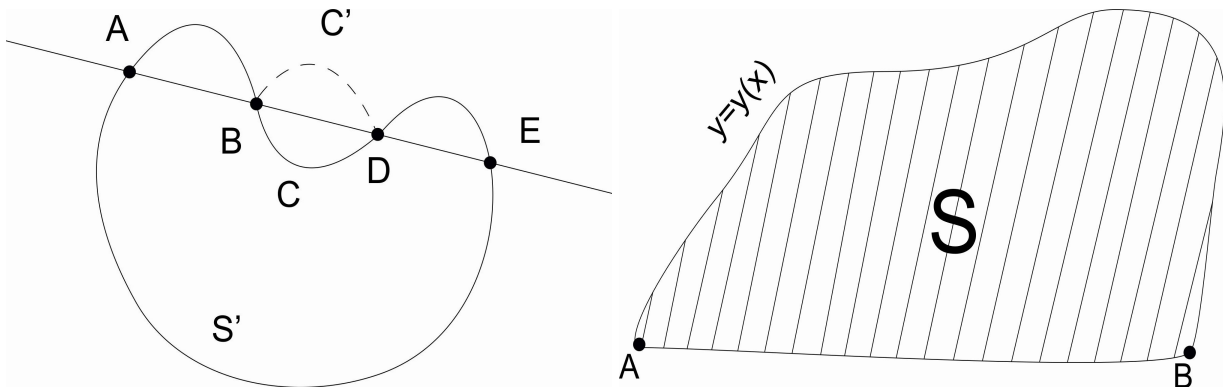


Рис. 31. Геометрическая интерпретация задачи Дидоны

Историческая справка. Финикийская царица Дидона с небольшим отрядом людей покинула родной город Тир, спасаясь от преследований своего брата тирана Пигмалиона. Ее корабли отправились на запад по Средиземному морю и плыли, пока Дидона не облюбовала удобное для поселения место на африканском побережье, в нынешнем Тунисском заливе. Высадившиеся финикийцы были встречены не очень гостеприимно местными жителями, нумидийцами. Их король Ярб принял драгоценности от Дидоны для покупки земли и заявил, что взамен согласен уступить ей лишь только тот клочок земли, который «можно окружить бычьей шкурой». Царица согласилась. Ярб понял хитрость финикийки слишком поздно. Разрезав шкуру на тонкие полоски, она отгородила им от берега значительную территорию. Честный Ярб безропотно согласился. Дидона на этом месте образовала город Карфаген. В память об этой истории карфагенская крепость была названа «Бирса», что означает «бычья шкура».

Легенда относит события к 825 г. до н. э. Если, например, длина ремня 600 метров плюс длина берега, а фигура будет прямоугольной, то площадь области будет равна 45000 квадратных метров.

Решение: Прежде всего очевидно, что рассматриваемая кривая должна быть *выпуклой*. В противном случае существовала бы прямая, имеющая с рассматриваемой областью S , по крайней мере, два не имеющих общих точек замкнутых отрезка AB и DE . Отразив зеркально BCD в $BC'D$, получим кривую той же длины l , но ограничиваемая площадь будет больше.

Примем за ось OX прямую AB . Тогда площадь, ограниченная кривой $y = y(x)$, расположенной над осью OX , выразится интегралом

$$S(y) = \int_a^b y(x) dx,$$

где a и b — абсциссы точек A и B . Получена изопериметрическая задача:

$$F_0(y) = - \int_a^b y dx \rightarrow \min, \quad (11.8)$$

$$F_1(y) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = l, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

Экстремальными функционала F_1 являются прямые, поэтому решения задачи (11.8) не будут экстремальными функционала F_1 (из геометрических соображений).

Следуя правилу множителей Лагранжа, составляем функционал

$$F(y) = \int_a^b \left[-y + \lambda \cdot \sqrt{1 + y'^2} \right] dx.$$

Интегрант не зависит от x , поэтому имеет место частный случай уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned} y' \cdot Ly' - L &= C, \\ \lambda y' \cdot \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} + y - \lambda \cdot \sqrt{1 + y'^2} &= C_1, \\ \frac{\lambda y'^2 + y \cdot \sqrt{1 + y'^2} - \lambda \cdot (1 + y'^2)}{\sqrt{1 + y'^2}} &= C_1, \\ y &= C_1 + \frac{\lambda}{\sqrt{1 + y'^2}}. \end{aligned} \quad (*)$$

Положим $y' = \operatorname{tg} \varphi$, тогда

$$y = C_1 + \lambda \cdot \cos \varphi, \quad y' = -\lambda \sin \varphi \cdot \frac{d\varphi}{dx} = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\lambda \cdot \cos \varphi,$$

$$dx = -\lambda \cdot \cos \varphi d\varphi, \quad x = -\lambda \sin \varphi + C_2,$$

следовательно,

$$\begin{cases} x = -\lambda \cdot \sin \varphi + C_2, \\ y = C_1 + \lambda \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Выполнив несложные преобразования, получим уравнение окружности в виде

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2.$$

Решим уравнение другим способом. Из (*) имеем

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{\lambda}{y - C_1},$$

$$y'^2 = \left(\frac{\lambda}{y - C_1} \right)^2 - 1 = \frac{\lambda^2 - (y - C_1)^2}{(y - C_1)^2},$$

$$y' = \frac{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}}{y - C_1}, \quad dx = \frac{(y - C_1)dy}{\sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2}},$$

$$x = \sqrt{\lambda^2 - (y - C_1)^2} + C_2$$

или

$$(x - C_2)^2 + (y - C_1)^2 = \lambda^2,$$

т. е. уравнение окружности радиуса λ центром в точке (C_2, C_1) . \square

Замечание. Изопериметрическая задача обладает интересным свойством, называемым *законом взаимности*. Оно состоит в том, что экстремали вариационной задачи для интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx \quad \text{при условии} \quad J_1 = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx = C$$

будут вместе с тем и экстремали задачи для интеграла

$$J = \int_{x_0}^{x_1} G(x, y, y') dx \quad \text{при условии} \quad J_1 = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y') dx = C.$$

Пользуясь принципом взаимности, можно высказать обратное предположение задаче Дидоны: среди кривых, ограничивающих площадь заданной величины, окружность имеет экстремальную (очевидно, наименьшую) длину.

Задание для самостоятельной работы:

$$\int_{x_0}^{x_1} y \cdot \sqrt{1 + y'^2} dx \rightarrow \min,$$

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2} dx = l, \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1.$$

Задача определяет положение равновесия тяжелой однородной нити данной длины l с закрепленными концами, находящейся под действием силы тяжести, направленной параллельно отрицательной оси OY .

$$\text{Ответ: } y = c \cdot \operatorname{ch} \frac{x + C_1}{C} - \lambda.$$

12. Задача об оптимальном быстродействии

12.1. Понятие об управляемых объектах

Рассмотрим прямолинейное движение автомобиля. В каждый момент времени его состояние можно охарактеризовать двумя числами: пройденным расстоянием s и скоростью v . Эти две величины меняются с течением времени, но не самопроизвольно, а сообразно воле водителя, который может управлять работой двигателя, изменяя развиваемую этим двигателем силу F . Таким образом, мы имеем три связанных между собой параметра: s , v , F . Величины s , v , характеризующие состояние автомобиля, называют его *фазовыми координатами*, а F — *управляющим параметром*.



Рис. 32. Связь параметров

Если будем рассматривать движение автомобиля по плоскости, а не по прямой, то фазовых координат будет 4 (две географические координаты, s и v), а управляющих параметров — 2 (F и угол поворота руля). У летящего самолета таких параметров больше.

То есть в каждый момент времени *состояние объекта* задается n числами x_1, x_2, \dots, x_n , называемыми *фазовыми координатами* объекта. *Движение* объекта с математической точки зрения заключается в том, что его состояние с течением времени изменяется, то есть x_i являются переменными величинами: $x_i = x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$. Движением объекта можно управлять. Для этого он снабжен «рулями», положение которых характеризуется r числами u_1, \dots, u_r , называемыми *управляющими параметрами*, также зависящими от времени. Параметрами u_r можно «манипулировать», то есть по желанию выбирать функции $u_1(t), \dots, u_r(t)$, описывающие изменения величин управляющих параметров с течением времени.

В теории автоматического управления управляемый объект принято изображать в виде схемы (см. рис. 33). Величины u_1, \dots, u_r удобно считать координатами некоторого вектора $u = (u_1, \dots, u_r)$, величины x_1, \dots, x_n — вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Точку $x = (x_1, \dots, x_n)$ называют *фазовым состоянием* объекта, а само n -мерное пространство этих точек — *фазовым пространством* X . Если $X = (x_1, x_2)$, то X называют *фазовой плоскостью*. В этом случае фазовые состояния объекта изображаются особенно наглядно.

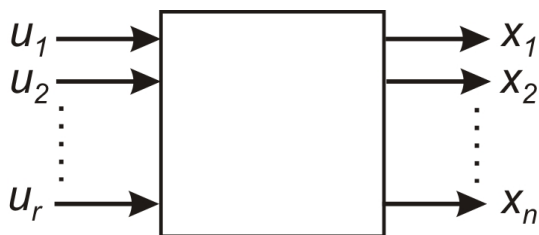


Рис. 33. Схема управляемого объекта

Чтобы полностью задать движение объекта, надо задать его фазовое состояние $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ в начальный момент времени t_0 и выбрать управляющие функции $u_1(t), \dots, u_r(t)$ ($t > t_0$), т. е. выбрать вектор-функцию

$$u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t)),$$

которую называют *управлением*. $U \ni u(t)$ называют *пространством допустимых управлений*.

Задание x_0 и $u(t)$ определяют дальнейшее движение объекта по *фазовой траектории*. Пара векторных функций $(u(t), x(t))$ называется *процессом управления*.

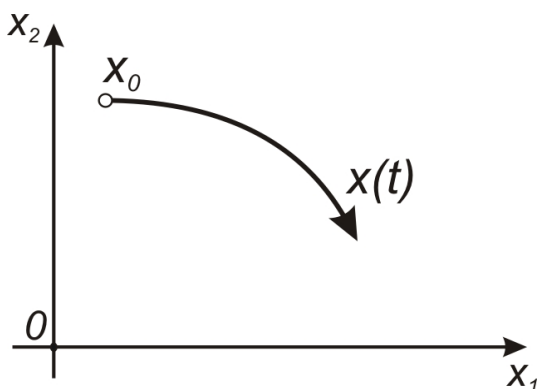


Рис. 34. Движение по фазовой траектории

Итак, состояние *управляемого объекта* в каждый момент времени характеризуется *фазовой точкой* $x = (x_1, \dots, x_n)$. На движение объекта можно воздействовать при помощи *управляемого параметра* $u = (u_1, \dots, u_r)$. Изменение величин x и u с течением времени называется *процессом*. Процесс $(u(t), x(t))$ составляется из *управления* $u(t)$ и *фазовой траектории* $x(t)$. Процесс полностью определяется, если задано управление $u(t)$ (при $t > t_0$) и начальное фазовое состояние $x_0 = x(t_0)$.

12.2. Общие подходы к постановке задачи управления

Часто встречается следующая задача. В начальный момент t_0 объект находится в фазовом состоянии x_0 . Требуется выбрать такое управ-

ление $u(t)$, которое переведет объект в заранее заданное конечное фазовое состояние x_1 ($x_1 \neq x_0$). При этом нередко бывает, что состояние x_0 неизвестно.

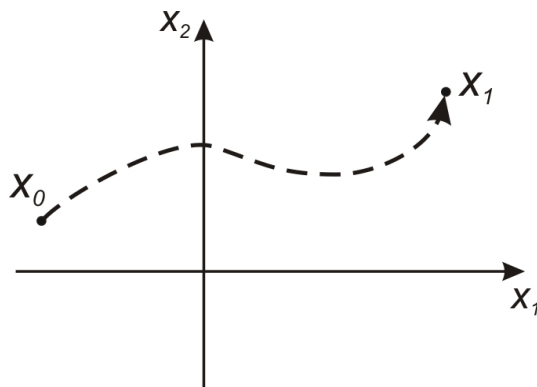


Рис. 35. Геометрическая интерпретация задачи управления

Например: объект должен устойчиво работать в режиме x_1 . В результате каких-то причин(точек) объект выходит из рабочего состояния x_1 и оказывается в состоянии x_0 , которое заранее неизвестно. Надо уметь так управлять объектом, чтобы из *любой* точки x_0 вернуть его в рабочее состояние x_1 .

Обычно требуется, чтобы *переходный процесс* был в определенном смысле «наилучшим», например чтобы *время перехода было наименьшим* (чтобы затраченная энергия была минимальной и т. п.).

Такой «наилучший» переходный процесс называется *оптимальным процессом*.

Процесс, в результате которого объект переходит из точки x_0 в точку x_1 , называется *оптимальным в смысле быстрогодействия*, если не существует процесса, переводящего объект из точки x_0 в точку x_1 за меньшее время ($x_1 \neq x_0$).

12.3. Задача управления

Рассмотрим простой пример. Пусть G — материальная точка, совершающая прямолинейное движение. Массу G обозначим m . Координату тела G обозначим x_1 . Она меняется с течением времени. Производная \dot{x}_1 представляет собой скорость движения G . Будем предполагать, что на тело G действуют две внешние силы: сила трения $-b\dot{x}_1$ и упругая сила $-kx_1$ и, кроме того, тело G снабжено двигателем. Развиваемую двигателем силу действия на тело G обозначим U . Таким образом, по второму закону Ньютона движение тела G с течением времени будет описываться дифференциальным уравнением

$$m\ddot{x}_1 = -b\dot{x}_1 - kx_1 + U.$$

Обозначив скорость движения через x_2 (т. е. положив $\dot{x}_1 = x_2$), мы сможем записать этот закон движения в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{1}{m}U. \end{cases} \quad (12.1)$$

Здесь x_1 и x_2 — фазовые координаты G, величина U — управляющий параметр.

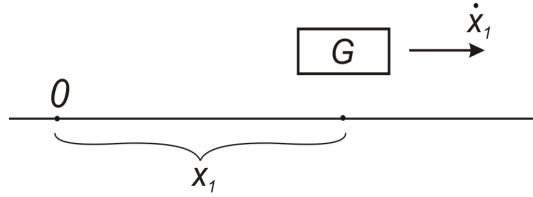


Рис. 36. Геометрическая интерпретация задачи из механики

Уравнения (12.1) представляют закон движения фазовой точки в фазовой плоскости.

В общем случае система (12.1) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \\ \dots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_r), \end{cases} \quad (12.2)$$

где f_1, \dots, f_n — некоторые функции, определяемые внутренним устройством объекта.

В векторной форме система (12.2) записывается в виде

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (12.3)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$.

Разумеется, невозможно решить систему (12.3), не зная, каким образом будут меняться с течением времени управляющие параметры $u_1(t), \dots, u_r(t)$ ($t > t_0$). Напротив, зная управляющие функции $u_1(t), \dots, u_r(t)$ для $t > t_0$, мы можем из уравнения

$$\dot{x} = f(x, u(t)), \quad (12.4)$$

однозначно определить движение объекта (при $t > t_0$), если нам известно начальное фазовое состояние ($t = t_0$).

Иначе говоря, задание управления $u(t)$ и начального фазового состояния x_0 однозначно определяет фазовую траекторию $x(t)$ ($t > t_0$). Этот факт вытекает из *теоремы о существовании и единственности решений системы дифференциальных уравнений*.

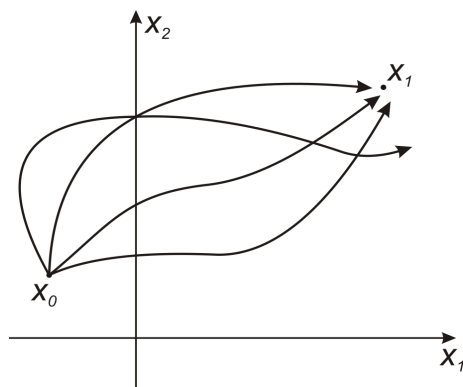


Рис. 37. Иллюстрация задачи поиска оптимальной траектории

Меняя управление $u(t)$, будем менять и фазовую траекторию $x(t)$. Задача *оптимального управления (быстродействия)* заключается в отыскании такого уравнения $u(t)$, для которого фазовая траектория $x(t)$, соответствующая $u(t)$ в силу (12.4), проходит через точку x_1 и переход из x_0 в x_1 осуществляется за кратчайшее время.

Такую траекторию будем называть *оптимальной траекторией*.

12.4. Допустимые управления

Обычно управляющие параметры u_1, \dots, u_r не могут принимать совершенно произвольные значения, а подчинены некоторым ограничениям. Так, в рассмотренной задаче о движении объекта естественно предположить, что сила U , развиваемая двигателем, не может быть как угодно большой по величине, а подчинена ограничениям $\alpha \leq U \leq \beta$, где α и β — некоторые постоянные, характеризующие двигатель. В частности, при $\alpha = -1$, $\beta = 1$ получаем ограничение $|U| \leq 1$, которые означают, что двигатель может развивать силу, направленную вдоль оси x_1 как в положительном, так и в отрицательном направлении. Таким же (аналогичным) ограничениям подчинен угол поворота руля, сила тока, напряжение, количество подаваемого топлива и т. п.

Для $u = (u_1, \dots, u_r)$ аналогично будем иметь

$$\alpha_i \leq U_i \leq \beta_i, \quad i = \overline{1, r}, \quad (12.5)$$

причем α_i и β_i не зависят друг от друга.

В общем случае считают, что в пространстве переменных u_1, \dots, u_r задано некоторое множество U и управляющие параметры $u_1(t), \dots, u_r(t)$ в каждый момент времени должны принимать лишь такие значения, чтобы точка $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$, т. е. разрешается рассматривать лишь такие управления $u(t)$, что для $\forall t > t_0$ $u(t) \in U$, где U называется областью *допустимых управлений*.

12.5. Метод динамического программирования

Рассмотрим для управляемого объекта задачу об оптимальном переходе (в смысле быстрогодействия) из фазового состояния x в фазовое состояние x_1 .

Будем предполагать, что выполняется следующая

Гипотеза 1. *Какова бы ни была отличная от x_1 точка x фазового пространства X , существует оптимальный в смысле быстрогодействия процесс перехода из точки x в точку x_1 .*

Время перехода обозначим через $T(x)$. В дальнейшем будет удобно вместо $T(x)$ ввести функцию $w(x) = -T(x)$, так как $x = (x_1, \dots, x_n)$, то

$$w(x) = w(x_1, \dots, x_n).$$

Будем также предполагать, что верна

Гипотеза 2. *Функция $w(x)$ непрерывна и всюду, кроме точки x_1 , имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial w}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial w}{\partial x_n}$.*

Пусть x_0 — произвольная ($x_0 \neq x_1$) точка фазового пространства X , u_0 — произвольная точка области управления U . Предположим, что объект находится в момент t_0 в фазовом состоянии x_0 и движется в течение некоторого времени под воздействием постоянного управления $u = u_0$.

Фазовую траекторию при этом движении обозначим:

$$y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t)).$$

Таким образом, при $t > t_0$ фазовая траектория удовлетворяет уравнениям

$$\dot{y}^i(t) = f^i(y(t), u_0), \quad i = \overline{1, n}$$

и начальному условию $y(t_0) = x_0$.

Если двигаться из точки x_0 до точки $y(t)$, то затратим на это движение время $t - t_0$. Двигаясь затем *оптимально*, затратим на движение из точки $y(t)$ до точки x_1 время $T(y(t))$. В результате на переход из точки x_0 в точку x_1 затратим время $t - t_0 + T(y(t))$. Но так как оптимальное время движения от точки x_0 в точку x_1 равно $T(x_0)$, то есть $T(y(t_0))$, то

$$T(y(t_0)) \leq (t - t_0) + T(y(t))$$

или

$$\frac{w(y(t)) - w(y(t_0))}{t - t_0} \leq 1.$$

Переходя к пределу при $t \rightarrow t_0$, получим

$$\left. \frac{d}{dt}(w(y(t))) \right|_{t=t_0} \leq 1.$$

Производная по гипотезе 2 существует и вычисляется по формуле полной производной

$$\frac{d}{dt}w(y(t)) = \sum_{i=1}^n \frac{dw(y(t))}{dx_i} \dot{y}^i(t)$$

или

$$\sum_{i=1}^n \frac{dw(x_0)}{dx_i} f^i(x_0, u_0) \leq 1,$$

точки x_0, u_0 произвольны, поэтому для любой (отличной от x_1) точки x фазового пространства X и любой $u \in U$ выполнено соотношение

$$\sum_{i=1}^n \frac{dw(x)}{dx_i} f^i(x, u) \leq 1. \quad (12.6)$$

Пусть теперь $(x(t), u(t))$ — *оптимальный процесс*, и $t_0 \leq t \leq t_1$ — его время, причем $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, $t_1 = t_0 + T(x_0)$. Имеем

$$\dot{x}_i(t) = f^i(x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1.$$

Движение по рассматриваемой оптимальной траектории от x_0 до $x(t)$ осуществляется за время $t - t_0$, из $x(t)$ в x_1 — за время $t_1 - t$, то есть за время $T(x_0) - (t - t_0)$. Быстрее, чем за это время, из точки $x(t)$ попасть в x_1 невозможно. Если бы такое движение существовало (пунктир), то есть переход из x_0 в x_1 произошел бы за меньшее, чем $T(x_0) - (t - t_0)$, время, то осуществился бы переход из x_0 в x_1 за меньшее время, чем $T(x_0)$, что противоречит предположению об оптимальности процесса $(x(t), y(t))$.

Итак, $T(x_0) - (t - t_0)$ — время оптимального движения из точки $x(t)$ в точку x_1 :

$$T(x(t)) = T(x_0) - (t - t_0)$$

или

$$w(x(t)) = w(x_0) + t - t_0$$

и

$$\sum_{i=1}^n \frac{dw(x(t))}{dx_i} \dot{x}_i(t) = 1,$$

то есть

$$\sum_{i=1}^n \frac{dw(x(t))}{dx_i} f^i(x(t), u(t)) = 1, \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (12.7)$$

Следовательно, для каждого оптимального процесса выполняется равенство (12.7) в течение всего движения. Если правую часть (12.7) обозначить за $B(x, u)$, будем иметь из (12.6) и (12.7)

$$B(x, u) \leq 1 \quad (12.8)$$

для всех точек $x \neq x_1$ из U .

$$B(x(t), u(t)) \equiv 1 \quad (12.9)$$

для любого оптимального процесса $(u(t), x(t))$.

То есть доказана теорема.

Теорема 12.1. *Если для управляемого объекта, описываемого уравнением $\dot{x} = f(x, u)$, $u \in U$, и предписанного конечного состояния x_1 выполнены гипотезы 1 и 2, то имеют место соотношения (12.8), (12.9).*

Эта теорема составляет сущность метода динамического программирования для рассматриваемой задачи.

Ее можно сформулировать иначе. Имеем $B(x_0, u(t_0)) = 1$ для $t = t_0$, то есть для любой точки x_0 , ($x_0 \neq x_1$) найдется в U такая точка $u = u(t_0)$, что $B(x_0, u) = 1$. В сопоставлении с неравенством (12.8) получаем

$$\max_{u \in U} B(x, u) = 1$$

для любой точки $x \neq x_1$ или

$$\max_{u \in U} \sum_{i=1}^n \frac{dw(x)}{dx_i} f^i(x, u) = 1 \quad \text{для любого } x \neq x_1. \quad (12.10)$$

Соотношение (12.10) называется *уравнением Беллмана*.

Замечание 1. *Выше было показано, что существует точка $u \in U$ ($u = u(t_0)$), для которой выполнено $B(x_0, u) = 1$, но ниоткуда не следует, что такая точка единственна.*

Замечание 2. *Указанный метод динамического программирования имеет ряд неудобств. Во-первых, требуется искать не только оптимальные управления, но и функцию $w(t)$. Во-вторых, (12.10) есть уравнение в частных производных, осложненное знаком максимума. В-третьих, требуется предполагать выполнение гипотез 1 и 2 (оптимальное управление и функция w заранее неизвестны). Кроме того, чаще всего функция $w(x)$ даже в простейших линейных задачах не является всюду дифференцируемой.*

Однако этим методом можно пользоваться как ценным эвристическим средством.

12.6. Принцип максимума Понтрягина

Предположим, что $w(x)$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая всюду, кроме x_1 , то есть выполнена

Гипотеза 3. Функция $w(x)$ имеет при $x \neq x_1$ вторые непрерывные производные $\frac{d^2w(x)}{dx_i dx_j}$, $i, j = \overline{1, n}$, а функции $f^i(x, u)$ — первые непрерывные производные $\frac{df^i(x, u)}{dx_j}$, $i, j = \overline{1, n}$.

Пусть $x(t), u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — оптимальный процесс перехода из точки x_0 в точку x_1 . Фиксируем некоторый момент времени t , $t_0 \leq t \leq t_1$ и рассмотрим функцию $B(x, u(t))$ переменного x . Из определения $B(x, u)$ и гипотезы 3 следует, что функция $B(x, u(t))$ всюду, кроме точки x_1 , имеет непрерывные производные по переменным x_1, \dots, x_n :

$$\frac{B(x, u(t))}{x_k} = \sum_{i=1}^n \frac{d^2w(x)}{dx_i dx_k} f^i(x, u(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{dw(x)}{dx_i} \cdot \frac{df^i(x, u(t))}{dx_k}, \quad (12.11)$$

где $k = \overline{1, n}$.

Так как $x(t) \neq x_1$, то функция $B(x, u(t))$ имеет вблизи точки $x = x(t)$ непрерывные производные по x_1, \dots, x_n . В силу (12.8), (12.9) имеем

$$\begin{aligned} B(x, u(t)) &\leq 1, & x &\neq x_1, \\ B(x, u(t)) &= 1, & x &= x(t). \end{aligned}$$

Эти два соотношения означают, что функция $B(x, u(t))$ достигает в точке $x = x(t)$ максимума, и потому

$$\frac{dB}{dx_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{d^2w(x(t))}{dx_i dx_k} f^i(x(t), u(t)) + \sum_{i=1}^n \frac{dw(x(t))}{dx_i} \cdot \frac{df^i(x(t), u(t))}{dx_k} = 0. \quad (12.12)$$

Кроме того, дифференцируя по t функцию $\frac{dw(x(t))}{dx_k}$, находим

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw(x(t))}{dx_k} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2w(x(t))}{dx_k dx_i} \cdot \dot{x}_i(t) = \sum_{i=1}^n \frac{d^2(x(t))}{dx_k dx_i} \cdot f^i(x(t), u(t)).$$

Поэтому соотношение (12.12) может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dw(x(t))}{dx_k} \right) + \sum_{i=1}^n \frac{dw(x(t))}{dx_i} \cdot \frac{df^i(x(t), u(t))}{dx_k} = 0, \quad (12.13)$$

где $k = \overline{1, n}$. (Смешанные производные равны в силу непрерывности вторых производных).

Поскольку в формулы (12.8), (12.9), (12.10), (12.13) сама функция w не входит, а входят только ее частные производные $\frac{dw}{dx_1}, \dots, \frac{dw}{dx_n}$, то введем для удобства следующие обозначения:

$$\frac{dw(x(t))}{dx_1} = \psi_1(t), \dots, \frac{dw(x(t))}{dx_n} = \psi_n(t). \quad (12.14)$$

Тогда функция B записывается таким образом:

$$B(x(t), u(t)) = \sum_{i=1}^n \psi_i(1) \cdot f^i(x(t), u(t)),$$

а соотношение (12.9) принимает вид

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) f^i(x(t), u(t)) \equiv 1 \quad (12.15)$$

для оптимального процесса $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$, а по (12.8)

$$\sum_{i=1}^n \psi_i(t) f^i(x(t), u) \leq 1, \quad (12.16)$$

для любого $u \in U$ и $t_0 \leq t \leq t_1$.

Наконец, (12.13) записывается в виде

$$\dot{\psi}_k(t) + \sum_{i=1}^n \psi_i(t) \frac{df^i(x(t), u(t))}{dx_k} = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (12.17)$$

Итак, если $(u(t), x(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — оптимальный процесс, то существуют такие функции $\psi_1, \dots, \psi_n(t)$, определяемые равенством (12.14), что справедливы соотношения (12.15) – (12.17).

Рассмотрение левых частей соотношений (12.15) – (12.16) подсказывает, что целесообразно ввести в рассмотрение функцию

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i f^i(x, u) = \psi_1 f^1(x, u), \dots, \psi_n f^n(x, u), \quad (12.18)$$

зависящую от $2n + r$ аргументов. С помощью этой функции соотношения (12.15), (12.16) имеют вид

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) \equiv 1 \quad (12.19)$$

для оптимального процесса,

$$H(\psi(t), x(t), u) \leq 1 \quad (12.20)$$

для $u \in U$, $t_0 \leq t \leq t_1$.

Вместо неравенства (12.20) можно в силу (12.19) записать

$$\max_{u \in U} H(\psi_1(t), x(t), u) = H(\psi(t), x(t), u(t)), \quad t_0 \leq t \leq t_1. \quad (12.21)$$

Наконец, соотношение (12.17) можно переписать так:

$$\dot{\psi}_k(t) = -\frac{dH(\psi(t), x(t), u(t))}{dx_k}, \quad k = \overline{1, n}. \quad (12.22)$$

Замечание. В приведенных соотношениях функция $w(x)$ явно не присутствует, поэтому равенства (12.14), выражающие функции $\psi_k(t)$ через w , никаких добавочных сведений не дают и о них можно забыть, ограничившись лишь тем, что какие-то функции ψ_1, \dots, ψ_n , удовлетворяющие перечисленным свойствам, существуют. Соотношение (12.22) есть система дифференциальных уравнений, которым эти функции удовлетворяют.

Теорема 12.2. (принцип максимума). Предположим, что для рассматриваемого управляемого объекта, описываемого уравнением

$$\dot{x} = f(x, u), \quad u \in U, \quad (A)$$

и предписанного конечного состояния x_1 , выполнена гипотеза 1, 2, 3. Пусть $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ — некоторый процесс, переводящий объект из начального состояния x_0 в состояние x_1 . Введем в рассмотрение функцию H , зависящую от переменных x_1, \dots, x_n , u_1, \dots, u_r и некоторых вспомогательных переменных ψ_1, \dots, ψ_n :

$$H(\psi, x, u) = \sum_{i=1}^n \psi_i f^i(x, u). \quad (B)$$

С помощью этой функции H запишем следующую систему дифференциальных уравнений для ψ_i :

$$\dot{\psi}_k = -\frac{dH(\psi, x(t), u(t))}{dx_k}, \quad k = \overline{1, n}, \quad (C)$$

где $(x(t), u(t))$ — рассматриваемый процесс.

Тогда, если процесс $(x(t), u(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ является оптимальным, существует такое нетривиальное решение $\psi(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$, $t_0 \leq t \leq t_1$ системы (C), что для любого момента t , $t_0 \leq t \leq t_1$ выполнено условие максимума

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = \max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) \quad (D)$$

и условие

$$H(\psi(t), x(t), u(t)) = 1. \quad (E)$$

Замечание. Приведенный принцип максимума имеет тот же недостаток, что и метод динамического программирования (гипотеза 1 – 3).

По форме эти методы выведены как *необходимые условия оптимальности*, однако из-за гипотез их выполнение отнюдь не необходимо для оптимальности.

Замечательным, однако, является тот факт, что если в теореме 12.2 решение $\psi(t)$ и условие максимума (D) рассматривать на всем отрезке $t_0 \leq t \leq t_1$, а условие (E) заменить более слабым требованием

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1)) \geq 0,$$

то в этой форме принцип максимума станет необходимым условием оптимальности.

12.7. Задачи

В качестве примера рассмотрим для управляемого обмена задачу об оптимальном в смысле быстродействия переходе из фазового состояния $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$ в фазовое состояние $x_0 = (0, 0, \dots, 0)$. Пусть фазовая траектория удовлетворяет уравнению

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (12.23)$$

где $u = (u_1, \dots, u_r) \in U$ — пространство допустимых управлений.

Будем рассматривать случай, когда $f(x, u) = Ax + Bu$, где $A = (a_{ij})$ — матрица размером $n \times n$, $B = (b_{ij})$ — матрица размером $n \times r$. В развернутом виде (12.23) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + \dots + b_{1r}u_r, \\ \dots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + \dots + b_{nr}u_r. \end{cases}$$

Функция Гамильтона-Понтрягина

$$H(\psi, x, u) = (\psi, f) = \sum_{i=1}^n \psi_i f_i(x, u)$$

согласно (12.23) имеет вид

$$H(\psi, x, u) = (\psi, Ax + Bu) = (\psi, Ax) + (\psi, Bu).$$

Тогда (12.23) суть

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x_i}$$

есть исходная система задачи, а

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

будем называть сопряженной системой.

Найдем общий вид сопряженной системы, если функция

$$H(\psi, x, u) = (\psi, Ax) + (\psi, Bu).$$

Имеем

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = (\psi, Ax)_{x_i}',$$

т. к. слагаемое (ψ, Bu) не зависит от переменной x . Поскольку

$$(\psi, Ax) = \psi_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots + \psi_n(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n),$$

то

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = -(\psi_1 a_{11} + \dots + \psi_n a_{1n}), \\ \dots \\ \dot{\psi}_n = -(\psi_n a_{1n} + \dots + \psi_n a_{nn}), \end{cases}$$

или

$$\dot{\psi} = -A^T \psi.$$

Согласно сформулированной ранее теореме существует решение сопряженной системы (ψ_1, \dots, ψ_n) такое, что

$$\max_{u \in U} H(\psi(t), x(t), u) = H(\psi(t), x(t), u(t)).$$

В рассматриваемом случае

$$\max_{u \in U} H = \max_{u \in U} (\psi, Bu).$$

Пример 12.1. Решить задачу на быстродействие, задаваемую системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2u, \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

Решение: Имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \cdot x_1 + 3x_2 + 0 \cdot u, \\ \dot{x}_2 = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2u. \end{cases}$$

Здесь $n = 2$, $r = 1$;

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сопряженная к исходной система $\dot{\psi} = -A^T \psi$ имеет вид

$$\dot{\psi} = - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = 0, \\ \dot{\psi}_2 = -3\psi_1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \psi_1 = c, \\ \psi_2 = -3ct + c_1. \end{cases}$$

При этом

$$\max_{|u| \leq 1} (\psi, x, u) = \max_{|u| \leq 1} (\psi, Bu) = \max_{|u| \leq 1} (2\psi \cdot u) = \max_{|u| \leq 1} (2(-3ct + c_1)u),$$

откуда искомые значения $u = \pm 1$ в зависимости от знака линейной функции $-3ct + c_1$ при $-\infty < t < \infty$, который меняется один раз. Следовательно и управление u должно меняться не более одного раза при движении управляемого объекта из произвольной точки фазовой плоскости X в точку $(0, 0)$, т. е. начало координат.

Возвращаемся к решению исходной системы при найденных значениях u .

Пусть $u = 1$. Тогда имеем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 3x_2, \\ \dot{x}_2 = 2, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} = 2u, \end{cases},$$

откуда

$$\begin{cases} x_1 = 3t^2 + 3ct + c_1, \\ x_2 = 2t + c, \end{cases}$$

— параметрическое уравнение искомой кривой.

Выразив t из второго уравнения и подставив в первое, получим

$$t = \frac{x_2 - c}{2}, \quad x_1 = \frac{3(x_2 - c)^2}{4} + \frac{3c(x_2 - c)}{2} + c_1,$$

т. е. уравнение параболы. Поскольку $\dot{x}_2 > 0$, то функция является возрастающей, что определяет направление движения точки по найденной траектории.

Аналогично, при $u = -1$ управление оптимальной траектории (параболы) будет иметь вид

$$x_1 = -\frac{3(c - x_2)^2}{4} + \frac{3c(c - x_2)}{2} + c_1.$$

В данном случае движение точки по фазовой траектории зависит от того, что $\dot{x}_2 < 0$.

Отобразив получаемые результаты в системе координат $x_1 \circ x_2$, можно построить «портрет» фазовой плоскости. \square

Пример 12.2. Решить задачу на быстродействие, задаваемую системой:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad |u| \leq 1.$$

Решение: Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вспомогательная система $\dot{\psi} = -A^T \psi$ имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \dot{\psi}_2 = -\psi_1, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \ddot{\psi}_2 = -\dot{\psi}_1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dot{\psi}_1 = \psi_2, \\ \ddot{\psi}_2 = -\psi_2. \end{cases}$$

Получаем уравнение

$$\ddot{\psi}_2 + \psi_2 = 0,$$

для которого $\lambda^2 + 1 = 0$ или $\lambda = \pm i$.

Тогда решение системы есть

$$\begin{cases} \psi_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \\ \psi_1(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \psi_2(t) = N \cos(t - \varphi), \\ \psi_1(t) = N \sin(t - \varphi), \end{cases}$$

где $N = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ — константа, $\varphi = \arctg(c_2/c_1)$.

Полученная система представляет собой параметрическое уравнение окружности. Направление движения по окружности можно определить, изменяя $-\infty < t < \infty$.

Оптимальное управление $u = \pm 1$, т. к.

$$\max_{|u| \leq 1} H(\psi, x, u) = \max_{|u| \leq 1} (\psi_2, Bu) = \max_{|u| \leq 1} Nu \cos(t - \varphi),$$

причем знак функции $\cos(t - \varphi)$, а вместе с ним и управление u будет меняться через каждые π единиц.

При $u = 1$ исходная система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (x_1 - 1)' = x_2, \\ \dot{x}_2 = -(x_1 - 1). \end{cases}$$

Решая систему, получаем в качестве фазовой траектории окружность с центром в точке $(x_1, x_2) = (1, 0)$. Аналогично, при $u = -1$ окружность будет иметь центром точку $(x_1, x_2) = (-1, 0)$.

Суммируя все полученные данные, можно построить «портрет» фазовой плоскости. Данный «портрет» позволяет понять, по какой оптимальной траектории и под сколькими оптимальными управлениями из произвольной точки плоскости (x_1, x_2) можно попасть в точку $(0, 0)$ за наименьшее время. \square

Список литературы

1. *Карманов, В. Г.* Математическое программирование : учеб. пособие / В. Г. Карманов. — М. : Наука, 1986.
2. *Сухарев, А. Г.* Курс методов оптимизации / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — М. : Наука, 1986.
3. *Габасов, Р.* Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Минск : БГУ, 1975.
4. *Поляк, Б. Т.* Введение в оптимизацию / Б. Т. Поляк. — М. : Наука, 1983.
5. *Моисеев, Н. Н.* Методы оптимизации : учеб. пособие / Н. Н. Моисеев, Ю. П. Иванилов, Е. М. Столярова. — М. : Наука, 1978.
6. *Горстко, А. Б.* Методы оптимизации : метод. указания / А. Б. Горстко, Ю. А. Домбровский, С. В. Жак. — М. : Наука, 1981.
7. *Дегтярев, Ю. И.* Методы оптимизации / Ю. И. Дегтярев. — М. : Советское радио, 1980.
8. *Смирнов, В. И.* Вариационное исчисление / В. И. Смирнов, В. И. Крылов, Л. В. Канторович. — М. : КуБуч, 1933.
9. *Понтрягин, Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин [и др.] — М. : Наука, 1983.
10. *Болтянский, В. Г.* Математические методы оптимального управления / В. Г. Болтянский. — М. : Наука, 1969.
11. *Алексеев, В. М.* Математическое программирование : учеб. пособие / В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1979.
12. *Бережной, Е. И.* Принцип максимума : учеб. пособие / Е. И. Бережной, В. С. Климов. — Ярославль : ЯрГУ, 1984.
13. *Галеев, Э. М.* Курс лекций по вариационному исчислению и оптимальному управлению / Э. М. Галеев. — М. : Изд-во МГУ, 1996.
14. *Васильева, А. Б.* Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах / А. Б. Васильева [и др.] — 2-е изд. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Учебное издание

Майорова Наталия Львовна,
Глазков Дмитрий Владимирович

Методы оптимизации

Учебное пособие

Редактор, корректор М. Э. Левакова
Компьютерная верстка Д. В. Глазков

Подписано в печать 07.04.2015.

Формат 60x84/16.

Бумага офсетная.

Усл. печ. л. 6,5. Уч.-изд. л. 5,0.

Тираж 50 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.

150000, Ярославль, ул. Советская, 14.