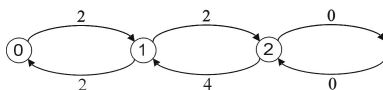


Е. В. Никулина

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ



Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
Кафедра общей математики

Е. В. Никулина

ТЕОРИЯ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Практикум

Ярославль
ЯрГУ
2017

УДК 519.872(076.5)

ББК В 183.53я73

Н 65

Рекомендовано

*Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2017 года*

Рецензент

кафедра общей математики ЯрГУ

Никулина, Елена Вячеславовна.

Н 65 Теория массового обслуживания : практикум /
Е. В. Никулина ; Яросл. гос. ун-т им. П. Г.
Демидова. – Ярославль : ЯрГУ, 2017. – 40 с.

Данный практикум содержит задачи, относящиеся к системам массового обслуживания, работающим как в стационарном, так и не в стационарном режимах. Каждый раздел включает в себя основные факты, формулы, примеры и список упражнений.

Предназначено для студентов и магистрантов, изучающих теорию массового обслуживания.

УДК 519.872(076.5)

ББК В 183.53я73

©ЯрГУ, 2017

Оглавление

1. Составление систем дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО, с помощью диаграмм интенсивностей переходов	4
2. Описание различных СМО, работающих не в стационарном режиме	7
3. Системы массового обслуживания, работающие в стационарном режиме	13
4. Система массового обслуживания $M/M/n$	17
5. Решение различных задач ТМО	25

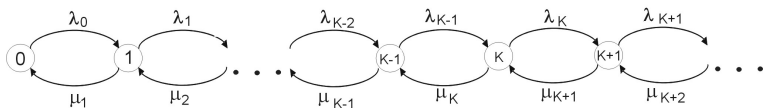
1. Составление систем дифференциальных уравнений, описывающих работу СМО, с помощью диаграмм интенсивностей переходов

Напомним, что при решении задач теории массового обслуживания (далее – ТМО) необходимо уметь составлять соответствующие системы дифференциальных или алгебраических уравнений, неизвестными величинами в которых являются вероятности состояний систем массового обслуживания (далее – СМО). При описании работы СМО во многих случаях можно опираться на так называемый процесс гибели и размножения. В общем случае он описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1, с. 11–13]:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \\ + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \text{ при } k \geq 1, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

где $p_k(t)$ – вероятность того, что в момент t объем популяции равен k .

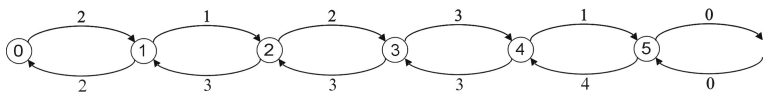
Упростить процесс составления системы (1.1) и ей подобных помогает так называемая диаграмма интенсивностей переходов:



В кружочке записано соответствующее состояние СМО от 0 и до бесконечности в данном случае. Рассмотрим, как записывается уравнение для $p_k(t)$ с учетом диаграммы. Стрелки, направленные к кружочку \textcircled{k} , соответствуют знаку "+", от него – знаку "-". Таким образом, уравнение получается как сумма "потоков" $\lambda_{k-1}p_{k-1}$ и $\mu_{k+1}p_{k+1}$ в состояние \textcircled{k} минус сумма "потоков" из состояния \textcircled{k} в состояния $\textcircled{k-1}$ и $\textcircled{k+1}$, т. е. $\lambda_k p_k + \mu_k p_k$.

Пример

Составить систему уравнений СМО, имеющей диаграмму интенсивностей переходов:



Решение:

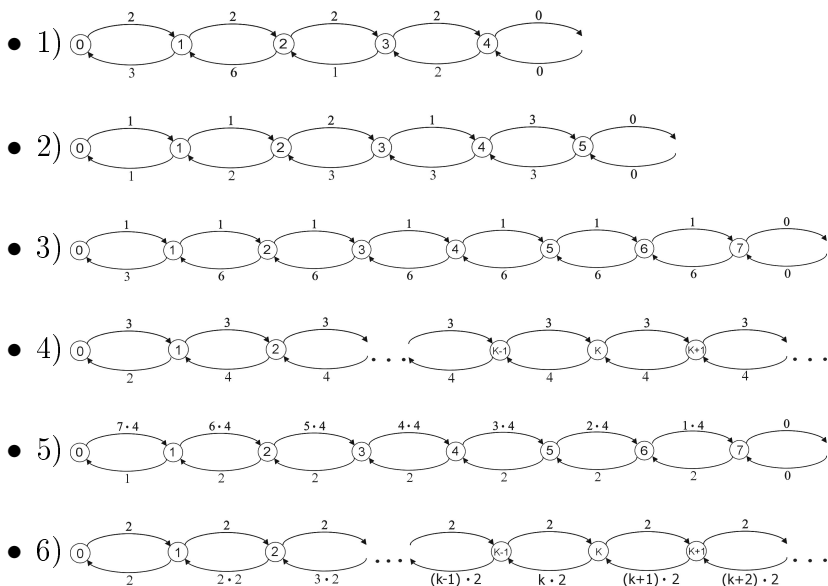
Внимательно посмотрев на диаграмму, можно сделать следующий вывод: система уравнений будет конечна, т. к. СМО может находиться в одном из шести состояний и, как следствие, будет иметь семь уравнений: шесть дифференциальных и одно алгебраическое.

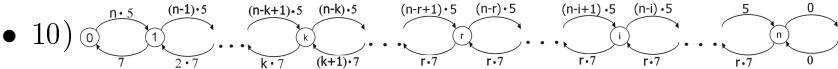
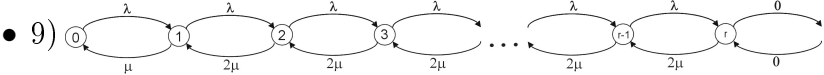
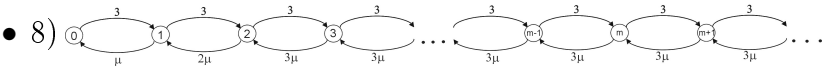
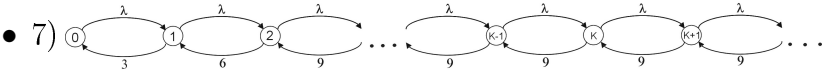
Составляем систему:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -2p_0(t) + 2p_1(t), \\ p_1'(t) = 2p_0(t) - 3p_1(t) + 3p_2(t), \\ p_2'(t) = 1p_1(t) - 5p_2(t) + 3p_3(t), \\ p_3'(t) = 2p_2(t) - 6p_3(t) + 3p_4(t), \\ p_4'(t) = 3p_3(t) - 4p_4(t) + 4p_5(t), \\ p_5'(t) = 1p_4(t) - 4p_5(t), \\ p_0 + p_1 + p_3 + p_4 + p_5 = 1. \end{cases} \quad (1.2)$$

Упражнения

Составьте системы дифференциальных уравнений для СМО, имеющих следующие диаграммы интенсивностей переходов:





2. Описание различных СМО, работающих не в стационарном режиме

В [1, с. 16–20] в общих случаях рассмотрена работа систем – с потерями, с ожиданием, замкнутых систем.

Система с потерями, без очереди

В данной СМО n приборов, $\lambda_k = \lambda$ при $0 \leq k \leq n-1$, $\mu_k = k\mu$ при $1 \leq k \leq n$, очереди нет. Ее работа описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\ \text{при } 1 \leq k \leq n-1, \\ \dots\dots\dots \\ p_n'(t) = \lambda p_{n-1}(t) - n\mu p_n(t), \\ \sum_{k=0}^n p_k(t) = 1. \end{array} \right.$$

Система с ожиданием, без ограничения на длину очереди

Данная СМО имеет n приборов, $\lambda_k = \lambda$ при $k \geq 0$, $\mu_k = k\mu$ при $1 \leq k \leq n$ и $\mu_k = n\mu$ при $k > n$, неограниченную очередь. Ее математической моделью служит система:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0'(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + k\mu)p_k(t) + (k+1)\mu p_{k+1}(t), \\ \text{при } 1 \leq k \leq n-1, \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = \lambda p_{k-1}(t) - (\lambda + n\mu)p_k(t) + n\mu p_{k+1}(t), \\ \text{при } k \geq n, \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k(t) = 1. \end{array} \right.$$

Замкнутая система

В СМО максимальное число заявок – n , r приборов, причем $r < n$, $\lambda_k = (n - k)\lambda$ при $0 \leq k \leq n$, $\mu_k = k\mu$ при $1 \leq k \leq r$ и $\mu_k = r\mu$ при $r < k \leq n$. Ее работа описывается системой:

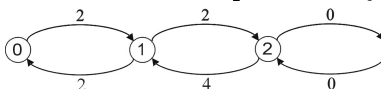
$$\left\{ \begin{array}{l} p_0'(t) = -n\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = (n - k + 1)\lambda p_{k-1}(t) - [\lambda(n - k) + k\mu]p_k(t) + \\ + (k + 1)\mu p_{k+1}(t), \text{ при } 1 \leq k \leq r - 1, \\ \dots\dots\dots \\ p_k'(t) = (n - k + 1)\lambda p_{k-1}(t) - [\lambda(n - k) + r\mu]p_k(t) + \\ + r\mu p_{k+1}(t), \text{ при } r \leq k \leq n - 1, \\ \dots\dots\dots \\ p_n'(t) = -r\mu p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t), \\ \sum_{k=0}^n p_k(t) = 1. \end{array} \right.$$

Пример

В системе с потерями $n = 2, \mu = 2, \lambda = 2$, $p_0(0) = 1, p_1(0) = 0, p_2(0) = 0$. Составить диаграмму интенсивностей переходов, систему дифференциальных уравнений, найти вероятности состояний системы массового обслуживания.

Решение:

Диаграмма интенсивности переходов будет иметь вид:



Получаем следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -2p_0(t) + 2p_1(t), \\ p_1'(t) = 2p_0(t) - 4p_1(t) + 4p_2(t), \\ p_2'(t) = 2p_1(t) - 4p_2(t), \\ p_0(t) + p_1(t) + p_2(t) = 1. \end{cases}$$

Система линейно зависима, можно не рассматривать третье уравнение. Из алгебраического уравнения имеем $p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t)$ и подставляем его во второе уравнение.

Тогда

$$\begin{cases} p_0'(t) = -2p_0(t) + 2p_1(t), \\ p_1'(t) = -2p_0(t) - 8p_1(t) + 4, \\ p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_2(t). \end{cases}$$

Перейдем к решению системы следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} p_0'(t) = -2p_0(t) + 2p_1(t), \\ p_1'(t) = -2p_0(t) - 8p_1(t) + 4. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} -2 - \lambda & 2 \\ -2 & -8 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда

$$\lambda_{1,2} = -5 \pm \sqrt{5}.$$

Тогда в качестве собственных можно взять следующие векторы:

$$\overline{H}_1 = \left\{ 3 + \sqrt{5}; -2 \right\},$$

$$\overline{H}_2 = \left\{ 3 - \sqrt{5}; -2 \right\}.$$

Общее решение однородной системы дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$p_0(t) = C_1(3 + \sqrt{5})e^{(-5 + \sqrt{5})t} + C_2(3 - \sqrt{5})e^{(-5 - \sqrt{5})t},$$

$$p_1(t) = C_1(-2)e^{(-5 + \sqrt{5})t} + C_2(-2)e^{(-5 - \sqrt{5})t}.$$

Частное решение неоднородной системы будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned} p_0 &= a, \\ p_1 &= b, \end{aligned} \quad \text{где } a, b \in R.$$

Подставим $p_0 = a, p_1 = b$ в систему

$$\begin{cases} p_0'(t) = -2p_0(t) + 2p_1(t), \\ p_1'(t) = -2p_0(t) - 8p_1(t) + 4. \end{cases}$$

Получим

$$p_0 = a = \frac{2}{5},$$

$$p_1 = b = \frac{2}{5}.$$

Тогда общее решение неоднородной системы будет иметь вид:

$$p_0(t) = C_1(3 + \sqrt{5})e^{(-5 + \sqrt{5})t} + C_2(3 - \sqrt{5})e^{(-5 - \sqrt{5})t} + \frac{2}{5},$$

$$p_1(t) = C_1(-2)e^{(-5 + \sqrt{5})t} + C_2(-2)e^{(-5 - \sqrt{5})t} + \frac{2}{5}.$$

Используя начальные условия, найдем C_1 и C_2 :

$$C_1 = \frac{1}{10},$$

$$C_2 = \frac{1}{10}.$$

Итак,

$$p_0(t) = \frac{3 + \sqrt{5}}{10}e^{(-5 + \sqrt{5})t} + \frac{3 - \sqrt{5}}{10}e^{(-5 - \sqrt{5})t} + \frac{2}{5},$$

$$p_1(t) = -\frac{1}{5}e^{(-5 + \sqrt{5})t} - \frac{1}{5}e^{(-5 - \sqrt{5})t} + \frac{2}{5}.$$

Подставляя выражения для $p_0(t)$ и $p_1(t)$ в $p_2(t) = 1 - p_0(t) - p_1(t)$, получим

$$p_2(t) = \frac{-1 - \sqrt{5}}{10}e^{(-5 + \sqrt{5})t} + \frac{-1 + \sqrt{5}}{10}e^{(-5 - \sqrt{5})t} + \frac{1}{5}.$$

Упражнения

- 1. В СМО имеются три прибора одинаковой средней производительности. Система – с потерями, отсутствием очереди. Средняя интенсивность входного потока равна пяти заявкам в час, а средняя производительность каждого прибора – четырем заявкам в час. Изобразить диаграмму интенсивностей переходов, составить соответствующую систему дифференциальных уравнений.
- 2. В СМО два прибора одинаковой средней производительности. Система – с ожиданием, неограниченной очередью, со средней интенсивностью входного

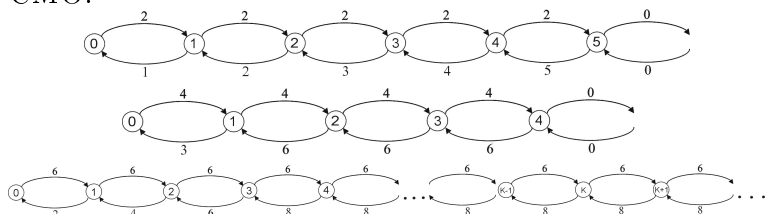
потока, равной двум заявкам в час, и средней производительностью у каждого прибора, равной одной заявке в час. Изобразить диаграмму интенсивностей переходов, выписать соответствующую систему дифференциальных уравнений.

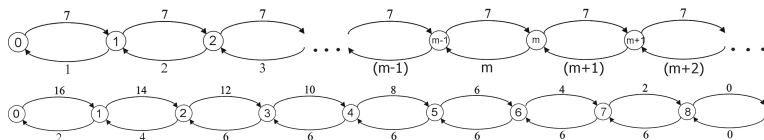
- 3. Рабочий обслуживает 6 станков. В среднем станок останавливается 1 раз в 2 часа. Обслуживание одного станка занимает у рабочего 15 минут. К какому типу относится данная система? Изобразить для данной СМО диаграмму интенсивностей переходов и составить систему дифференциальных уравнений в двух случаях:

- состояние E_k означает, что сломаны k станков,
- состояние E_k означает, что отремонтированы k станков.

- 4. В СМО имеются два прибора одинаковой средней производительности, равной двум заявкам в минуту. Средняя интенсивность входного потока равна трем заявкам в минуту. В очереди может содержаться не более одной заявки. Изобразить диаграмму интенсивностей переходов, составить систему дифференциальных уравнений.

- 5. Даны диаграммы интенсивностей переходов пяти СМО:





Для каждой системы определить: количество приборов, среднюю интенсивность входного потока, среднюю производительность каждого прибора, количество заявок в очереди.

- 6. Даны следующие системы с потерями, отсутствием очереди:

$$M_1 : \quad n = 1, \lambda = 1, \mu = 2, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0,$$

$$M_2 : \quad n = 1, \lambda = 1, \mu = 3, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0,$$

$$M_3 : \quad n = 1, \lambda = 2, \mu = 3, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0.$$

Для каждой СМО составить диаграмму интенсивностей переходов, систему дифференциальных уравнений, найти вероятности возможных состояний СМО.

- 7. Имеется система с потерями, без очереди. В ней два прибора, постоянная интенсивность входного потока, равная одному, и средняя производительность каждого прибора, равная трем. В начальный момент времени система массового обслуживания пуста. Составить систему дифференциальных уравнений, найти вероятности возможных состояний СМО.

3. Системы массового обслуживания, работающие в стационарном режиме

Когда СМО работает в стационарном режиме, описывающая ее работу система дифференциальных уравнений

превращается в алгебраическую [1, с. 31–33]:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1, \text{ при } k = 0, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}, \\ \text{при } k \geq 1. \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

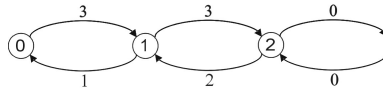
Решение данной системы имеет вид:

$$p_k = \prod_0^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} p_0, k = 1, \dots \quad (3.2)$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \prod_0^{k-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} \quad (3.3)$$

Пример

Рассмотрим СМО с потерями, отсутствием очереди, для которой $n = 2, \mu = 1, \lambda = 3$, и которая работает в стационарном режиме. Диаграмма интенсивностей переходов будет иметь вид:



Получим

$$\left\{ \begin{array}{l} p_1 = \frac{3}{1} \cdot p_0, \\ p_2 = \frac{3 \cdot 3}{1 \cdot 2} p_0, \\ p_0 + p_1 + p_2 = 1, \end{array} \right.$$

отсюда

$$\begin{cases} p_1 = 3p_0, \\ p_2 = \frac{9}{2}p_0, \\ p_0 + 3p_0 + \frac{9}{2}p_0 = 1, \end{cases}$$

$$\text{тогда } p_0 = \frac{2}{17}, p_1 = \frac{6}{17}, p_2 = \frac{9}{17}.$$

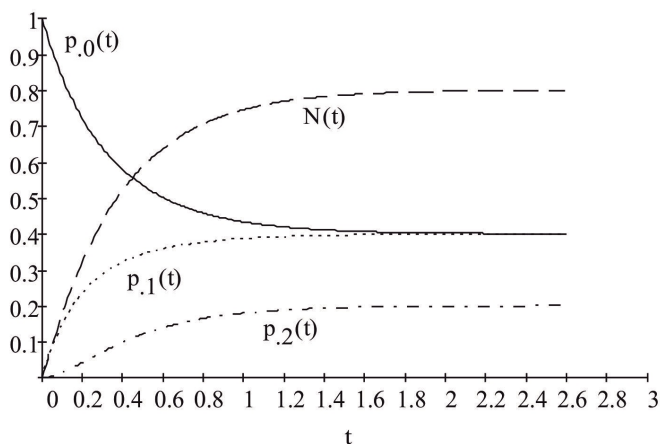
Далее найдем N – среднее число заявок в системе как математическое ожидание дискретной случайной величины – числа заявок в СМО:

$$N = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2.$$

Тогда

$$N = 0 \cdot \frac{2}{17} + 1 \cdot \frac{6}{17} + 2 \cdot \frac{9}{17} = \frac{24}{17} = 1\frac{7}{17}.$$

В п. 2 нами была рассмотрена СМО без очереди, для которой $n = 2, \lambda = 2, \mu = 2$ и найдены вероятности состояний $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ не в стационарном случае. Изобразив графики функций $p_0(t), p_1(t), p_2(t), N(t)$, можно определить примерно, в какой момент работы СМО устанавливается практически стационарный режим. В данном случае можно считать, что это произойдет при $t = 1.8$. Кроме этого, если найти пределы функций $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$ при $t \rightarrow \infty$, то можно получить их стационарные значения: $p_0 = \frac{2}{5}, p_1 = \frac{2}{5}, p_2 = \frac{1}{5}$.



Упражнения

- 1. Имеем СМО с потерями, отсутствием очереди, для которой $n = 2, \lambda = 2, \mu = 1$, и которая работает в стационарном режиме. Найти p_0, p_1, p_2, N .
- 2. Имеются три СМО с потерями, отсутствием очереди:

$$M_1 : \quad n = 1, \lambda = 1, \mu = 2, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0,$$

$$M_2 : \quad n = 1, \lambda = 1, \mu = 3, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0,$$

$$M_3 : \quad n = 1, \lambda = 2, \mu = 3, p_0(0) = 1, p_1(0) = 0.$$

Для каждой системы построить графики функций: $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$; определить, в какой момент времени установится стационарный режим. Вычислить стационарные значения вероятностей состояний двумя способами. Заполнить таблицу

n	λ	μ	p_0	p_1	p_2	N	ρ
1	1	3					
1	1	2					
1	2	3					

где ρ – коэффициент использования СМО.

Сделать вывод.

- 3. Имеется СМО (упр. 7, с. 13). Построить графики функций: $p_0(t), p_1(t), p_2(t)$. Выяснить, в какой примерно момент времени установится стационарный режим. Вычислить стационарные значения вероятностей состояний системы двумя способами.

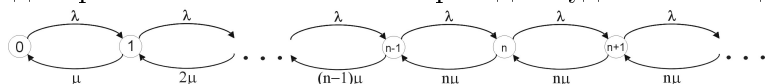
4. Система массового обслуживания $M/M/n$

В обозначении СМО часто используется аббревиатура следующего вида:

Буква / Буква / Число / Число.

Первая буква обозначает функцию распределения заявок входного потока. Для показательного распределения используется буква M . Вторая буква – закон распределения времени обслуживания одной заявки. Первое число обозначает число приборов в системе, второе – объем накопителя. Иногда используются дополнительные символы, обозначающие число входных потоков и т. п. Рассмотрим СМО $M/M/n$.

Система имеет входной поток средней интенсивности λ , неограниченную длину очереди и приборы, имеющие одинаковую среднюю производительность, равную μ . Тогда диаграмма интенсивностей переходов будет иметь вид:



Формулы для вычисления вероятностей состояний СМО см. [1, с. 43]:

$$\begin{aligned}
 p_k &= p_0 \frac{n^k}{k!} \rho^k && \text{для } k < n, \\
 p_k &= p_0 \frac{n^n}{n!} \rho^k && \text{для } k \geq n, \\
 p_0 &= \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)} \right]^{-1}.
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Формулы для вычисления основных показателей работы системы см. [1, с. 43–45]:

π – вероятность того, что поступившая в СМО заявка окажется в очереди:

$$\pi = \frac{\frac{(n\rho)^n}{n!} \frac{1}{1-\rho}}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \frac{(n\rho)^n}{n!(1-\rho)}}, \tag{4.2}$$

M_1 – средняя длина очереди:

$$M_1 = p_n \frac{\rho}{(1-\rho)^2}, \tag{4.3}$$

M_2 – среднее число заявок, находящихся в системе:

$$M_2 = p_0 \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{(k-1)!} + \frac{p_n n}{1-\rho} + \frac{p_n \rho}{(1-\rho)^2}, \tag{4.4}$$

M_3 – среднее число свободных от обслуживания приборов:

$$M_3 = p_0 \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \frac{(n\rho)^k}{k!}, \tag{4.5}$$

M_4 – среднее время ожидания в очереди, вычисленное с учетом формулы Литтла для очереди [1, с. 10]:

$$M_4 = \frac{M_1}{\lambda} = \frac{\pi}{n\mu - \lambda}, \quad (4.6)$$

M_5 – среднее время пребывания заявки в системе, полученное с помощью формулы Литтла:

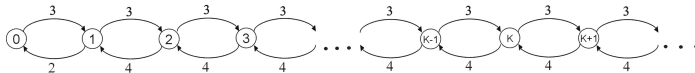
$$M_5 = \frac{M_2}{\lambda}. \quad (4.7)$$

Пример

Имеется СМО с двумя приборами, работающая в стационарном режиме: $\lambda = 3$, $\mu = 2$, очередь неограниченна. Найти среднее число заявок в системе и среднюю длину очереди.

Решение:

Диаграмма интенсивностей переходов имеет вид:



Вероятности состояний и характеристики работы СМО можно вычислить двумя способами: по готовым формулам (4.1 – 4.6) или, руководствуясь определениями характеристик и фактами, к ним относящимся.

Найдем двумя способами вероятности состояний системы:

1-й способ (по формуле 4.1)

Заметим, что для опеределения показателей работы СМО этим способом достаточно найти только вероятности состояний p_0 и p_2 . Учитывая, что $\rho = \frac{3}{4}$, имеем

$$p_0 = \left[\frac{(2 \cdot \frac{3}{4})^0}{0!} + \frac{(2 \cdot \frac{3}{4})^1}{1!} + \frac{(2 \cdot \frac{3}{4})^2}{2! \cdot (1 - \frac{3}{4})} \right]^{-1} =$$

$$\left[1 + \frac{3}{2} + \frac{\frac{9}{4}}{\frac{1}{2}}\right]^{-1} = \left[1 + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}\right]^{-1} = \frac{2}{14} = \frac{1}{7},$$

$$p_2 = \frac{1}{7} \cdot \frac{2^2}{2!} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{7} \cdot 2 \cdot \frac{9}{16} = \frac{9}{56}.$$

2-й способ

Учитывая формулу 3.2 и опираясь на диаграмму интенсивностей переходов, получим

$$p_1 = \frac{3}{2} \cdot p_0,$$

$$p_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot p_0,$$

$$p_3 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot p_0,$$

$$-----$$

$$p_k = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} \cdot p_0,$$

$$-----.$$

Тогда, учитывая, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$, имеем

$$p_0 + \frac{3}{2} \cdot p_0 + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot p_0 + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot p_0 + \dots = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots\right) = 1.$$

Заметим, что $\frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots$ есть сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, вычисляемая по формуле:

$$S = \frac{b_1}{1 - q}, \quad (4.8)$$

где $b_1 = \frac{3}{2}, q = \frac{3}{4}$.

Тогда

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{\frac{3}{2}}{1 - \frac{3}{4}} \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot (1 + 6) = 1,$$

$$p_0 = \frac{1}{7}.$$

Следовательно,

$$p_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{3}{14},$$

$$p_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{7} = \frac{9}{56},$$

$$- - - - -.$$

Далее найдем M_2 – среднее число заявок в системе.

1-й способ (по формуле 4.4):

$$\begin{aligned} M_2 &= \frac{1}{7} \cdot \frac{\left(2 \cdot \frac{3}{4}\right)^1}{1} + \frac{\frac{9}{56} \cdot 2}{1 - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{9}{56} \cdot \frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \\ &= \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} + \frac{9}{28} \cdot \frac{4}{1} + \frac{9}{56} \cdot \frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{3}{14} + \frac{18}{14} + \frac{27}{14} = \frac{48}{14} = 3\frac{3}{7}. \end{aligned}$$

2-й способ (как математическое ожидание соответствующей дискретной случайной величины):

$$\begin{aligned}
M_2 &= 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + 3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots = \\
&= \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^k = \frac{3}{14} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (q^{k+1})' \Big|_{q=\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{3}{14} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} \right)' \Big|_{q=\frac{3}{4}} = \frac{3}{14} \cdot \left(\frac{q}{1-q} \right)' \Big|_{q=\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{(1-q)^2} \Big|_{q=\frac{3}{4}} = \\
&= \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{(1-\frac{3}{4})^2} = \frac{3}{14} \cdot 16 = 3\frac{3}{7}.
\end{aligned}$$

Вычислим M_1 – среднюю длину очереди.

1-й способ (по формуле 4.3):

$$M_1 = \frac{9}{56} \cdot \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{9}{56} \cdot \frac{3}{4} \cdot 16 = \frac{27}{14} = 1\frac{13}{14}.$$

2-й способ (как математическое ожидание дискретной случайной величины – длины очереди):

$$\begin{aligned}
M_1 &= 0 \cdot (p_0 + p_1 + p_2) + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 + 3 \cdot p_5 + \dots = \\
&= 1 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 3 \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4 + \dots = \\
&= \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = \frac{3}{14} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 16 = 1\frac{13}{14}.
\end{aligned}$$

Двумя способами можно вычислить и другие средние характеристики системы $M/M/n$, и не только. Бóльшая

простота первого способа заключается в формальной постановке численных значений величин в уже готовые формулы, которые для разных систем можно найти в [1]. Недостаток – необходимость помнить громоздкие формулы. Второй способ, на наш взгляд, предпочтительнее при решении задач, так как предполагает осмысленный подход к вычислению каждой характеристики системы, позволяющий находить их самостоятельно в каждом новом случае, не опираясь на готовые результаты.

Упражнения

- 1. Работает СМО с двумя приборами и неограниченной очередью в стационарном режиме. Входной поток – пуассоновский со средней интенсивностью, равной четырем заявкам в минуту. Средняя интенсивность обслуживания равна также четырем заявкам в минуту. Вычислить двумя способами:
 - вероятность того, что поступившая в систему заявка окажется в очереди,
 - среднее число заявок в очереди,
 - среднее число заявок в системе,
 - среднее число свободных от обслуживания приборов,
 - среднее число занятых приборов,
 - среднее время пребывания заявки в очереди,
 - среднее время пребывания заявки в системе.
- 2. СМО с двумя приборами, имеющими одинаковую среднюю интенсивность обслуживания, равную трем заявкам в час, работает в стационарном режиме. Очередь неограниченная, пуассоновский входной поток

со средней интенсивностью – три заявки в час. Найти:

- вероятность того, что все приборы свободны,
 - вероятность, что в точности один прибор свободен,
 - вероятность занятости хотя бы одного прибора,
 - вероятность того, что в очереди не более одной заявки,
 - вероятность того, что в системе нет очереди,
 - вероятность, что вновь пришедшей заявке придется стоять в очереди.
- 3. СМО с тремя приборами и неограниченной очередью работает в стационарном режиме. Входной поток – пуассоновский со средней интенсивностью, равной двум заявкам в единицу времени. Средняя интенсивность обслуживания равна одной заявке в единицу времени. Найти любым способом:
 - среднюю длину очереди,
 - среднее число заявок в системе,
 - среднее число свободных от обслуживания приборов,
 - среднее время ожидания заявки в очереди,
 - среднее время пребывания заявки в системе,
 - вероятность, что заявке не придется стоять в очереди.
 - 4. Рассмотрим в качестве системы массового обслуживания универсам, в который приходят покупатели

со средней интенсивностью 100 человек в час. Данный входной поток будем считать пуассоновским. Каждым кассиром в среднем обслуживаются 40 человек в час, при этом будем считать, что длительность обслуживания подчиняется показательному закону. Найти:

- при каком минимальном количестве касс очередь не будет расти безгранично?
 - вероятность, что в очереди не будет более двух человек,
 - вероятность, что покупателю придется стоять в очереди,
 - среднее число свободных касс,
 - среднюю длительность ожидания обслуживания в очереди,
 - среднее время нахождения покупателя в системе.
- 5. Имеется система массового обслуживания, рассматриваемая в предыдущем упражнении. Увеличить количество касс на одну по сравнению с минимальным, при котором очередь не растет до бесконечности. Найти характеристики, перечисленные в задаче выше, провести анализ и сделать вывод о работе СМО.

5. Решение различных задач ТМО

Пример 1

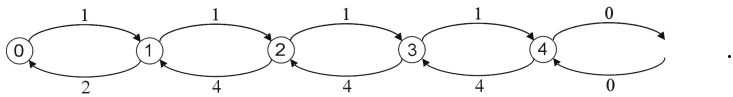
Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной двум заявкам в час, с входным

пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной одной заявке в час. Количество заявок в очереди не может быть больше двух. Найти следующие характеристики:

- 1) среднее время ожидания;
- 2) вероятность того, что вновь пришедшей заявке не придется ждать начала обслуживания (т. е. она сразу поступит на прибор).

Режим стационарный.

Решение:



Отсюда

$$p_1 = \frac{1}{2} \cdot p_0,$$

$$p_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot p_0 = \frac{1}{8} \cdot p_0,$$

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot p_0 = \frac{1}{32} \cdot p_0,$$

$$p_4 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot p_0 = \frac{1}{128} \cdot p_0,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,$$

$$p_0 + \frac{1}{2} \cdot p_0 + \frac{1}{8} \cdot p_0 + \frac{1}{32} \cdot p_0 + \frac{1}{128} \cdot p_0 = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{128}\right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \frac{213}{128} = 1,$$

$$p_0 = \frac{128}{213}.$$

$$\text{Тогда } p_1 = \frac{64}{213}, p_2 = \frac{16}{213}, p_3 = \frac{4}{213}, p_4 = \frac{1}{213}.$$

- 1. Для нахождения среднего времени ожидания используем формулу Литтла для очереди

$$N_{\text{оч.}} = \lambda \cdot T_{\text{оч.}},$$

где $N_{\text{оч.}}$ – среднее количество заявок в очереди,

$T_{\text{оч.}}$ – среднее время ожидания.

$$\begin{aligned} N_{\text{оч.}} &= 0 \cdot (p_0 + p_1 + p_2) + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_4 = \\ &= \frac{4}{213} + 2 \cdot \frac{1}{213} = \frac{6}{213}, \end{aligned}$$

тогда

$$T_{\text{оч.}} = \frac{6}{213} : 1 = \frac{6}{213} \approx 0,028.$$

- 2. $p_0 + p_1 = \frac{128 + 64}{213} = \frac{192}{213} \approx 0,9.$

Пример 2

Пусть имеется один специалист в компьютерной области, обслуживающий компьютерное оборудование фирмы – 4 компьютера, которые время от времени выходят из строя. Средняя производительность работника – 2 компьютера в единицу времени. Интенсивность поломки каждого компьютера – один компьютер в две единицы времени. Найти:

- 1) среднее число сломанных компьютеров,
- 2) среднее число работающих компьютеров,

- 3) вероятность того, что все компьютеры в рабочем состоянии,
- 4) вероятность, что все компьютеры сломаны.

Режим стационарный.

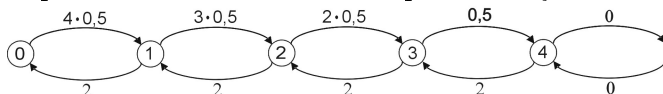
Решение:

Данная СМО относится к замкнутым системам. В зависимости от выбора того, что означает состояние E_k , задачу можно решить двумя способами.

1-й способ

Состояние E_k означает, что k компьютеров сломано, тогда параметры системы: $n = 4, \lambda = 0,5, \mu = 2$.

Диаграмма интенсивностей переходов будет иметь вид:



Отсюда

$$p_1 = \frac{4 \cdot 0,5}{2} \cdot p_0 = p_0,$$

$$p_2 = 1 \cdot \frac{3 \cdot 0,5}{2} \cdot p_0 = \frac{3}{4} p_0,$$

$$p_3 = \frac{3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 0,5}{2} \cdot p_0 = \frac{3}{8} p_0,$$

$$p_4 = \frac{3}{8} \cdot \frac{0,5}{2} \cdot p_0 = \frac{3}{32} p_0,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(2 + \frac{3}{4} + \frac{3}{8} + \frac{3}{32} \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(\frac{64 + 24 + 12 + 3}{32} \right) = 1,$$

$$p_0 = \frac{32}{103}.$$

$$\text{Тогда } p_1 = \frac{32}{103}, p_2 = \frac{24}{103}, p_3 = \frac{12}{103}, p_4 = \frac{3}{103}.$$

$$\bullet \text{ 1) } N_{\text{сл.}} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \\ = \frac{32}{103} + \frac{48}{103} + \frac{36}{103} + \frac{12}{103} = \frac{128}{103} \approx 1,24.$$

$$\bullet \text{ 2) } N_{\text{раб.}} = 0 \cdot p_4 + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_1 + 4 \cdot p_0 = \\ = \frac{12}{103} + \frac{48}{103} + \frac{96}{103} + \frac{128}{103} = \frac{284}{103} \approx 2,76.$$

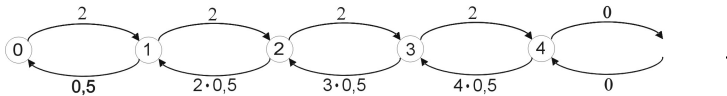
$$\text{Заметим, что } \frac{128}{103} + \frac{284}{103} = \frac{412}{103} = 4, \\ \text{т. е. } N_{\text{сл.}} + N_{\text{раб.}} = n.$$

$$\bullet \text{ 3) } p_0 = \frac{32}{103} \approx 0,31.$$

$$\bullet \text{ 4) } p_4 = \frac{3}{103} \approx 0,03.$$

2 способ.

Пусть состояние E_k означает, что k компьютеров работают, тогда $n = 4, \lambda = 2, \mu = 0,5$. В этом случае диаграмма интенсивностей переходов будет иметь вид:



Отсюда

$$p_1 = 4 \cdot p_0,$$

$$p_2 = 4 \cdot 2 \cdot p_0 = 8 \cdot p_0,$$

$$p_3 = 8 \cdot \frac{4}{3} \cdot p_0 = \frac{32}{3} \cdot p_0,$$

$$p_4 = \frac{32}{3} \cdot p_0,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + 4 + 8 + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(13 + \frac{64}{3} \right) = 1,$$

$$p_0 = \frac{3}{103}.$$

$$\text{Тогда } p_1 = \frac{12}{103}, p_2 = \frac{24}{103}, p_3 = \frac{32}{103}, p_4 = \frac{32}{103}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 1) } N_{\text{сл.}} &= 0 \cdot p_4 + 1 \cdot p_3 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_1 + 4 \cdot p_0 = \\ &= \frac{32}{103} + \frac{48}{103} + \frac{36}{103} + \frac{12}{103} = \frac{128}{103} \approx 1,24. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 2) } N_{\text{раб.}} &= 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + 3 \cdot p_3 + 4 \cdot p_4 = \\ &= \frac{12}{103} + \frac{48}{103} + \frac{96}{103} + \frac{128}{103} = \frac{284}{103} \approx 2,76. \end{aligned}$$

$$\bullet \text{ 3) } p_4 = \frac{32}{103} \approx 0,31.$$

$$\bullet \text{ 4) } p_0 = \frac{3}{103} \approx 0,03.$$

Пример 3

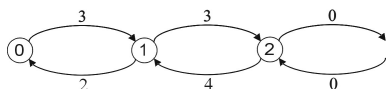
Имеются две системы. У каждой из них по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной двум заявкам в час. Входные потоки – пуассоновские, со средней интенсивностью – три заявки в час. Режим стационарный. Первая система – с отказами, без очереди, вторая – с неограниченной очередью. Найти:

- 1) вероятность занятости хотя бы одного прибора в каждой системе, значения сравнить,

- 2) вероятность, что в точности один прибор свободен в каждой системе, значения сравнить,
- 3) вероятность, что заявке не придется ждать (для второй системы),
- 4) вероятность, что заявка будет стоять в очереди (для второй системы).

Решение:

Для первой системы диаграмма интенсивностей переходов будет иметь вид:



Отсюда

$$p_1 = \frac{3}{2} \cdot p_0,$$

$$p_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot p_0,$$

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1,$$

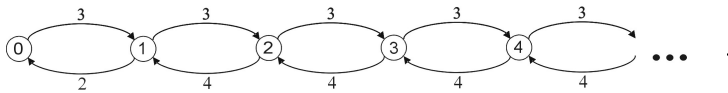
$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \right) = 1,$$

$$p_0 = \frac{8}{29}.$$

$$\text{Тогда } p_1 = \frac{12}{29}, p_2 = \frac{9}{29}.$$

- 1) $p_1 + p_2 = \frac{12}{29} + \frac{9}{29} = \frac{21}{29} \approx 0,724.$
- 2) $p_1 = \frac{12}{29} \approx 0,4.$

Для второй системы диаграмма интенсивностей переходов будет выглядеть следующим образом:



Следовательно,

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} + \dots + \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^k + \dots \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \right) = 1,$$

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{3}{2} \cdot 4 \right) = 1,$$

$$p_0 = \frac{1}{7}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ 1) } \sum_{k=1}^{\infty} p_k &= \frac{1}{7} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^k = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = \frac{3}{14} \cdot \frac{4}{1} = \\ &= \frac{6}{7} \approx 0,857. \end{aligned}$$

Заметим, что $\frac{6}{7} > \frac{21}{29}$ по причине наличия очереди во второй системе.

$$\bullet \text{ 2) } p_1 = \frac{3}{2} \cdot p_0 = \frac{3}{14} \approx 0,2.$$

$\frac{3}{14} < \frac{12}{29}$, так как во второй системе заявки накапливаются в очереди, и, возможно, как только один из двух занятых приборов освободится, на него сразу же поступит заявка из накопителя. А в первой системе в подобной ситуации освободившийся прибор может простаивать какое-то время, за счет чего и будет больше значение p_1 .

- 3) $p_0 + p_1 = \frac{1}{7} + \frac{3}{14} = \frac{5}{14} \approx 0,357$.
- 4) $\sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1 - p_0 - p_1 = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \approx 0,64$.

Упражнения

- 1. Система с простейшим входным потоком работает в стационарном режиме. Имеются два прибора с одинаковой средней производительностью – четыре заявки в час. Поступают в час в среднем тоже четыре заявки. Какова вероятность того, что в точности один прибор свободен? Необходимо рассмотреть два случая:
 - данная система с отказами, объём очереди равен нулю,
 - система без отказов, с любым числом заявок в очереди.

Результаты сравнить и объяснить.

- 2. Имеются две системы. У каждой из них по два прибора с одинаковой средней производительностью – три заявки в час. Входные потоки пуассоновские,

со средней интенсивностью – четыре заявки в час. Режим стационарный. Одна из систем – с отказами без очереди, вторая – с неограниченной очередью. Требуется найти вероятность занятости хотя бы одного прибора в каждой системе. Будет ли для обеих систем одинаковый ответ? Объяснить.

- 3. Система с простейшим входным потоком работает в стационарном режиме. Имеются два прибора с одинаковой средней производительностью – одна заявка в минуту. Поступают в минуту в среднем две заявки. Необходимо рассмотреть два случая:

- данная система с отказами, объём очереди равен нулю,
- система с очередью, не превышающей две заявки.

В каждом из этих случаев найти вероятность того, что заявка не получит отказа. Результаты сравнить и объяснить.

- 4. Система с двумя приборами с одинаковой средней производительностью у каждого прибора, равной четырём заявкам в минуту, работает в стационарном режиме. В среднем в минуту поступает в систему три заявки. Очередь не может содержать более двух заявок.

- Каково среднее число заявок в очереди?
- Какова вероятность того, что заявке придется стоять в очереди?

- 5. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности и входным пуассоновским пото-

ком работает в стационарном режиме. Интенсивность входного потока равна двум заявкам в минуту, средняя производительность прибора равна трем заявкам в минуту. Количество заявок в очереди не может быть больше трех. Найти:

- среднее время ожидания в очереди,
 - вероятность занятости обоих приборов.
- 6. Работают две системы в стационарном режиме с пуассоновским входным потоком. В каждой системе имеются два прибора одинаковой средней производительности. Первая система – с отказами, отсутствием очереди; средняя интенсивность входного потока равна одной заявке в час, а средняя производительность каждого прибора – трем заявкам в час. Вторая система – с неограниченной очередью, со средней интенсивностью входного потока, равной трем заявкам в час, и средней производительностью каждого прибора, равной двум заявкам в час. Найти среднее число занятых приборов в каждой из этих систем и выяснить, в какой системе найденное значение больше?
 - 7. Система с двумя приборами, очередью не более чем из двух заявок; работает в стационарном режиме. Средняя интенсивность входного потока равна двум заявкам в час, средняя производительность обслуживания каждого прибора равна двум заявкам в час.
 - Какова вероятность того, что оба прибора свободны?
 - Каково среднее время пребывания заявки в системе?

– Какова средняя длина очереди?

- 8. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной двум заявкам в час, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной одной заявке в час. Количество заявок в очереди не может быть больше двух; режим стационарный. Найти следующие характеристики:

- среднее время ожидания,
- вероятность того, что заявке не придется ждать начала обслуживания.

- 9. Имеются две системы. У каждой из них по два прибора с одинаковой средней производительностью – три заявки в час. Входные потоки пуассоновские, со средней интенсивностью – три заявки в час. Режим стационарный. Одна из систем может иметь очередь, состоящую не более чем из двух заявок, а вторая – с неограниченной очередью. Требуется найти математическое ожидание числа занятых приборов каждой из данных систем. Результаты сравнить и объяснить.

- 10. Система с двумя приборами, имеющими одинаковую среднюю производительность, равную двум заявкам в минуту, и среднюю интенсивность входного пуассоновского потока, равную трем заявкам в минуту, работает в стационарном режиме. Рассмотрим два случая:

- в очереди может находиться не более одной заявки,
- в очереди может находиться не более двух заявок.

Какова вероятность того, что заявка получит отказ? Сравнить ответы в каждом из вариантов, объяснить результаты.

- 11. Имеются две системы, работающие в стационарном режиме. Каждая имеет пуассоновский входной поток со средней интенсивностью, равной двум заявкам в минуту. В каждой системе имеются по два прибора с одинаковой средней производительностью, равной двум заявкам в минуту. В первой системе очередь не может превышать двух заявок, а во второй – объем накопителя равен нулю. Для каждой системы найти вероятность того, что в системе будет не менее двух заявок. Сравнить и объяснить результаты.
- 12. Имеются две системы. У каждой из них по два прибора с одинаковой средней производительностью – три заявки в час. Входные потоки пуассоновские, со средней интенсивностью – четыре заявки в час. Режим стационарный. Одна из систем – с отказами, без очереди, вторая – может иметь в очереди не более двух заявок. Требуется найти среднее время пребывания заявки в каждой системе. Результаты сравнить и объяснить.
- 13. Имеются четыре установки, которые при поломке могут ремонтироваться любой из двух бригад, имеющих одинаковую среднюю производительность, равную двум установкам за неделю. В среднем за шесть недель выходит из строя одна установка. Режим стационарный. Какова вероятность того, что:

– все четыре установки работают,

- вышли из строя ровно три установки.
- 14. Система с двумя приборами одинаковой средней производительности, равной двум заявкам в минуту, с входным пуассоновским потоком со средней интенсивностью, равной одной заявке в минуту. Количество заявок в очереди не может быть больше двух. Режим стационарный. Найти следующие характеристики:
 - вероятность того, что заявке придется ждать начала обслуживания,
 - математическое ожидание числа заявок в системе,
 - среднюю длину очереди.
- 15. Есть четыре станка, которые при поломке могут ремонтироваться любым из двух рабочих, имеющих одинаковую среднюю производительность, равную одному станку за неделю. В среднем за пять недель выходит из строя один станок. Режим стационарный. Какова вероятность того, что:
 - один рабочий свободен,
 - оба рабочих заняты.
- 16. Система с двумя приборами, очередью не более чем из трех заявок; работает в стационарном режиме. Средняя интенсивность входного потока равна одной заявке в час, средняя производительность обслуживания каждого прибора равна тоже одной заявке в час. Найти среднюю длину очереди и среднее число свободных приборов.

Литература

1. *Кузнецова, В. А.* Введение в теорию массового обслуживания: текст лекций / В. А. Кузнецова, Е. В. Никулина; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль : ЯрГУ, 2005. – 60 с.

Учебное издание

Никулина Елена Вячеславовна

Теория массового обслуживания

Практикум

Редактор, корректор Л. Н. Селиванова

Компьютерная верстка А. Е. Никулин

Подписано в печать 15.05.2017. Формат 60×84 1/16.

Усл. печ. л. 2,3. Уч.-изд. л. 1,5.

Тираж 4 экз. Заказ

Оригинал-макет подготовлен
в редакционно-издательском отделе ЯрГУ.

Ярославский государственный университет
им. П. Г. Демидова.

150003, Ярославль, ул. Советская, 14.

