

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

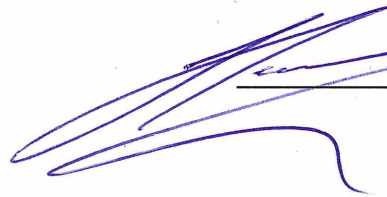
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»
Математический факультет

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

Нестеров П.Н.

«21» октября 2023 г.



ПРОГРАММА ВСТУПИТЕЛЬНОГО ИСПЫТАНИЯ
В АСПИРАНТУРУ

ПО НАУЧНОЙ СПЕЦИАЛЬНОСТИ

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Ярославль 2023

ВОПРОСЫ К ВСТУПИТЕЛЬНОМУ ЭКЗАМЕНУ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И ГЕОМЕТРИЯ

1. Арифметические n -мерные векторы. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
2. Ранг матрицы, теорема Кронеккера-Капелли.
3. Операции над матрицами, их свойства. Обратимость матриц.
4. Определители, их основные свойства. Применение определителей к решению линейных систем, вычислению обратных матриц и вычислению ранга матриц.
5. Векторные пространства. Подпространства. Линейная оболочка системы векторов. Линейная зависимость векторов. Базис и размерность. Преобразование координат. Ранг системы векторов.
6. Линейные отображения векторных пространств; задание их матрицами. Изоморфизмы линейных векторных пространств.
7. Пересечение и сумма подпространств. Прямая сумма.
8. Инвариантные подпространства, собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Достаточные условия диагонализируемости матрицы линейного оператора.
9. Нильпотентные линейные операторы. Корневые векторы. Разложение в прямую сумму корневых подпространств.
10. Линейные формы. Сопряженное векторное пространство, сопряженный базис. Сопряженное линейное преобразование.
11. Билинейные и квадратичные формы, их задание матрицами. Ранг формы. Приведение симметрической билинейной формы к каноническому и нормальному виду.
12. Квадратичные формы над полем действительных чисел. Закон инерции. Положительно определенные формы. Критерий Сильвестра.
13. Евклидовы векторные пространства. Процесс ортогонализации. Ортогональные операторы и ортогональные матрицы. Приведение ортогональной матрицы к каноническому виду. Ортогональные преобразования на плоскости и в 3-мерном евклидовом пространстве.
14. Симметрические линейные операторы, приведение их матриц к диагональному виду. Приведение квадратичной формы в евклидовом пространстве к главным осям.
15. Аффинная и метрическая классификация кривых и поверхностей второго порядка.
16. Эрмитовы формы в комплексном пространстве. Эрмитово (комплексное евклидово) пространство. Унитарные операторы и матрицы.
17. Приведение матрицы линейного оператора к жордановой нормальной форме.

ГРУППЫ

18. Определение, простейшие свойства и примеры.
19. Подгруппы. Разложение группы на смежные классы по подгруппе. Теорема Лагранжа.
20. Нормальные подгруппы. Факторгруппа по нормальной подгруппе.

21. Гомоморфизмы групп, ядро и образ гомоморфизма. Изоморфизмы. Автоморфизмы, внутренние автоморфизмы. Центр группы.
22. Теорема о гомоморфизмах для групп.
23. Вторая теорема об изоморфизмах для групп.
24. Циклическая подгруппа; порядок элемента группы. Циклические группы; их классификация.
25. Произведения групп. Факторизация группы. Первая теорема об изоморфизмах для групп.
26. Полупрямые и прямые произведения групп.
27. Подгруппа, порожденная системой элементов. Система образующих группы. Конечнопорожденные группы.
28. Базис абелевой группы. Свободные абелевы группы.
29. Кручение абелевой группы. Разложение конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму свободной и периодической подгрупп.
30. Примарные абелевы группы. Разложение конечнопорожденной периодической абелевой группы в прямую сумму примарных подгрупп.
31. Разложение конечнопорожденной примарной абелевой группы в прямую сумму циклических подгрупп.
32. Единственность разложения конечнопорожденной абелевой группы в прямую сумму примарных циклических подгрупп.
33. Действие группы на множестве. Орбиты и стационарные подгруппы. Свободные действия. Теорема Кэли. Транзитивные действия.
34. Действия группы на множестве смежных классов. Теорема о транзитивном действии.

КОЛЬЦА И ПОЛЯ

35. Определение, простейшие свойства и примеры колец. Ассоциативные и коммутативные кольца. Подкольцо.
36. Идеал. Главный идеал. Факторкольцо по идеалу.
37. Гомоморфизмы колец, ядро и образ гомоморфизма. Изоморфизмы.
38. Теоремы о гомоморфизмах колец. 2-я теорема об изоморфизмах.
39. Делители нуля в кольце. Кольца без делителей нуля, области целостности. Характеристика кольца с единицей; случай кольца без делителей нуля.
40. Поля и тела; простейшие свойства и примеры. Расширения полей. Поле комплексных чисел и тело кватернионов. Поле частных области целостности.
41. Деление с остатком в кольце целых чисел и кольце многочленов от одной переменной над полем. Евклидовы кольца. Алгоритм Евклида для нахождения наибольшего общего делителя.
42. Неразложимые и простые элементы в области целостности. Факториальные кольца; единственность разложения на простые множители.
43. Кольца главных идеалов, их факториальность.
44. Теорема Гаусса о факториальности кольца многочленов над факториальным кольцом.
45. Факторкольца колец главных идеалов. Расширение поля, связанное с неприводимым многочленом. Поле разложения многочлена, его существование.

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

46. Множества и операции над ними. Отношения и отображения.

47. Эквивалентность, разбиение на классы эквивалентности. Эквивалентность, порожденная отображением.

48. Мощность множества, сравнение мощностей. Конечные и счетные множества, их свойства.

49. Логические связки. Исчисление высказываний. Формулы исчисления высказываний.

50. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств данного множества. Несчетность множества всех действительных чисел.

51. Предикаты и кванторы. Исчисление предикатов. Формулы исчисления предикатов. Тавтологически истинные формулы.

Список литературы, рекомендуемой для подготовки к экзамену

1. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. М.: Наука, 1977.
3. Ленг С. Алгебра. М.: Мир, 1968.
4. Ершов Ю.Л., Палютин Е.А. Математическая логика. М.: Наука, 1987.
5. Новиков П.С. Элементы математической логики. М.: Наука, 1973.

Ресурсы сети Интернет

1. Судоплатов, С. В. Математическая логика и теория алгоритмов : учебник и практикум для вузов / С. В. Судоплатов, Е. В. Овчинникова. — 5-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 207 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12274-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/510826>.

2. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля : учебное пособие для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 160 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05567-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515448>

3. Кашапова, Ф. Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебное пособие для вузов / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2023. — 128 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09499-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/515091>

Программа утверждена на заседании кафедры алгебры и математической логики
«19» октября 2023 года (протокол № 2).

Заведующий кафедрой _____ Тимофеева Н.В.

Приложение 1
Образцы билетов вступительного экзамена

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Математический факультет

Вступительный экзамен по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Билет № 1

1. Линейные формы. Сопряженное векторное пространство, сопряженный базис. Сопряженное линейное преобразование.
2. Определение, простейшие свойства и примеры колец. Ассоциативные и коммутативные кольца. Подкольцо.

Декан математического факультета _____ Нестеров П.Н.

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова
Математический факультет

Вступительный экзамен по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Билет № 2

1. Теорема Кантора о мощности множества всех подмножеств данного множества. Несчетность множества всех действительных чисел.
2. Подгруппа, порожденная системой элементов. Система образующих группы. Конечнопорожденные группы.

Декан математического факультета _____ Нестеров П.Н.

Приложение 2
Критерии оценки результатов сдачи вступительного экзамена

Ответ на теоретический вопрос

Высокий уровень: продемонстрированы полные и системные знания по всем вопросам билета; допускается одна незначительная неточность в изложении материала.

Хороший уровень: требования в целом аналогичные высокому уровню, однако допускается несколько незначительных неточностей.

Удовлетворительный уровень: продемонстрировано относительно полное знание теоретических положений; допускаются неточности формулировок и/или неполнота аргументации – при общем верном направлении изложения материала.

Неудовлетворительный уровень: ответа нет; материал изложен не по конкретной теме вопроса; не продемонстрировано знание теоретических положений; допущены грубые ошибки в изложении материала.

Дополнительные структурные и количественные показатели

Показатели	Критерии
Понимание вопроса	<ul style="list-style-type: none">• Ответ наличествует• Ответ по существу вопроса без отвлечения на посторонние/второстепенные детали
Содержание ответа	<ul style="list-style-type: none">• Продемонстрированы полные и системные знания по вопросу• Продемонстрированы навыки математического мышления в постановке проблем и поиске алгоритмов их решения
Обоснованность и полнота ответа	<ul style="list-style-type: none">• Раскрыты все необходимые компоненты вопроса• Сделаны все необходимые выводы по вопросу• Выводы обоснованы
Изложение ответа	<ul style="list-style-type: none">• Владение навыками грамотной устной/письменной речи• Владение специальной математической\профессиональной терминологией

Шкала оценивания: 0 баллов – полное отсутствие критерия; 1 балл – частичное выполнение критерия; 2 балла – полное выполнение критерия

Оценка проставляется по количеству набранных баллов:

- менее 60 % от максимально возможного количества баллов – «0-3,75 баллов»,
- 60-75 % от максимально возможного количества баллов, из них не менее 2 баллов за содержание ответа – «4-5,75 баллов»,
- 76-85 % от максимально возможного количества баллов, из них не менее 4 баллов за содержание ответа – «6-7,75 баллов»,
- 86-100 % от максимально возможного количества баллов, из них не менее 5 баллов за содержание – «8-10 баллов».