

**МИНОБРНАУКИ РОССИИ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**«Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова»**

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

  
П. Н. Нестеров

« 18 » мая 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**

«Теория алгебраических структур»

программы подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре

по научной специальности

1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика

Форма обучения очная

Программа одобрена  
на заседании кафедры алгебры и математической логики  
от « 17 » мая 2022 года, протокол № 9

Ярославль

### **1. Цели освоения дисциплины**

Целью изучения дисциплины «Теория алгебраических структур» является освоение основных алгебраических структур, применяемых в различных развитых математических теориях и их приложениях

### **2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры**

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору. Данная дисциплина направлена на освоение теории алгебраических структур и основных конструкций, применяемых в алгебре и ее приложениях.

### **3. Планируемые результаты освоения дисциплины: -**

В результате освоения дисциплины аспирант должен:

Знать:

основные алгебраические структуры: группы, кольца, модули, многочлены, группы и алгебры Ли, булевы кольца. Методы изучения групп и алгебр, идеалы, нормальные подгруппы, эндоморфизмы и гомоморфизмы, конструкции некоторых структур, теорему Веддерберна и лемму Шура.

Уметь:

использовать строение соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные объекты из более простых.

Владеть:

навыками анализа и вычислений в алгебраических структурах. Применением основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и произведений

#### 4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости  Форма промежуточной аттестации
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1.	Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции.	2	1				10	
2	Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.	2	3				11	
3.	Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции.	2	3				11	
4	Модули. Прямые суммы и свободные модули. Тензорное произведение. Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.	2	3				11	
5	Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом.	2	3				11	
6	Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов	2	3				11	Задания для самостоятельной работы

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости
	идеалов. Группа Брауэра.							
7	Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.	2	2				11	
						2	12	Зачет
	<b>Всего 108 час.</b>		<b>18</b>			<b>2</b>	<b>88</b>	

### Содержание разделов дисциплины:

1. Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции
2. Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.
3. Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции
4. Модули. Прямые суммы и свободные модули. Тензорное произведение. Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.
5. Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом
6. Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов идеалов. Группа Брауэра
7. Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.

### 5. Образовательные технологии, в том числе технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

В процессе обучения используются следующие образовательные технологии:

**Вводная лекция** – дает первое целостное представление о дисциплине и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции

высказываются методические и организационные особенности работы в рамках данной дисциплины, а также дается анализ рекомендуемой литературы.

**Академическая лекция с элементами лекции-беседы** – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Элементы лекции-беседы обеспечивают контакт преподавателя с аудиторией, что позволяет привлекать внимание аспирантов к наиболее важным темам дисциплины, активно вовлекать их в учебный процесс, контролировать темп изложения учебного материала в зависимости от уровня его восприятия.

**Консультации** – вид учебных занятий, являющийся одной из форм контроля самостоятельной работы аспирантов. На консультациях по просьбе аспирантов рассматриваются наиболее сложные разделы дисциплины, преподаватель отвечает на вопросы аспирантов, которые возникают у них в процессе самостоятельной работы.

В процессе обучения используются технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии:

## **6. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» (при необходимости), рекомендуемых для освоения дисциплины**

### **а) основная литература**

1. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.

### **б) дополнительная литература**

4. Гэри М, Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982..
5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
7. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009
10. Владимиров Д.А., Булевы алгебры. М., Наука, 1969

### **в) ресурсы сети «Интернет» (при необходимости)**

Автоматизированная библиотечно-информационная система «БУКИ-NEXT»  
[http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk\\_cat\\_find.php](http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php)

## **7. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине**

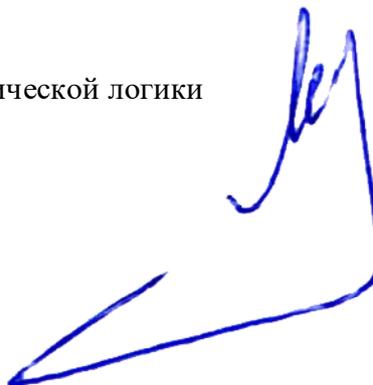
Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав следующие помещения:

- учебные аудитории для проведения лекций;
- учебные аудитории для проведения групповых и индивидуальных консультаций,
- учебные аудитории для проведения промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы.

Помещения для самостоятельной работы оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду ЯрГУ.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики  
доктор физико-математических наук

A handwritten signature in blue ink, consisting of several loops and a long horizontal stroke at the bottom.

Л.С. Казарин

**Приложение №1 к рабочей программе дисциплины**  
**«Теория алгебраических структур»**  
по научной специальности 1.1.5 Математическая логика, алгебра, теория чисел и  
дискретная математика

**Оценочные материалы**  
**для проведения текущей и/или промежуточной аттестации**  
**аспирантов по дисциплине**

**1. Контрольные задания и (или) иные материалы,**  
**используемые в процессе текущего контроля успеваемости**

**Задания для самостоятельной работы**

1. Гомоморфизмы групп и колец. Идеалы и нормальные подгруппы. Классы вычетов. Построение полей небольшого порядка.
2. Евклидовы кольца. Норма элемента. Разложимые и неприводимые элементы кольца. Булевы кольца. Суммы колец.
3. Расширение поля. Построения с помощью циркуля и линейки. Общее уравнение  $n$ -ой степени. Группа Галуа и ее вычисление.
4. Модули и абелевы группы. Основная теорема об абелевых группах. Представления и модули представлений. Тензорные произведения модулей. Кронекерово произведение матриц.
5. Алгебры. Примеры алгебр. Алгебры Ли, групповые алгебры, алгебра Клиффорда. Алгебры как группы с операторами.
6. Простые и примитивные кольца. Структурные теоремы о полупростых и простых кольцах. Теорема Веддерберна о простых алгебрах с единицей.
7. Лемма Шура и Теорема Машке. Основные теоремы о характерах конечных групп.
8. Комплексные полупростые алгебры Ли. Нильпотентная и разрешимая алгебры Ли. Картаново разложение. Группа Вейля. Типы комплексных простых алгебр Ли.

**2. Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации**

Зачет по дисциплине проводится устно по билетам. Каждый билет содержит один теоретический вопрос и одну задачу.

**Список вопросов к зачету:**

**Список теоретических вопросов:**

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы  $A_n$ ,  $n \geq 5$  и  $SO_3$ .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа .
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы .
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности .
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса .
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

### Задания для зачета

1. Доказать, что группа порядка 15 циклическая.
2. Показать, что неразрешимая группа наименьшего порядка будет иметь порядок 60.
3. Доказать, что число элементов конечного поля – степень его характеристики.
4. В каком случае поле  $GF(p^m)$  содержит подполе, изоморфное  $GF(p^n)$ ?
5. Доказать теорему о строении конечнопорожденных абелевых групп.
6. Предложить алгоритм нахождения примитивного элемента в конечном поле, заданном вычетами по модулю неприводимого многочлена  $g(x)$ .
7. Какова группа Галуа уравнения  $x^4+2x^2+x+3=0$ ?
8. Доказать, что полное матричное кольцо  $P_n$  является центральной простой алгеброй над полем  $P$ .
9. Доказать, что если многообразие  $M$  содержится в объединении многообразий  $M_1$  и  $M_2$ , то  $M$  содержится в  $M_1$  или  $M_2$ .
10. Является ли идеал  $(x_1 x_1 - x_2^2, x_2 x_3 - x_1^3, x_3^2 - x_1^2 x_2)$  кольца  $K[x_1, x_2, x_3]$  простым?
11. Как устроена простая алгебра без единицы?
12. В любом подмножестве  $M$  кольца  $S = R[x_1, x_2, \dots, x_m]$  с коэффициентами в поле  $R$  существует такой конечный набор элементов  $m_1, m_2, \dots, m_r$ , что любой элемент  $S$  представим в виде линейной комбинации элементов  $m_1, m_2, \dots, m_r$  с коэффициентами из  $S$ .
13. Пусть  $L$ —алгебра Ли и  $X$  – элемент из  $L$ . Покажите, что  $\text{ad } X$  – дифференцирование алгебры  $L$ .
14. Пусть  $L$ —алгебра Ли и  $H, K$  – ее нильпотентные идеалы. Доказать, что  $H+K$  – нильпотентный идеал  $L$ .
15. Показать, что по таблице неприводимых комплексных характеров конечной группы можно определить порядки классов сопряженных элементов группы, порядок центра и коммутанта группы.
16. Будет ли решетка нормальных подгрупп группы модулярной?
17. Построить полную решетку разбиений множества из четырех элементов.
18. Если группа  $G$  порождается конечным множеством  $X$ , то в любом ее порождающем множестве имеется конечное подмножество, также порождающее  $G$ .

19. Доказать, что все идеалы групповой алгебры бесконечной циклической группы главные.

## 2.1 Описание процедуры выставления оценки

По итогам экзамена выставляется одна из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно» или «неудовлетворительно».

**Оценка «Отлично»** выставляется аспиранту, который демонстрирует глубокое и полное владение содержанием материала и понятийным аппаратом дисциплины; осуществляет межпредметные связи; умеет связывать теорию с практикой. Аспирант дает развернутые, полные и четкие ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, соблюдает логическую последовательность при изложении материала. Грамотно использует научную терминологию.

**Оценка «Хорошо»** выставляется аспиранту, ответ которого на экзамене в целом соответствуют указанным выше критериям, но отличается меньшей обстоятельностью, глубиной, обоснованностью и полнотой. В ответе имеют место отдельные неточности (несущественные ошибки), которые исправляются аспирантом после дополнительных и (или) уточняющих вопросов экзаменатора.

**Оценка «Удовлетворительно»** выставляется аспиранту, который дает недостаточно полные и последовательные ответы на вопросы экзаменационного билета и дополнительные вопросы, но при этом демонстрирует умение выделить существенные и несущественные признаки и установить причинно-следственные связи. При ответах аспирант допускает ошибки в определении и раскрытии отдельных понятий, формулировке положений, которые аспирант затрудняется исправить самостоятельно. При аргументации ответа аспирант не обосновывает свои суждения. На часть дополнительных вопросов студент затрудняется дать ответ или дает неверные ответы.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется аспиранту, который демонстрирует разрозненные, бессистемные знания; беспорядочно и неуверенно излагает материал; не умеет выделять главное и второстепенное, не умеет соединять теоретические положения с практикой, не устанавливает межпредметные связи; допускает грубые ошибки при определении сущности раскрываемых понятий, явлений, вследствие непонимания их существенных и несущественных признаков и связей; дает неполные ответы, логика и последовательность изложения которых имеют существенные и принципиальные нарушения, в ответах отсутствуют выводы. Дополнительные и уточняющие вопросы экзаменатора не приводят к коррекции ответов аспиранта.

**Оценка «Неудовлетворительно»** выставляется также аспиранту, который взял экзаменационный билет, но отвечать отказался.

