МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

_____________ П.Н.Нестеров

«18» мая 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
«Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания»

Направление подготовки
01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль)
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры математического моделирования
от «13» апреля 2021 года, протокол № 8

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания» является

- формирование представления об асимптотических методах исследования нелинейных динамических систем;
- ознакомление аспирантов с важнейшими направлениями развития теории бифуркаций;
- формирование представления о методах исследования нелинейных динамических систем с хаотическим поведением;
- формирование способности к восприятию новых научных фактов и гипотез и использованию полученных знаний в процессе образования.

Для достижения поставленной цели предусматривается решение следующих воспитательных, образовательных, а также развивающих практические навыки задач:

- дать знания о современных асимптотических методах нелинейной динамики;
- ознакомить слушателей с последними достижениями математического моделирования и нелинейной динамики;
- мотивировать интерес к наблюдению, анализу и обсуждению актуальных проблем нелинейной динамики;
- стимулировать самостоятельную аналитическую работу аспирантов.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания» является дисциплиной по выбору вариативной части. Данная дисциплина направлена на формирование мировоззрения и развитие математического мышления, а также дальнейшее развитие навыков научно-исследовательской деятельности. Предполагаемое данным курсом освещение центральных тем, базовых понятий и методов современного математического моделирования закладывает основы для более детального изучения и понимания широкого круга специальных вопросов в рамках профильной подготовки по дисциплинам вариативной части профессионального цикла.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы аспирантуры, и критерии их оценивания

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Профессиональные компетенции:

-способностью самостоятельно исследовать свойства и создавать алгоритмы численных решений задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики (ПК-2)

Код компетенции	Формулировка компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-2	способностью самостоятельно исследовать свойства и создавать алгоритмы численных решений задач для обыкновенных дифференциальных	**Знать:** – понятие ляпуновских экспонент и ляпуновской размерности аттракторов динамических систем, – понятие корреляционного интеграла и корреляционной

	уравнений и уравнений математической физики	размерности, – понятие информационной размерности. **Уметь:** – численно определять ляпуновскую размерность простейших динамических систем с хаотическим поведением **Владеть:** – навыками методологически грамотного осмысления конкретно-научных проблем.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов

Дисциплина изучается в течение второго семестра. Формой итоговой промежуточной аттестации по дисциплине является зачет.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу аспирантов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Раздел 1. Релаксационные автоколебания в системах с одним запаздыванием	2	2					16	Самостоятельная работа
2.	Раздел 2. Релаксационные автоколебания в случае двух запаздываний	2	4					20	Самостоятельная работа
3.	Раздел 3. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с	2	6					20	Контрольная работа

	запаздыванием								
4.	Раздел 4. Сингулярно возмущенные уравнения, моделирующие химических синаптические связи	6	6					24	Самостоятельная работа
							0.3	7.7	**Зачет**
	Всего		**18**			**2**	**0.3**	**87.7**	

Содержание разделов дисциплины:

Раздел 1. Релаксационные автоколебания в системах с одним запаздыванием

1. Асимптотический анализ одного уравнения
2. Существование и устойчивость периодического решения
3. Асимптотика периода решения.
4. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов
5. Обоснование C и C^1-сходимости
6. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов
7. Предельное отображение для цепочки диффузионно связанных релаксационных осцилляторов

Раздел 2. Релаксационные автоколебания в случае двух запаздываний

1. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах
2. Доказательство существования и устойчивости bursting-цикла
3. Дискретные автоволны в системах релаксационных однонаправленно связанных осцилляторов
4. Буферность в нейронных системах
5. Исследование задачи методом квазинормальных форм

Раздел 3. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием

1. Релаксационные колебания в модели отдельного нейрона Хопфилда
2. Существование и устойчивость периодического решения
3. Релаксационные автоколебания в кольцевой сети Хопфилда

Раздел 4. Сингулярно возмущенные уравнения, моделирующие химические синаптические связи

1. Сингулярно возмущенные уравнения, моделирующие химические синаптические связи.
2. Существование и устойчивость периодического решения вспомогательного уравнения
3. Построение решений системы однонаправленно синаптически связанных осцилляторов в виде дискретных автоволн

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная

информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.
- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.
- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

-- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ -- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ - NEXT" (АБИС "БУКИ - NEXT""БУКИ - NEXT").

-- для работы с алгебраическими структурами используется система алгоритмов GAP, имеющаяся в свободном доступе в Интернете.

1. **Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины**

а) основная:

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Метод квазинормальных форм: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 106 с.

2. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления [Электронный ресурс] / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. — Электрон. текстовые данные. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. — 716 c. — 978-5-4344-0299-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69361.html
3. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 2. Приложения [Электронный ресурс] / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. — Электрон. текстовые данные. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. — 700 c. — 978-5-4344-0301-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69362.html

б) дополнительная:

1. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики. / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: УРСС, 2002.
2. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Релаксационные автоколебания в нейронных системах: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 220 с.
3. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. М.: Наука. 1978.
4. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
5. Шильников, Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. Глызин, С.Д. Численные методы анализа динамических систем: учеб. пособие / С.Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
7. Глызин, С.Д. Асимптотические методы нелинейной динамики: учебное пособие / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006.
8. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х.Розов. – М.: Наука, 1975. 248 с.
9. Мищенко, Е. Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. / Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х.Розов. – М.: Наука, 1995.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: http://www.lib.uniyar.ac.ru/
3. http://mech.math.msu.su/department/

(**http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php**).

4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://www.edu.ru раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (http://www.edu.ru/library).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" (www.biblioclub.ru).
6. http:// www.tc26.ru
7. http:// www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061
6. http://habrahabr.ru/post/210684/

8. http://www.nist.gov/customcf/get pdf.cfm?pub id=919061
9. http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po issledovaniyu-khesh-funksii-stribog/

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Аудитории, оборудованные для проведения лекций, практических занятий и консультаций, фонд библиотеки, компьютерная техника

Автор(ы) :

Зав. кафедрой компьютерных сетей, д.ф.-м.н., профессор С.Д. Глызин

Приложение к №1 рабочей программе дисциплины «Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания»

**Оценочные средства
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов
по дисциплине**

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету:

1. Релаксационные автоколебания в системах с одним запаздыванием
2. Асимптотический анализ одного уравнения
3. Существование и устойчивость периодического решения
4. Асимптотика периода решения.
5. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов
6. Обоснование \$C\$ и \$C^1\$-сходимости
7. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов
8. Предельное отображение для цепочки диффузионно связанных релаксационных осцилляторов
9. Релаксационные автоколебания в случае двух запаздываний
10. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах
11. Доказательство существования и устойчивости bursting-цикла
12. Дискретные автоволны в системах релаксационных однонаправленно связанных осцилляторов
13. Буферность в нейронных системах
14. Исследование задачи методом квазинормальных форм
15. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием
16. Релаксационные колебания в модели отдельного нейрона Хопфилда
17. Существование и устойчивость периодического решения
18. Релаксационные автоколебания в кольцевой сети Хопфилда
19. Сингулярно возмущенные уравнения, моделирующие химические синаптические связи
20. Существование и устойчивость периодического решения вспомогательного уравнения
21. Построение решений системы однонаправленно синаптически связанных осцилляторов в виде дискретных автоволн.

1.2 Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

Задания для самостоятельной работы

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
1	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = -x + yz$ $\dot{z} = 1 - y^2$	Отсутствуют	$0.014,$ $0,$ -0.014	3.000
2	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - xy$	$(1, 1, 0),$ $(-1, -1, 0)$	$0.210,$ $0,$ -1.210	2.174
3	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - x^2$	$(1, 1, 0),$ $(-1, -1, 0)$	$0.163,$ $0,$ -1.163	2.140
4	$\dot{x} = -y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xz + 3y^2$	(0,0,0)	$0.103,$ $0,$ -1.320	2.078
5	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - 4x$	(0.25,0.063,0)	$0.078,$ $0,$ -1.078	2.072
6	$\dot{x} = y + z$ $\dot{y} = -x + 0.5y$ $\dot{z} = x^2 - z$	$(0, 0, 0),$ $(-2, -4, -4)$	$0.117,$ $0,$ -0.617	2.190
7	$\dot{x} = 0.4x + z$ $\dot{y} = xz - y$ $\dot{z} = -x + y$	$(0, 0, 0),$ $(-2.5, -2.5, 1)$	$0.034,$ $0,$ -0.634	2.054
8	$\dot{x} = -y + z^2$ $\dot{y} = x + 0.5y$ $\dot{z} = x - z$	$(0, 0, 0),$ $(-2, -4, -2)$	$0.117,$ $0,$ -0.617	2.190
9	$\dot{x} = -0.2y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = x - z + y^2$	(0,0,0)	$0.012,$ $0,$ -1.012	2.012

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
10	$\dot{x} = -2z$ $\dot{y} = -2y + z$ $\dot{z} = -x + y + y^2$	(0,0,0)	0.076, 0, -1.076	2.037
11	$\dot{x} = xy - z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = x + 0.3z$	$(0, 0, 0)$, $\frac{1}{9}(30, 30, 100)$	0.038, 0, -0.890	2.042
12	$\dot{x} = y + 3.9z$ $\dot{y} = 0.9x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - x$	(1,0.9,-0.231)	0.061, 0, -1.061	2.057
13	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = -x^2 - y$ $\dot{z} = 1.7(1 + x) +$ $+y$	$(2.406, -5.791, 0)$, $(-0.706, -0.5, 0)$	0.044, 0, -1.044	2.042
14	$\dot{x} = -2y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + y - 2z$	(-0.25,0,0.5)	0.076, 0, -2.076	2.037
15	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = x - z$ $\dot{z} = x + xz + 2.7y$	$(0, 0, 0)$, $(-1, 0, -1)$	0.049, 0, -0.319	2.154
16	$\dot{x} = 2.7y + z$ $\dot{y} = -x + y^2$ $\dot{z} = x + y$	$(0, 0, 0)$, $(1, -1, 2.7)$	0.087, 0, -0.481	2.181
17	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 3.1x + y^2$ $+0.5z$	$(0, 0, 0)$, $(-3.1, -3.1, 0)$	0.109, 0, -0.609	2.179
18	$\dot{x} = 0.9 - y$ $\dot{y} = 0.4 + z$ $\dot{z} = xy - z$	$(-\frac{4}{9}, 0.9, -0.4)$	0.062, 0, -1.062	2.058
19	$\dot{x} = -x - 4y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + x$	$(-1, 1/4, 1)$, $(-1, 1/4, -1)$	0.188, 0, -1.188	2.151

Критерии оценивания самостоятельной работы

«Отлично» (5 баллов) – ставится за работу, выполненную полностью без ошибок и недочетов. «Хорошо» (4 балла) – ставится за работу, выполненную полностью, но при наличии в ней не более одной ошибки и одного недочета, или не более трех недочетов. «Удовлетворительно» (3 балла) – ставится за работу, если обучающийся правильно выполнил не менее 2/3 всей работы. «Неудовлетворительно» (0 баллов) – ставится за работу, если число ошибок и недочетов превысило норму для оценки «3» или правильно выполнено менее 2/3 всей работы.

Типовые индивидуальные задания

5.2.1. Модель тепловой конвекции. При изучении Фурье-разложений решений классического уравнения Навье-Стокса Лоренц [28] получил систему вида

$$\begin{aligned} X' &= \alpha(Y - X), \\ Y' &= rX - Y - XZ, \\ Z' &= -bZ + XY, \end{aligned} \tag{5.1}$$

Исследуйте систему Лоренца при

a) $a = 10, r = 5$, изменяя b от 0 до 9;

b) $a = 10, r = 20$, изменяя b от 0 до 12;

c) a $= 10, b = 8/3$, изменяя r от 166 до 167 (проверьте, что при $r = 166$ имеют место устойчивые периодические движения, а при $r = 166.1$ хаотические колебания).

5.2.2. Модель Мариока-Шимицу тепловой конвекции при больших числах Рейнольдса. Эта модель была предложена как альтернативная модели Лоренца (см. [23]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= X - \lambda Y - XZ, \\ Z' &= -aZ + X^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Проанализируйте систему (5.2) при

a) $a = 10$, изменяя λ, от 0 до 9;

b) $a = 10$, $0.5 < \lambda < 0.6$ (убедитесь, что при $\lambda = 0.547, 0.553, 0.555$ происходят бифуркации удвоения периода).

5.2.3. Модель тепловой конвекции Мура и Шпигеля (см. [18, с. 77-79]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= Z - (1 - \delta)Z, \\ Z' &= -\rho Z + (1 - \delta Z^2)Y. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Изучите сложные колебания системы (5.3) при

a) $\delta = 10,\ \rho > 100$;

b) $\delta = 10,\ \rho > 50$.

Следующие две системы возникают при исследовании нелинейных параболических систем типа реакция-диффузия, родственных уравнению Навье-Стокса.

5.2.4. Двухкомпонентная модель уравнения Курамото-Цудзуки (см. [3]).

$$\begin{array}{rcl}\dot{\xi} & = & 2\xi - 2\xi(\xi+\eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_1\sin\theta),\\ \dot{\eta} & = & 2\eta - 2\eta(2\xi + 0.75\eta) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2\eta,\\ \dot{\theta} & = & c_2(2\xi - 0.5\eta) + (2\xi+\eta)\sin\theta + c_2(2\xi-\eta)\cos\theta + 2c_1k^2.\end{array} \qquad (5.4)$$

Параметры k, c_1, c_2 выбираются равными:

a) $k = c_1 = 1, c_2 = -3.15, -4, -4.05$ (убедитесь, что при этих значениях параметров происходят бифуркации удвоения периода и исследуйте хаотические колебания при $c_2 = 4, 7$);

b) $k = 1, c_1 = 5,\ \ -2 > c_2 > -8$ (найдите значение параметра c_2, при котором происходит первая бифуркация удвоения периода).

5.2.5. Фазовая модель системы n слабо связанных осцилляторов (см. [12]).

$$\begin{array}{c}\dot{\alpha}_j = 2\sin\alpha_j - \sin\alpha_{j-1} - \sin\alpha_{j+1} + \varkappa(\cos\alpha_{j-1} + \cos\alpha_{j+1}),\\ j = 1, 2, \ldots, n-1.\end{array} \qquad (5.5)$$

Исследуйте систему (5.5) в случаях различных граничных условий:

a) $\alpha_0 = \alpha_n = 0, n = 3, 4, \varkappa = 3$;

b) $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1},\ n = 3, \varkappa = 3$.

5.3.1. Модель Дуффинга изогнутого стержня (иногда называемая уравнением Холмса [22]).

$$\begin{array}{rcl}X' & = & Y,\\ Y' & = & -\delta Y + X(1 - X^2)/2 + f\cos Z,\\ Z' & = & \omega.\end{array} \qquad (5.6)$$

Варианты параметров для численного исследования:

a) $f = 0.15, \delta = 0.05, 0 < \omega < 1.2$;

b) $f = 0.4, \delta = 0.2, 0 < \omega < 1.2$;

c) $\delta = 0.15, \omega = 0.8, 0.1 < f < 0.3$;

d) $\delta = 0.15, \omega = 0.3, 0.2 < f < 0.6$.

Изменяя бифуркационный параметр ω в первых двух вариантах и f в остальных, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.6).

5.3.2. Колебания с провалами арки на шарнирах под воздействием гармонической внешней силы (ферма Мизеса, см. [10, с. 237]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y + k\left(1 - \sqrt{b^2 + X^2}\right)X + f\cos Z, \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Варианты параметров для численного исследования:
a) $\delta = 0.1, k = 1, b = 2, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
b) $\delta = 0.1, k = 1, b = 1.5, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
c) $\delta = 0.15, k = 1, b = 2, \omega = 0.8\ 0.1 < f < 0.3$.
Изменяя бифуркационные параметры ω или f, найти такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследовать хаотический режим системы (5.7).

5.3.3. Маятник с колеблющейся точкой подвеса (см. [6]).

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + \mathrm{A}\cos\omega t)\sin\theta = 0. \tag{5.8}$$

Для получения колебаний сложной структуры необходимо выбрать параметры β, A, ω так, чтобы A и ω были велики, а β мало, причем $A \simeq (\beta)^{0.5}$, $\omega \simeq 1/\beta$.
Варианты заданий:
a) зафиксировав $\beta = 0.01$ и $\omega = 30$ и изменяя А от 5 до 10, добейтесь устойчивости верхнего состояния равновесия маятника $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$;
b) при $\beta = 0.1$ и $\omega = 40$ найдите значения А, при которых решения уравнения (5.8) изменяются неупорядоченно, и исследуйте такие решения численно.

5.3.4. Модель динамики изогнутого стержня с двумя степенями свободы (см. [22]).

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \gamma\dot{X} - 0.5(1 - X^2)X + \beta XY^2 &= f\,, \\ \ddot{Y} + \delta\dot{Y} + \alpha(1 + \varepsilon Y^2)Y + \beta YX^2 &= f_0 + f_1\cos\omega t\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Зафиксируйте $\gamma = \delta = 0.1, \alpha = 2, \epsilon = 0.05, \beta = 1, f_0 = f_1 = 0.2$ и, изменяя параметры f_1 и ω так, что

a) $f_1 = 0.4, 0 < \omega < 1.2$ или

b) $\omega = 0.8, 0.2 < f_1 < 2$

найдите такие их значения, при которых решения (5.9) ведут себя неупорядоченным образом. Исследуйте полученные решения по изложенной схеме.

5.3.5. Модель диффузионного взаимодействия двух одинаковых нелинейных осцилляторов [7].

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= d\xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d\cos(\delta) - \xi_1^2)\xi_1, \\
\dot{\xi}_2 &= d\xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d\cos(\delta) - \xi_2^2)\xi_2, \\
\dot{\alpha} &= -d\left[\frac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha + \delta) + \frac{\xi_1}{\xi_2}\sin(\alpha - \delta)\right] + b(\xi_1^2 - \xi_2^2).
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Здесь ξ_1, ξ_2 амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов соответственно, α разность фаз между ними.

Изучите перестройки фазового портрета системы (5.10), фиксируя $\delta = -\pi/3, b = 10$ и увеличивая параметр d

a) от 1.45 до 1.459;

b) от 1.5 до 1.5075;

проследите за бифуркациями удвоения периода, происходящими с системой (5.10).

При значении параметра $d = 1.7$ изучите числовые размерностные характеристики хаотического аттрактора системы (5.10).

Критерии оценок для индивидуального задания

Оценка	Критерии
Отлично	Выполненная работа полностью соответствует поставленному заданию. Работа выполнена на высоком теоретическом и практическом уровне. Обучающийся свободно ориентируется в материале и отвечает без затруднений на вопросы по теме задания. Студент проявляет инициативу, навыки работы в коллективе и организационные способности. Способен к выполнению сложных заданий, постановке целей и выборе путей их реализации.
Хорошо	Выполненная работа полностью соответствует поставленному заданию, возможны небольшие неточности не влияющие на решение задачи в целом.. Работа выполнена на достаточно высоком теоретическом и практическом уровне. Обучающийся относительно полно ориентируется в материале и отвечает без затруднений на вопросы по теме задания. Допускает незначительное количество ошибок. Далеко не всегда проявляет инициативу. Способен к выполнению сложных заданий
Удовлетворительно	Уровень недостаточно высок. Допускаются ошибки и затруднения при изложении материала. Выполнена большая часть требований задания.

Неудовлетворительно	Требования поставленной задачи практически не выполнены. При контроле студент допускает значительные ошибки, обнаруживает лишь начальную степень ориентации в материале. Не работал в коллективе. Большая часть работы не выполнена.

Задания для контрольной работы

5.4.2. Модель вынужденных хаотических колебаний в цепи с нелинейной индуктивностью (уравнение Дуффинга-Уэды [22]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -kY - X^3 + B\cos Z, \\ Z' &= 1. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Исследуйте систему (5.11) при

a) $k = 0.25, 5 < \mathrm{B} < 15$;

b) $k = 0.05, 4 < \mathrm{B} < 15$;

c) $b = 12, 0.05 < k < 0.2$.

Изменяя бифуркационные параметры B или k, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.11).

5.4.3. Модель генератора колебаний с отрицательным сопротивлением (модифицированное уравнение Дуффинга-Ван-дер-Поля [22]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= k(1 - Y^2)Y - X^3 + B\cos Z. \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Исследуйте систему (5.12) при

a) $k = 1, \omega = 1, 1 < B < 10$;

b) $k = 0.5, B = 10, 0.5 < \omega =< 1.5$.

Изменяя бифуркационные параметры B или k, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.12).

5.4.1. Модельные электронные схемы Спротта (см. [34])

Таблица 2

№	Система	Начальные условия $(x, \dot{x}, \ddot{x})$	Ляпуновские экспоненты
1	$\dddot{x} = -2.017\ddot{x} \pm \dot{x}^2 - x$	$(0, 0, \pm 1)$	$0.055, 0, -2.072$
2	$\dddot{x} = -2.8\dot{x} \pm x + x^2$	$(\pm 0.5, -1, 1)$	$0.002, 0, -0.002$
3	$\dddot{x} = -0.44\ddot{x} - 2\dot{x} \pm (x^2 - 1)$	$(0, 0, 0)$	$0.105, 0, -0.545$
4	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} \pm x \pm x^2$	$(0, \pm 1, 0)$	$0.094, 0, -0.594$
5	$\dddot{x} = -2\dot{x} \pm (\lvert x \rvert - 1)$	$\pm(-1, -1, 1)$	$0.003, 0, -0.003$
6	$\dddot{x} = -0.6\ddot{x} - \dot{x} \pm (\lvert x \rvert - 1)$	$(0, 0, 0)$	$0.036, 0, -0.636$
7	$\dddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - D(x) + 1$	$(0, 0, 0)$	$0.042, 0, -0.342$
8	$\dddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - R(x) - 1$	$(0, 0, 0)$	$0.042, 0, -0.342$
9	$\dddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - D(x) + 1)$	$\pm(0, -0.5, 0.5)$	$0.003, 0, -0.003$
10	$\dddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - R(x) - 1)$	$\pm(0, 0.5, -0.5)$	$0.003, 0, -0.003$
11	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} - x + \operatorname{sgn}(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.152, 0, -0.652$
12	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} + x - \operatorname{sgn}(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.601, 0, -1.101$
13	$\dddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} - x + H(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.085, 0, -0.785$
14	$\dddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} - x + 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.072.0, -0.472$
15	$\dddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} + x - 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.091, 0, -0.491$
16	$\dddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} - x + 2\tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.128, 0, -0.318$
17	$\dddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} + x - 2\tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.067, 0, -0.257$
18	$\dddot{x} = -3.7\dot{x} \pm (x - x^3)$	$(0, \pm 0.5, 1)$	$0.002, 0, -0.002$
19	$\dddot{x} = -0.6\ddot{x} + 2.8\dot{x} - \dot{x}^3 - x$	$(0, 1, 0)$	$0.034, 0, -0.634$
20	$\dddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} + x - x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.138, 0, -0.838$
21	$\dddot{x} = -0.35\ddot{x} - \dot{x} - x + x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.082, 0, -0.432$
22	$\dddot{x} = -0.2\ddot{x} - \dot{x} \pm \sin(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.123, 0, -0.323$

Принимая $D(x) = \min(x, 0)$, $R(x) = \max(x, 0)$, $H(x) = (\operatorname{sgn}(x) + 1)/2$, $S(x)$ $\operatorname{sgn}(x)\min(\lvert x \rvert, 1)$, определите числовые характеристики хаотических режимов соответствующих систем, постройте сечение Пуанкаре, убедитесь в его фрактальной структуре.

Выполните указанное задание для

a) $G(x) = -\min(Bx, Cx + B - C)$, примите значения параметров $(B = 0.01, C = 1)$ или $(B = 0.5, C = 2)$

b) $G(x) = B\lvert x \rvert - 1$, примите значения параметров $B = 0.01$, $B = 0.5$ или $B = 1$

5.4.4. Модель электрической цепи с трилинейным активным элементом (Цепи Чуа см. номер журнала [27], специально посвященный исследованиям на эту тему.)

$$
\begin{aligned}
c_1\dot{V}_1 &= \frac{1}{r}(V_2 - V_1) - g(V_1)\,, \\
c_2\dot{V}_2 &= \frac{1}{r}(V_1 - V_2) - I\,, \\
L\dot{I} &= -V_2,
\end{aligned} \tag{5.13}
$$

где $g(V_1) = m_0V - 1 + 0.5(m_1 - m_0)|V_1 + b| + 0.5(m_0 - m_1)|V_1 - b|$.

Зафиксируйте параметры $c_1 = 1/9, c_2 = 1, L = 1/7, m_0 = -0.5$, $m_1 = 0.8, b = 1$ и, изменяя параметр r от 0.2 до 0.6, найдите такие его значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода. Изучите хаотический режим системы (5.13) при $r = 0.7$.

5.4.5. Модель автогенератора хаотических колебаний на основе туннельного диода [15, с. 84]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2hx + y - gz, \\
\dot{y} &= -x, \\
\varepsilon\dot{z} &= x - f(z).
\end{aligned} \tag{5.14}
$$

Здесь h, g положительные параметры, $\varepsilon > 0$ мало, а $f(z)$ характеристика нелинейного элемента.

При $\varepsilon = 0.2$ и $f(z) = 8.592z - 22z^2 + 14.408z^3$ (см. [15]) меняйте параметры h и g в пределах $0.06 < h < 0.15$, $0.75 < g < 0.95$. Фиксируя g и меняя h, получите две первые бифуркации удвоения. Численно исследуйте хаотические режимы системы (5.14).

5.4.6. Автогенератор хаотических колебаний с инерционной нелинейностью [15, с. 86]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - xz, \\
\dot{y} &= -x, \\
\dot{z} &= -gz + \theta(x)x^2.
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

5.4.7. Кольцевой генератор Дмитриева-Кислова [15, с. 88]

$$\begin{aligned} T\dot{x} &= -x + Mz\exp(-z^2), \\ \dot{y} &= x - y, \\ \dot{z} &= y - 0.1z. \end{aligned} \tag{5.16}$$

Здесь T, M положительные параметры.

Фиксируя M в пределах от 2 до 8 и меняя $1 < g < 6$, получите две первые бифуркации удвоения. Численно исследуйте различные хаотические режимы системы (5.16).

Следующие две модели описывают динамику движений при электромагнитных взаимодействиях.

5.4.5. Вынужденные движения вращающегося диполя в магнитных полях (в частности, такая модель описывает поведение стрелки компаса в колебательном или вращательном магнитном поле).

$$J\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \varkappa\sin\theta = F_0\cos\theta\cos\omega t \tag{5.17}$$

Изучите процесс возникновения хаотических колебаний уравнения (5.17) при

a) $J = \varkappa = 1, \gamma = 0.5, F_0 = 3, 0.5 < \omega < 2.5$;

b) $J = \varkappa = 1, \gamma = 0.5, F_0 = 7, 0.1 < \omega < 2.5$.

5.4.6. Динамика частицы, движущейся в бегущем электрическом поле (такие же уравнения возникают при изучении вынужденных колебаний математического маятника).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y - \alpha X + g(kX - Z), \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.18}$$

Варианты для численного исследования:

a) $\alpha = 1, \delta = 0.01, g(kX - Z) = f\sin(X - Z), f = 2, 10 < \omega < 50$;

b) $\alpha = 1, \delta = 0.01, g(kX - Z) = f\cos(Z), f = 5, 10 < \omega < 50$;

Найти значения, при которых система (5.18) имеет хаотические колебания, и определить характеристики этих колебаний.

Задача 1. *На плоскости параметров* α, β *системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + \alpha x(x^2 + y^2)\,, \\ \dot{y} &= x - y + \beta xy - y(x^2 + y^2)\,, \end{aligned} \tag{1.59}$$

построить область, для которой реализуется бифуркация Андронова-Хопфа.

Задача 2. *Определить положительные значения параметров системы Лоренца*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x)\,, \\ \dot{y} &= rx - y - xz\,, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1.60}$$

при которых происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1 z_1 + (d_{11} z_1^2 + d_{12} z_2^2) z_1, \\ z_2' &= \gamma_2 z_2 + (d_{21} z_1^2 + d_{22} z_2^2) z_2, \end{aligned} \tag{1.65}$$

где $\gamma_j = (A_1 a_j, b_j)$, $d_{jk} = \big(F_3(a_j, a_k, a_k) + F_3(a_k, a_j, a_k) + F_3(a_k, a_k, a_j), b_j\big)$, $d_{jj} = \big(F_3(a_j, a_j, a_j), b_j\big)$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Отметим, что функции $z_j(\tau)$ в данном случае вещественные.

Задача 3. *Выделите класс ненулевых квадратичных нелинейностей* $F_2(x, x)$, *для которых нормальная форма задачи* (1.1), *с нулевым собственным числом кратности два, имеет вид* (1.65)

Задача 4. *В предположении, что* $F_2(x, x) \neq 0$, *выполните в* (1.1) *замену*

$$x = \varepsilon(z_1(\tau) a_1 + z_2(\tau) a_2) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{1.66}$$

С помощью замены (1.66) *решите следующие задачи:*

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).

2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

Задача 5. *В предположении, что* $F_2(x, x) \neq 0$, *выполните в* (1.1) *замену*

$$x = \varepsilon\big(z_1(\tau) a_1 + z_2(\tau) e^{i\omega t} a_2 + \bar{z}_2(\tau) e^{-i\omega t} \bar{a}_2\big) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \ldots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{1.71}$$

С помощью замены (1.71) *решите следующие задачи:*

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).

2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

$$
\begin{aligned}
\dot{\xi}_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + k_1\xi_1\xi_2\cos(\psi+\delta_1) + (b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2)\xi_1,\\
\dot{\xi}_2 &= \gamma_{21}\xi_2 + k_2\xi_2\xi_1\cos(\psi-\delta_2) + (b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2)\xi_2,\\
\dot{\psi}_1 &= \delta - 2k_1\xi_2\sin(\psi+\delta_1) - k_2\xi_2\sin(\psi-\delta_2) + c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^2,
\end{aligned}
\tag{1.99}
$$

Задача 6. *Найти состояния равновесия системы* (1.99) *и исследовать их на устойчивость.*

Задача 7. *При фиксированных значениях параметров численно построить устойчивые траектории системы* (1.99).

Задача 8. *Изучить численными методами изменения фазового портрета системы* (1.99) *при изменении одного из ее параметров и фиксированных остальных.*

$$
\begin{aligned}
z_1' &= \alpha_1 z_1 + \beta_1 \bar{z}_1 z_2,\\
z_2' &= \alpha_2 z_2 + \beta_2 \bar{z}_1^2.
\end{aligned}
\tag{1.106}
$$

Здесь $\alpha_1 = (A_1 a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (A_1 a_2, b_2)$, $\beta_1 = \big(F_{20}(\bar{a}_1, a_2) + F_{20}(a_2, \bar{a}_1),\, b_1\big)$, $\beta_2 = \big(F_{20}(a_1, a_1),\, b_2\big)$.

Задача 9. *Изучить качественное поведение системы* (1.106) *при различных значениях входящих параметров.*

Задача 10. *Построить следующее по порядку малости приближение нормальной формы* (1.106).

Задача 11. *Докажите, что корни квазимногочлена* $\lambda + \dfrac{\pi}{2}e^{-\lambda}$ *лежат в левой комплексной полуплоскости за исключением одной пары* $\pm i\dfrac{\pi}{2}$.

Критерии оценивания контрольной работы

Показатели	Критерии	4-балльная шкала (уровень освоения)
Полнота выполнения задания; Качество вычислений; Обоснованность действий; Наличие определений , формул и т.д.;	Студентом составлен правильный алгоритм решения задания, в логических рассуждениях, в выборе формул и решении нет ошибок, получены верные ответы, все задачи решены рациональным способом. Или *Студент полностью выполнил задание контрольной работы, показал отличные теоретические знания, умения и навыки выбирать необходимый метод для решения*	Отлично (повышенный уровень)

Последовательность и рациональность выполнения задания; Самостоятельность решения; и т.д.	*типовых задач, продемонстрировал умения и навыки представлять и обосновывать собственные результаты, в рамках усвоенного учебного материала приведены все нужные обоснования.*	
	Студентом составлен правильный алгоритм решения задания, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор формул для решения; есть объяснение решения, но допущены арифметические ошибки (не более двух несущественных ошибок). Или *Студент полностью выполнил задание контрольной работы, показал хорошие знания и умения, но не смог обосновать оптимальность предложенного решения, возможно, допустил арифметические ошибки, есть недостатки в оформлении контрольной работы.*	Хорошо (базовый уровень)
	Студентом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в формулах или в математических расчетах; задание может быть решено не полностью, однако план решения есть. Или *Студент полностью выполнил задание контрольной работы, но допустил существенные неточности, арифметические ошибки, не проявил умения правильно интерпретировать полученные результаты, качество оформления контрольной работы имеет недостаточный уровень.*	Удовлетворительно (пороговый уровень)
	Студентом задания не решены. Или *Студент не полностью выполнил задание контрольной работы, при этом проявил недостаточный уровень знаний и умений, а также неспособен пояснить полученный результат.*	Неудовлетворительно (уровень не сформирован)

Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины

<u>Проверка сформированности компетенции ПК-2</u>

Задание 1. При каких α происходит бифуркация Андронова-Хопфа?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
А) $\alpha > 0$;
Б) $\alpha < 0$;
В) $\alpha = 0$.

Задание 2. При каких α происходит бифуркация Андронова-Хопфа?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon & 1 \\ 5 & -2+\varepsilon \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha x_1^3 \\ \alpha x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
А) $\alpha > 0$;
Б) $\alpha < 0$;
В) $\alpha = 0$.
Задание 3. Имеет ли задача периодические решения?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} x + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
А) имеет периодические решения;
Б) периодических решений нет.

Задание 4. Имеет ли задача периодические решения?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + e^{2it} \begin{pmatrix} 4+2i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
А) имеет периодические решения;
Б) периодических решений нет.

Правильные ответы
Правильные ответы

Вопрос №	Вариант ответа
1	Б
2	Б
3	Б
4	А

Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла. 8 баллов соответствуют формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 7-6 баллов – на продвинутом уровне, 5-4 балла – на пороговом уровне, менее 4 баллов – ниже порогового уровня.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания»

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов по дисциплине

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Сингулярно возмущенные динамические системы и релаксационные колебания» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе этой дисциплины лежит фундаментальный математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка практических навыков.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации.

Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического моделирования. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома аспирантам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы на основе современных методов и приемов математического моделирования, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольной работы и самостоятельных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра изучения дисциплины аспиранты сдают зачет. Этот зачет выставляется в соответствии с результатами тестирования и собеседования по вопросам по курсу. Во время подготовки к зачету предусмотрена групповая консультация.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов по дисциплине

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу.

Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее

востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).

2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://window.edu.ru/library).

Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.

Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:

1. Личный кабинет (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»

(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.