

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

 П.Н.Нестеров

«18» мая 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
«Теория алгебраических структур»

Направление подготовки
01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль)
«Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры алгебры и математической логики
от «16» апреля 2021 года, протокол № 8

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины Целью изучения дисциплины «Теория алгебраических структур» является освоение основных алгебраических структур, применяемых в различных развитых математических теориях и их приложениях.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Теория алгебраических структур» является дисциплиной по выбору вариативной части. Данная дисциплина направлена на освоение теории алгебраических структур и основных конструкций, применяемых в алгебре и ее приложениях.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы аспирантуры, и критерии их оценивания

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Профессиональные компетенции:

- готовность к исследованию в области теории алгебраических структур (полугрупп, групп, колец, полей, модулей и т. д.) (ПК-1);

Код компетенции	Планируемые результаты обучения	Критерии оценивания результатов обучения		
		Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
ПК-1	ЗНАТЬ: Основные алгебраические структуры: группы, кольца, модули, многочлены, группы и алгебры Ли, булевы кольца. Методы изучения групп и алгебр, идеалы, нормальные подгруппы, эндоморфизмы и гомоморфизмы, конструкции некоторых структур, теорема Веддерберна и лемма Шура.	Фрагментарные (неполные) представления об основных концепциях алгебраических структурах и методах их изучения. Основные структурные теоремы и идеалы и их аналоги.	Сформированные, но содержащие отдельные пробелы представления об основных концепциях алгебраических структурах и методах их изучения. Основные структурные теоремы и идеалы и их аналоги.	Сформированные систематические представления об основных концепциях алгебраических структурах и методах их изучения. Основные структурные теоремы и идеалы и их аналоги.
	УМЕТЬ: использовать строение соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные объекты из более простых	В целом успешное, но не систематическое использование строение соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы использование соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные	Сформированное умение соответствующих алгебраических структур, вычислять в этих структурах, находить важные подструктуры и конструировать более сложные объекты из более простых

	ВЛАДЕТЬ: навыками анализа и вычислений в алгебраических структурах. Применением основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и произведений	В целом успешное, но не систематическое применение основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и произведений	В целом успешное, но содержащее отдельные пробелы применение основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и	Успешное и систематическое применение основных структурных теорем и конструированием производных объектов: идеалов, нормальных подгрупп, эпиморфных образов, прямых сумм и произведений
--	---	--	---	---

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетные единицы, 108 акад. часов
 Дисциплина изучается в течение второго семестра. Формой итоговой аттестации по дисциплине является зачет.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий и их трудоемкость (в академических часах)					Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			лекции	практические	лабораторные	консультации	самостоятельная работа	
1.	Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции.	2	1				10	
2	Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.	2	3				13	
3.	Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции.	2	3				13	
4	Модули. Прямые суммы и свободные модули.	2	3				13	

	Тензорное произведение . Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.						
5	Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом.	2	3				13
6	Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов идеалов. Группа Брауэра.	2	3				13
7	Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.	2	2				13
						2	Зачет
Всего			18			2	88

Содержание разделов дисциплины:

1. Основные алгебраические структуры. Группы, кольца, поля, многочлены и полугруппы. Ряды Лорана и рациональные функции
2. Коммутативные кольца. Прямые суммы колец. Булевы кольца. Прямые суммы колец. Разложение на множители. Факториальные кольца.
3. Гомоморфизмы и идеалы. Фактор-кольца, кольца главных идеалов. Связь с факториальностью. Умножение идеалов. Расширения, в которых заданный многочлен имеет корень. Конечные поля. Целые числа, как функции
4. Модули. Прямые суммы и свободные модули. Тензорное произведение . Тензорная, симметрическая и внешняя степень модуля. Двойственный модуль. Свойства векторных пространств и модули.
5. Некоммутативные кольца. Кольцо эндоморфизмов модуля. Групповая алгебра. Кватернионы и тела. Алгебра Клиффорда. Простые кольца и алгебры. Идеалы кольца эндоморфизмов векторного пространства над телом
6. Полупростые модули и кольца. Теорема Веддерберна. Лемма Шура. Симметрии физических законов. Группа классов идеалов. Группа Брауэра

7. Группы Ли и алгебраические группы. Торы. Классические комплексные алгебры Ли. Группа Лоренца. Алгебраические группы.

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя.

Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.

- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.

- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).

- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО);

-- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ -- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ - NEXТ" (АБИС "БУКИ - NEXТ""БУКИ - NEXТ").

-- для работы с алгебраическими структурами используется система алгоритмов GAP, имеющаяся в свободном доступе в Интернете.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература

1. Винберг Э.Б. М., Курс алгебры. М., "Факториал Пресс", 2001.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Часть 3. Основные структуры алгебры. М.: Физматлит, 2000.
3. Ленг С. Алгебра. М., Мир, 1968.

б) дополнительная литература

4. Гэри М, Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. М.: Мир, 1982..
5. Ван дер Варден Б.Л. Алгебра. М.: Наука, 1976.
6. Скорняков Л.А. Элементы общей алгебры. М.: Наука, 1983.
7. Мальцев А.И. Алгебраические системы. М.: Наука, 1970
8. Джекобсон Н. Алгебры Ли. М., Мир, 1964.
9. Кондратьев А.С. Группы и алгебры Ли, Екатеринбург: УрО РАН, 2009
10. Владимиров Д.А., Булевы алгебры. М., Наука, 1969

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: <http://www.lib.uniyar.ac.ru/>
3. <http://mech.math.msu.su/department/>

(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php).

4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (<http://www.edu.ru> раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (<http://www.edu.ru/library>).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" (www.biblioclub.ru).
6. [http:// www.tc26.ru](http://www.tc26.ru)
7. [http:// www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061](http://www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061)
6. <http://habrahabr.ru/post/210684/>
8. http://www.nist.gov/customcf/get_pdf.cfm?pub_id=919061
9. <http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po-issledovaniyu-khesh-funksii-tribog/>

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:

- учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;
- помещения для самостоятельной работы;
- помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.

Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.

Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.

Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.

Автор(ы) :

Заведующий кафедрой алгебры и математической логики
профессор, д.ф-м.н Казарин Л.С

**Приложение к №1 рабочей программе дисциплины
«Теория алгебраических структур»**

**Оценочные средства
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов
по дисциплине**

**1. Типовые контрольные задания или иные материалы,
необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности,
характеризующих этапы формирования компетенций**

1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список теоретических вопросов к зачету:

1. Теоремы Силова.
2. Простота группы A_n , $n \geq 5$ и SO_3 .
3. Теорема о конечно порожденных модулях над евклидовым кольцом и ее следствия для групп и линейных операторов.
4. Свободные группы и определяющие соотношения.
5. Алгебраические расширения полей. Теорема о примитивном элементе. Поле разложения многочлена. Основная теорема теории Галуа .
6. Конечные поля, их подполя и автоморфизмы .
7. Радикал кольца. Структурная теорема о полупростых кольцах с условием минимальности .
8. Группа Брауэра. Теорема Фробениуса .
9. Нетеровы кольца и модули. Теорема Гильберта о базисе.
10. Алгебры Ли. Простые и разрешимые алгебры. Теорема Ли о разрешимых алгебрах. Теорема Биркгофа-Витта.
11. * Основы теории представлений. Теорема Машке. Одномерные представления. Соотношения ортогональности.
12. * Алгебраические системы. Свободные алгебры. Многообразие алгебр. Теорема Биркгофа.
13. Решетки. Дедекиндовы решетки. Теорема Стоуна о булевых алгебрах.

Задания для зачета

1. Доказать, что группа порядка 15 циклическая.
2. Показать, что неразрешимая группа наименьшего порядка будет иметь порядок 60.
3. Доказать, что число элементов конечного поля – степень его характеристики.
4. В каком случае поле $GF(p^m)$ содержит подполе, изоморфное $GF(p^n)$?
5. Доказать теорему о строении конечнопорожденных абелевых групп.
6. Предложить алгоритм нахождения примитивного элемента в конечном поле, заданном вычетами по модулю неприводимого многочлена $g(x)$.
7. Какова группа Галуа уравнения $x^4+2x^2+x+3=0$?
8. Доказать, что полное матричное кольцо P_n является центральной простой алгеброй над полем P .
9. Доказать, что если многообразие M содержится в объединении многообразий M_1 и M_2 , то M содержится в M_1 или M_2 .

10. Является ли идеал $(x_1 x_1 - x_2^2, x_2 x_3 - x_1^3, x_3^2 - x_1^2 x_2)$ кольца $K[x_1, x_2, x_3]$ простым?
11. Как устроена простая алгебра без единицы?
12. В любом подмножестве M кольца $S = R[x_1, x_2, \dots, x_m]$ с коэффициентами в поле R существует такой конечный набор элементов m_1, m_2, \dots, m_r , что любой элемент S представим в виде линейной комбинации элементов m_1, m_2, \dots, m_r с коэффициентами из S .
13. Пусть L — алгебра Ли и X — элемент из L . Покажите, что $\text{ad } X$ — дифференцирование алгебры L .
14. Пусть L — алгебра Ли и H, K — ее нильпотентные идеалы. Доказать, что $H+K$ — нильпотентный идеал L .
15. Показать, что по таблице неприводимых комплексных характеров конечной группы можно определить порядки классов сопряженных элементов группы, порядок центра и коммутанта группы.
16. Будет ли решетка нормальных подгрупп группы модулярной?
17. Построить полную решетку разбиений множества из четырех элементов.
18. Если группа G порождается конечным множеством X , то в любом ее порождающем множестве имеется конечное подмножество, также порождающее G .
19. Доказать, что все идеалы групповой алгебры бесконечной циклической группы главные.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины «Теория алгебраических структур»

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов по дисциплине

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет», рекомендованных к использованию при освоении дисциплины

Электронные ресурсы ЯрГУ (<http://lib.uniyar.ac.ru>)

1. Библиографические записи всех видов документов, составляющих фонд библиотеки, на русском и иностранных языках и поступивших позже 1995 года:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php (в открытом доступе)

2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php

3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»:

http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php

4. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека Online»:

www.biblioclub.ru

5. Проект МАРС: <http://mars.arbicon.ru>.

6. Электронно-библиотечная система «Лань»: <http://e.lanbook.com/>

7. Научная электронная библиотека eLIBRARY.ru: <http://elibrary.ru>

8. Англоязычные библиотеки в сети университета:

а) MathSciNet: <http://www.ams.org/snhtml/annser.csv> - с платформы издателя

<http://search.ebscohost.com/> - с платформы Ebscohost

б) Web of Science: <http://webofscience.com>

в) Scopus: <http://www.scopus.com>

г) Science The American Association for the Advancement of Science:

<http://www.sciencemag.org>

д) Ресурсы Springer

SpringerJournals: <http://link.springer.com/>

SpringerProtocols: <http://www.springerprotocols.com/>

SpringerMaterials: <http://materials.springer.com/>

SpringerReference: <http://link.springer.com>

zbMATH: <http://zbmath.org/>