МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

Кафедра математического моделирования

УТВЕРЖДАЮ

Декан математического факультета

__________ П.Н.Нестеров

«18» мая 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
«Бифуркации векторных полей»

Направление подготовки
01.06.01 Математика и механика

Направленность (профиль)
«Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Форма обучения очная

Программа рассмотрена
на заседании кафедры математического моделирования
от «13» апреля 2021 года, протокол № 8

Ярославль

1. Цели освоения дисциплины

Целью изучения дисциплины «Бифуркации векторных полей» является ознакомление аспирантов с ключевыми методами нелинейной динамики – асимптотическими.

Цели освоения дисциплины (модуля):

- формирование представления об асимптотических методах исследования нелинейных динамических систем;
- ознакомление аспирантов с важнейшими направлениями развития теории бифуркаций;
- формирование представления о методах исследования нелинейных динамических систем с хаотическим поведением;
- формирование способности к восприятию новых научных фактов и гипотез и использованию полученных знаний в процессе образования.

Для достижения поставленной цели предусматривается решение следующих воспитательных, образовательных, а также развивающих практические навыки задач:

- дать знания о современных асимптотических методах нелинейной динамики;
- ознакомить слушателей с последними достижениями математического моделирования и нелинейной динамики;
- мотивировать интерес к наблюдению, анализу и обсуждению актуальных проблем нелинейной динамики;
- стимулировать самостоятельную аналитическую работу аспирантов.

2. Место дисциплины в структуре программы аспирантуры

Дисциплина «Бифуркации векторных полей» относится к вариативной части (дисциплина по выбору) ОП аспирантуры.

Для освоения данной дисциплиной аспиранты должны обладать знаниями по математическому анализу и дифференциальным уравнениям в объеме стандартного университетского курса.

Дисциплина «Бифуркации векторных полей» способствует формированию мировоззрения и развитию математического мышления, а также дальнейшему развитию навыков научно-исследовательской деятельности. Предполагаемое данным курсом освещение центральных тем, базовых понятий и методов современного математического моделирования закладывает основы для более детального изучения и понимания широкого круга специальных вопросов в рамках профильной подготовки по дисциплинам вариативной части профессионального цикла.

3. Планируемые результаты обучения по дисциплине – знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, характеризующие этапы формирования компетенций и обеспечивающие достижение планируемых результатов освоения программы аспирантуры, и критерии их оценивания

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

Профессиональные компетенции:

-способностью самостоятельно осваивать, создавать и использовать новые математические понятия, гипотезы, теоремы, методы, физико-математические модели и численные алгоритмы и программы, в том числе для прикладных исследований (ПК-1)

Код компетенции	Формулировка компетенции	Перечень планируемых результатов обучения
Профессиональные компетенции		
ПК-1	способностью самостоятельно осваивать, создавать и использовать новые математические понятия, гипотезы, теоремы, методы, физико-математические модели и численные алгоритмы и программы, в том числе для прикладных исследований	**Знать:** общие принципы построения нормальных форм обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, понятие метода усреднения, идею метода квазинормальных форм **Уметь:** пользоваться методом усреднения, находить нормальную форму системы обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений второго порядка, пользоваться методами большого параметра, **Владеть:** навыками методологически грамотного осмысления конкретно-научных проблем.

4. Объем, структура и содержание дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 акад. часов

Дисциплина изучается в течение второго семестра. Формой итоговой промежуточной аттестации по дисциплине является зачет.

№ п/п	Темы (разделы) дисциплины, их содержание	Семестр	Виды учебных занятий, включая самостоятельную работу аспирантов, и их трудоемкость (в академических часах)						Формы текущего контроля успеваемости Форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Контактная работа						
			лекции	практические	лабораторные	консультации	аттестационные испытания	самостоятельная работа	
1.	Раздел 1.	2	2					6	Самостоятельная

	Линейные системы с периодическими коэффициентами. Метод усреднения								работа
2.	Раздел 2. Метод нормальных форм	2	4					10	Самостоятельная работа
3.	Раздел 3. Метод нормальных форм в системах с бесконечномерным фазовым пространством	2	4					10	Контрольная работа
4.	Раздел 4. Асимптотическое интегрирование систем близких к гамильтоновым	2	4					20	Самостоятельная работа
5.	Раздел 5. Метод большого параметра и релаксационные автоколебания	2	4					42	Контрольная работа
									Зачет
	Всего		**18**			**2**		**88**	

Содержание разделов дисциплины:

Релаксационные автоколебания в системах с одним запаздыванием
2. Асимптотический анализ одного уравнения
3. Существование и устойчивость периодического решения
4. Асимптотика периода решения.
5. Динамика системы двух диффузионно связанных нейронных осцилляторов
6. Обоснование C и C^1-сходимости
7. Динамика цепочки диффузионно связанных нейронных осцилляторов
8. Предельное отображение для цепочки диффузионно связанных релаксационных осцилляторов
9. Релаксационные автоколебания в случае двух запаздываний
10. Моделирование bursting-эффекта в нейронных системах
11. Доказательство существования и устойчивости bursting-цикла
12. Дискретные автоволны в системах релаксационных однонаправленно связанных осцилляторов
13. Буферность в нейронных системах
14. Исследование задачи методом квазинормальных форм
15. Релаксационные автоколебания в сетях Хопфилда с запаздыванием
16. Релаксационные колебания в модели отдельного нейрона Хопфилда
17. Существование и устойчивость периодического решения
18. Релаксационные автоколебания в кольцевой сети Хопфилда
19. Сингулярно возмущенные уравнения, моделирующие химических синаптические связи
20. Существование и устойчивость периодического решения вспомогательного уравнения

21. Построение решений системы однонаправленно синаптически связанных осцилляторов в виде дискретных автоволн

Раздел 1. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Метод усреднения

1. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке–Ляпунова

2. Метод усреднения

Раздел 2. Метод нормальных форм в конечномерном фазовом пространстве

3. Теорема о центральном многообразии

4. Метод нормальных форм для потоков

5. Нормализация систем с дискретным временем

6. Критические случаи в задаче об устойчивости неподвижной точки (Коразмерность 1).

7. Критические случаи в задаче об устойчивости неподвижной точки (Коразмерность 2)

Раздел 3. Метод нормальных форм в системах с бесконечномерным фазовым пространством

8. Метод нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством

9. Экономный метод построения нормальной формы

Раздел 4. Асимптотическое интегрирование систем близких к гамильтоновым

10. Методы асимптотического интегрирования систем близких к гамильтоновым

11. Бифуркация расщепления сепаратрис и асимптотические методы построения периодических решений

Раздел 5. Метод большого параметра и релаксационные автоколебания

12. Методы большого параметра для дифференциальных уравнений на плоскости

13. Релаксационные автоколебания

14. Методы большого параметра для дифференциальных уравнений с запаздыванием

15. Построение предельных динамических систем релейного типа

16. Построение асимптотики релаксационного цикла для уравнений с запаздыванием

5. Образовательные технологии, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Академическая лекция (или лекция общего курса) – последовательное изложение материала, осуществляемое преимущественно в виде монолога преподавателя. Требования к академической лекции: современный научный уровень и насыщенная

информативность, убедительная аргументация, доступная и понятная речь, четкая структура и логика, наличие ярких примеров, научных доказательств, обоснований, фактов. Академическая лекция, как правило, состоит из трех частей: вступления (введения), изложения и заключения:

- *вступление* (введение) определяет тему, план и цель лекции. Оно призвано заинтересовать и настроить аудиторию, сообщить, в чём заключается предмет лекции и (или) её актуальность, основная идея (проблема, центральный вопрос), связь с предыдущими и последующими занятиями, поставить её основные вопросы. Введение должно быть кратким и целенаправленным.
- *изложение* является основной частью лекции, в которой реализуется научное содержание темы, ставятся все узловые вопросы, приводится вся система доказательств с использованием наиболее целесообразных методических приемов. Каждое теоретическое положение должно быть обосновано и доказано, приводимые формулировки и определения должны быть четкими, насыщенными глубоким содержанием.
- *заключение* обобщает в кратких формулировках основные идеи лекции, логически ее завершая. В заключении могут даваться рекомендации о порядке дальнейшего изучения основных вопросов лекции самостоятельно по указанной литературе.

Вводная лекция – дает первое целостное представление о дисциплине (или ее разделе) и ориентирует студента в системе изучения данной дисциплины. Обучающиеся знакомятся с назначением и задачами курса, его ролью и местом в системе учебных дисциплин и в системе подготовки специалиста. Дается краткий обзор курса, история развития науки и практики, достижения в этой сфере, имена известных ученых, излагаются перспективные направления исследований. На этой лекции высказываются методические и организационные особенности работы в рамках курса, а также дается анализ рекомендуемой учебно-методической литературы.

Практическое занятие – занятие, посвященное освоению конкретных умений и навыков и закреплению полученных на лекции знаний.

6. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень лицензионного программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости).

В процессе осуществления образовательного процесса используются:

-- программное обеспечение для создания и демонстрации презентаций, иллюстраций и других учебных материалов:

- Microsoft Windows (в составе Microsoft Imagine Premium Electronic Software Delivery).
- Microsoft OfficeSTD 2013 RUS OLP NL Acdmc 021-10232 Microsoft Open License №0005279522
- MikTeX (свободно распространяемое ПО).

-- для поиска учебной литературы библиотеки ЯрГУ -- Автоматизированная библиотечная информационная система "БУКИ - NEXT" (АБИС "БУКИ - NEXT""БУКИ - NEXT").

-- для работы с алгебраическими структурами используется система алгоритмов GAP, имеющаяся в свободном доступе в Интернете.

1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимых для освоения дисциплины

а) основная:

1. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Метод квазинормальных форм: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2011. – 106 с.
2. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 1. Модели, методы, явления [Электронный ресурс] / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. — Электрон.

текстовые данные. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. — 716 c. — 978-5-4344-0299-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69361.html
3. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Том 2. Приложения [Электронный ресурс] / К.В. Аврамов, Ю.В. Михлин. — Электрон. текстовые данные. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2015. — 700 c. — 978-5-4344-0301-6. — Режим доступа: http://www.iprbookshop.ru/69362.html

б) дополнительная:

1. Малинецкий, Г.Г. Современные проблемы нелинейной динамики. / Г.Г. Малинецкий, А.Б. Потапов. – М.: УРСС, 2002.
2. Глызин С.Д., Колесов А.Ю. Релаксационные автоколебания в нейронных системах: учебное пособие. – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 220 с.
3. Арнольд, В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В.И. Арнольд. М.: Наука. 1978.
4. Гукенхеймер, Д. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей / Д. Гукенхеймер, Ф. Холмс. – Москва-Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
5. Шильников, Л. П. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. / Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа. – Москва - Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
6. Глызин, С.Д. Численные методы анализа динамических систем: учеб. пособие / С.Д. Глызин; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2002.
7. Глызин, С.Д. Асимптотические методы нелинейной динамики: учебное пособие / С.Д. Глызин, А.Ю. Колесов; Яросл. гос. ун-т. – Ярославль: ЯрГУ, 2006.
8. Мищенко, Е. Ф. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания / Е. Ф. Мищенко, Н. Х.Розов. – М.: Наука, 1975. 248 с.
9. Мищенко, Е. Ф. Периодические движения и бифуркационные процессы в сингулярно возмущенных системах. / Е. Ф. Мищенко, Ю. С. Колесов, А. Ю. Колесов, Н. Х.Розов. – М.: Наука, 1995.

в) ресурсы сети «Интернет»

1. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ
2. Электронная библиотека ЯрГУ: http://www.lib.uniyar.ac.ru/
3. http://mech.math.msu.su/department/

(**http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php**).

4. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://www.edu.ru раздел Учебно-методическая библиотека) или по прямой ссылке (http://www.edu.ru/library).
5. Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online" (www.biblioclub.ru).
6. http:// www.tc26.ru
7. http:// www.nist.gov/manuscript-publicftion-search.cfm?pub_id=919061
6. http://habrahabr.ru/post/210684/
8. http://www.nist.gov/customcf/get pdf.cfm?pub id=919061
9. http://www.streebog.info/news/opredeleny-pobediteli-konkursa-po issledovaniyu-

khesh-funksii-stribog/

8. Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине

Материально-техническая база, необходимая для осуществления образовательного процесса по дисциплине включает в свой состав специальные помещения:
-учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа; групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации;
-помещения для самостоятельной работы;
-помещения для хранения и профилактического обслуживания оборудования.
Специальные помещения укомплектованы специализированной мебелью и техническими средствами обучения, служащими для представления информации большой аудитории.
Помещения для самостоятельной работы обучающихся оснащены компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в электронную информационно-образовательную среду организации.
Число посадочных мест в лекционной аудитории больше либо равно списочному составу потока, а в аудитории для практических занятий (семинаров) – списочному составу группы обучающихся.
Зав. кафедрой компьютерных сетей,
д.ф.-м.н., профессор С.Д. Глызин

Приложение к №1 рабочей программе дисциплины «Бифуркации векторных полей»

Оценочные средства
для проведения текущей и/или промежуточной аттестации аспирантов
по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1 Список вопросов и (или) заданий для проведения промежуточной аттестации

Список вопросов к зачету:

1. Линейные системы с периодическими коэффициентами. Теорема Флоке–Ляпунова
2. Метод усреднения
3. Теорема о центральном многообразии
4. Метод нормальных форм для потоков
5. Нормализация систем с дискретным временем
6. Критические случаи в задаче об устойчивости неподвижной точки (Коразмерность 1).
7. Критические случаи в задаче об устойчивости неподвижной точки (Коразмерность 2)
8. Метод нормальных форм для динамических систем с бесконечномерным фазовым пространством
9. Экономный метод построения нормальной формы
10. Методы асимптотического интегрирования систем близких к гамильтоновым
11. Бифуркация расщепления сепаратрис и асимптотические методы построения периодических решений
12. Методы большого параметра для дифференциальных уравнений на плоскости
13. Релаксационные автоколебания
14. Методы большого параметра для дифференциальных уравнений с запаздыванием
15. Построение предельных динамических систем релейного типа
16. Построение асимптотики релаксационного цикла для уравнений с запаздыванием

Зачет выставляется по результатам тестового задания и краткого собеседования с аспирантом после его проверки. Тестовое задание аналогично по своей структуре заданиям из контрольной работы.

Приложение №1 к рабочей программе дисциплины «Бифуркации векторных полей»

Фонд оценочных средств для проведения текущей и промежуточной аттестации аспирантов по дисциплине

1. Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

1.1. Контрольные задания и иные материалы, используемые в процессе текущей аттестации

Задания для самостоятельной работы

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
1	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = -x + yz$ $\dot{z} = 1 - y^2$	Отсутствуют	0.014, 0, −0.014	3.000
2	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - xy$	$(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$	0.210, 0, −1.210	2.174
3	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 1 - x^2$	$(1, 1, 0)$, $(-1, -1, 0)$	0.163, 0, −1.163	2.140
4	$\dot{x} = -y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = xz + 3y^2$	(0,0,0)	0.103, 0, −1.320	2.078
5	$\dot{x} = yz$ $\dot{y} = x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - 4x$	(0.25,0.063,0)	0.078, 0, −1.078	2.072
6	$\dot{x} = y + z$ $\dot{y} = -x + 0.5y$ $\dot{z} = x^2 - z$	$(0, 0, 0)$, $(-2, -4, -4)$	0.117, 0, −0.617	2.190
7	$\dot{x} = 0.4x + z$ $\dot{y} = xz - y$ $\dot{z} = -x + y$	$(0, 0, 0)$, $(-2.5, -2.5, 1)$	0.034, 0, −0.634	2.054
8	$\dot{x} = -y + z^2$ $\dot{y} = x + 0.5y$ $\dot{z} = x - z$	$(0, 0, 0)$, $(-2, -4, -2)$	0.117, 0, −0.617	2.190
9	$\dot{x} = -0.2y$ $\dot{y} = x + z$ $\dot{z} = x - z + y^2$	(0,0,0)	0.012, 0, −1.012	2.012

№	Система	Неподвижные точки	Ляпуновские экспоненты	Размерность
10	$\dot{x} = -2z$ $\dot{y} = -2y + z$ $\dot{z} = -x + y + y^2$	(0,0,0)	0.076, 0, -1.076	2.037
11	$\dot{x} = xy - z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = x + 0.3z$	$(0, 0, 0)$, $\frac{1}{9}(30, 30, 100)$	0.038, 0, -0.890	2.042
12	$\dot{x} = y + 3.9z$ $\dot{y} = 0.9x^2 - y$ $\dot{z} = 1 - x$	(1,0.9,-0.231)	0.061, 0, -1.061	2.057
13	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = -x^2 - y$ $\dot{z} = 1.7(1 + x)+$ $+y$	$(2.406, -5.791, 0)$, $(-0.706, -0.5, 0)$	0.044, 0, -1.044	2.042
14	$\dot{x} = -2y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + y - 2z$	(-0.25,0,0.5)	0.076, 0, -2.076	2.037
15	$\dot{x} = y$ $\dot{y} = x - z$ $\dot{z} = x + xz + 2.7y$	$(0, 0, 0)$, $(-1, 0, -1)$	0.049, 0, -0.319	2.154
16	$\dot{x} = 2.7y + z$ $\dot{y} = -x + y^2$ $\dot{z} = x + y$	$(0, 0, 0)$, $(1, -1, 2.7)$	0.087, 0, -0.481	2.181
17	$\dot{x} = -z$ $\dot{y} = x - y$ $\dot{z} = 3.1x + y^2$ $+0.5z$	$(0, 0, 0)$, $(-3.1, -3.1, 0)$	0.109, 0, -0.609	2.179
18	$\dot{x} = 0.9 - y$ $\dot{y} = 0.4 + z$ $\dot{z} = xy - z$	$(-\frac{4}{9}, 0.9, -0.4)$	0.062, 0, -1.062	2.058
19	$\dot{x} = -x - 4y$ $\dot{y} = x + z^2$ $\dot{z} = 1 + x$	$(-1, 1/4, 1)$, $(-1, 1/4, -1)$	0.188, 0, -1.188	2.151

Типовые индивидуальные задания

5.2.1. Модель тепловой конвекции. При изучении Фурье-разложений решений классического уравнения Навье-Стокса Лоренц [28] получил систему вида

$$\begin{aligned} X' &= \alpha(Y - X), \\ Y' &= rX - Y - XZ, \\ Z' &= -bZ + XY, \end{aligned} \tag{5.1}$$

Исследуйте систему Лоренца при

a) $a = 10, r = 5$, изменяя b от 0 до 9;

b) $a = 10, r = 20$, изменяя b от 0 до 12;

c) a $= 10, b = 8/3$, изменяя r от 166 до 167 (проверьте, что при $r = 166$ имеют место устойчивые периодические движения, а при $r = 166.1$ хаотические колебания).

5.2.2. Модель Мариока-Шимицу тепловой конвекции при больших числах Рейнольдса. Эта модель была предложена как альтернативная модели Лоренца (см. [23]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= X - \lambda Y - XZ, \\ Z' &= -aZ + X^2. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Проанализируйте систему (5.2) при

a) $a = 10$, изменяя λ, от 0 до 9;

b) $a = 10$, $0.5 < \lambda < 0.6$ (убедитесь, что при $\lambda = 0.547, 0.553, 0.555$ происходят бифуркации удвоения периода).

5.2.3. Модель тепловой конвекции Мура и Шпигеля (см. [18, с. 77-79]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= Z - (1 - \delta)Z, \\ Z' &= -\rho Z + (1 - \delta Z^2)Y. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Изучите сложные колебания системы (5.3) при

a) $\delta = 10,\ \rho > 100$;

b) $\delta = 10,\ \rho > 50$.

Следующие две системы возникают при исследовании нелинейных параболических систем типа реакция-диффузия, родственных уравнению Навье-Стокса.

5.2.4. Двухкомпонентная модель уравнения Курамото-Цудзуки (см. [3]).

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 2\xi - 2\xi(\xi+\eta) - \xi\eta(\cos\theta + c_1\sin\theta), \\ \dot{\eta} &= 2\eta - 2\eta(2\xi + 0.75\eta) - 2\xi\eta(\cos\theta - c_2\sin\theta) - 2k^2\eta, \\ \dot{\theta} &= c_2(2\xi - 0.5\eta) + (2\xi+\eta)\sin\theta + c_2(2\xi-\eta)\cos\theta + 2c_1k^2. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Параметры k, c_1, c_2 выбираются равными:

a) $k = c_1 = 1, c_2 = -3.15, -4, -4.05$ (убедитесь, что при этих значениях параметров происходят бифуркации удвоения периода и исследуйте хаотические колебания при $c_2 = 4, 7$);

b) $k = 1, c_1 = 5, \ -2 > c_2 > -8$ (найдите значение параметра c_2, при котором происходит первая бифуркация удвоения периода).

5.2.5. Фазовая модель системы n слабо связанных осцилляторов (см. [12]).

$$\begin{gathered} \dot{\alpha}_j = 2\sin\alpha_j - \sin\alpha_{j-1} - \sin\alpha_{j+1} + \varkappa(\cos\alpha_{j-1} + \cos\alpha_{j+1}), \\ j = 1, 2, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Исследуйте систему (5.5) в случаях различных граничных условий:

a) $\alpha_0 = \alpha_n = 0, n = 3, 4, \varkappa = 3$;

b) $\alpha_0 = \alpha_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{n-1}, \ n = 3, \varkappa = 3$.

5.3.1. Модель Дуффинга изогнутого стержня (иногда называемая уравнением Холмса [22]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y + X(1 - X^2)/2 + f\cos Z, \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Варианты параметров для численного исследования:

a) $f = 0.15, \delta = 0.05, 0 < \omega < 1.2$;

b) $f = 0.4, \delta = 0.2, 0 < \omega < 1.2$;

c) $\delta = 0.15, \omega = 0.8, 0.1 < f < 0.3$;

d) $\delta = 0.15, \omega = 0.3, 0.2 < f < 0.6$.

Изменяя бифуркационный параметр ω в первых двух вариантах и f в остальных, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.6).

5.3.2. Колебания с провалами арки на шарнирах под воздействием гармонической внешней силы (ферма Мизеса, см. [10, с. 237]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -\delta Y + k\left(1 - \sqrt{b^2 + X^2}\right) X + f \cos Z, \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Варианты параметров для численного исследования:
a) $\delta = 0.1, k = 1, b = 2, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
b) $\delta = 0.1, k = 1, b = 1.5, f = 0.2, 0 < \omega < 1.5$;
c) $\delta = 0.15, k = 1, b = 2, \omega = 0.8\ 0.1 < f < 0.3$.
Изменяя бифуркационные параметры ω или f, найти такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследовать хаотический режим системы (5.7).

5.3.3. Маятник с колеблющейся точкой подвеса (см. [6]).

$$\ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + (1 + \mathrm{A}\cos\omega t)\sin\theta = 0. \tag{5.8}$$

Для получения колебаний сложной структуры необходимо выбрать параметры β, A, ω так, чтобы A и ω были велики, а β мало, причем $A \simeq (\beta)^{0.5}$, $\omega \simeq 1/\beta$.

Варианты заданий:

a) зафиксировав $\beta = 0.01$ и $\omega = 30$ и изменяя А от 5 до 10, добейтесь устойчивости верхнего состояния равновесия маятника $\theta = \pi, \dot{\theta} = 0$;

b) при $\beta = 0.1$ и $\omega = 40$ найдите значения А, при которых решения уравнения (5.8) изменяются неупорядоченно, и исследуйте такие решения численно.

5.3.4. Модель динамики изогнутого стержня с двумя степенями свободы (см. [22]).

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \gamma\dot{X} - 0.5(1 - X^2)X + \beta X Y^2 &= f\,, \\ \ddot{Y} + \delta\dot{Y} + \alpha(1 + \varepsilon Y^2)Y + \beta Y X^2 &= f_0 + f_1\cos\omega t\,. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Зафиксируйте $\gamma = \delta = 0.1, \alpha = 2, \epsilon = 0.05, \beta = 1, f_0 = f_1 = 0.2$ и, изменяя параметры f_1 и ω так, что

a) $f_1 = 0.4, 0 < \omega < 1.2$ или
b) $\omega = 0.8, 0.2 < f_1 < 2$
найдите такие их значения, при которых решения (5.9) ведут себя неупорядоченным образом. Исследуйте полученные решения по изложенной схеме.

5.3.5. Модель диффузионного взаимодействия двух одинаковых нелинейных осцилляторов [7].

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= d\xi_2 \cos(\alpha + \delta) + (1 - d\cos(\delta) - \xi_1^2)\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= d\xi_1 \cos(\alpha - \delta) + (1 - d\cos(\delta) - \xi_2^2)\xi_2, \\ \dot{\alpha} &= -d\left[\tfrac{\xi_2}{\xi_1}\sin(\alpha + \delta) + \tfrac{\xi_1}{\xi_2}\sin(\alpha - \delta)\right] + b(\xi_1^2 - \xi_2^2). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Здесь ξ_1, ξ_2 амплитуды колебаний первого и второго осцилляторов соответственно, α разность фаз между ними.

Изучите перестройки фазового портрета системы (5.10), фиксируя $\delta = -\pi/3, b = 10$ и увеличивая параметр d
a) от 1.45 до 1.459;
b) от 1.5 до 1.5075;
проследите за бифуркациями удвоения периода, происходящими с системой (5.10).

При значении параметра $d = 1.7$ изучите числовые размерностные характеристики хаотического аттрактора системы (5.10).

Задания для контрольной работы

5.4.2. Модель вынужденных хаотических колебаний в цепи с нелинейной индуктивностью (уравнение Дуффинга-Уэды [22]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= -kY - X^3 + B\cos Z, \\ Z' &= 1. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Исследуйте систему (5.11) при
a) $k = 0.25, 5 < \mathrm{B} < 15$;
b) $k = 0.05, 4 < \mathrm{B} < 15$;
c) $b = 12, 0.05 < k < 0.2$.

Изменяя бифуркационные параметры B или k, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.11).

5.4.3. Модель генератора колебаний с отрицательным сопротивлением (модифицированное уравнение Дуффинга-Ван-дер-Поля [22]).

$$\begin{aligned} X' &= Y, \\ Y' &= k(1 - Y^2)Y - X^3 + B\cos Z. \\ Z' &= \omega. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Исследуйте систему (5.12) при
a) $k = 1, \omega = 1, 1 < B < 10$;
b) $k = 0.5, B = 10, 0.5 < \omega =< 1.5$.

Изменяя бифуркационные параметры B или k, найдите такие их значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода, и исследуйте хаотический режим системы (5.12).

5.4.1. Модельные электронные схемы Спротта (см. [34])

Таблица 2

№	Система	Начальные условия $(x, \dot{x}, \ddot{x})$	Ляпуновские экспоненты
1	$\dddot{x} = -2.017\ddot{x} \pm \dot{x}^2 - x$	$(0, 0, \pm 1)$	$0.055, 0, -2.072$
2	$\dddot{x} = -2.8\dot{x} \pm x + x^2$	$(\pm 0.5, -1, 1)$	$0.002, 0, -0.002$
3	$\dddot{x} = -0.44\ddot{x} - 2\dot{x} \pm (x^2 - 1)$	$(0, 0, 0)$	$0.105, 0, -0.545$
4	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} \pm x \pm x^2$	$(0, \pm 1, 0)$	$0.094, 0, -0.594$
5	$\dddot{x} = -2\dot{x} \pm (\lvert x \rvert - 1)$	$\pm(-1, -1, 1)$	$0.003, 0, -0.003$
6	$\dddot{x} = -0.6\ddot{x} - \dot{x} \pm (\lvert x \rvert - 1)$	$(0, 0, 0)$	$0.036, 0, -0.636$
7	$\dddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - D(x) + 1$	$(0, 0, 0)$	$0.042, 0, -0.342$
8	$\dddot{x} = -0.3\ddot{x} - 0.3\dot{x} - R(x) - 1$	$(0, 0, 0)$	$0.042, 0, -0.342$
9	$\dddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - D(x) + 1)$	$\pm(0, -0.5, 0.5)$	$0.003, 0, -0.003$
10	$\dddot{x} = -2.9\dot{x} \pm (0.7x - R(x) - 1)$	$\pm(0, 0.5, -0.5)$	$0.003, 0, -0.003$
11	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} - x + \operatorname{sgn}(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.152, 0, -0.652$
12	$\dddot{x} = -0.5\ddot{x} - \dot{x} + x - \operatorname{sgn}(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.601, 0, -1.101$
13	$\dddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} - x + H(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.085, 0, -0.785$
14	$\dddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} - x + 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.072.0, -0.472$
15	$\dddot{x} = -0.4\ddot{x} - \dot{x} + x - 2S(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.091, 0, -0.491$
16	$\dddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} - x + 2\tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.128, 0, -0.318$
17	$\dddot{x} = -0.19\ddot{x} - \dot{x} + x - 2\tanh(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.067, 0, -0.257$
18	$\dddot{x} = -3.7\dot{x} \pm (x - x^3)$	$(0, \pm 0.5, 1)$	$0.002, 0, -0.002$
19	$\dddot{x} = -0.6\ddot{x} + 2.8\dot{x} - \dot{x}^3 - x$	$(0, 1, 0)$	$0.034, 0, -0.634$
20	$\dddot{x} = -0.7\ddot{x} - \dot{x} + x - x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.138, 0, -0.838$
21	$\dddot{x} = -0.35\ddot{x} - \dot{x} - x + x^3$	$(0, 1, 0)$	$0.082, 0, -0.432$
22	$\dddot{x} = -0.2\ddot{x} - \dot{x} \pm \sin(x)$	$(0, 1, 0)$	$0.123, 0, -0.323$

Принимая $D(x) = \min(x, 0)$, $R(x) = \max(x, 0)$, $H(x) = (\operatorname{sgn}(x)+1)/2$, $S(x)$ $\operatorname{sgn}(x)\min(\lvert x \rvert, 1)$, определите числовые характеристики хаотических режимов соответствующих систем, постройте сечение Пуанкаре, убедитесь в его фрактальной структуре.

Выполните указанное задание для

a) $G(x) = -\min(Bx, Cx + B - C)$, примите значения параметров $(B = 0.01, C = 1)$ или $(B = 0.5, C = 2)$

b) $G(x) = B\lvert x \rvert - 1$, примите значения параметров $B = 0.01$, $B = 0.5$ или $B = 1$

5.4.4. Модель электрической цепи с трилинейным активным элементом (Цепи Чуа см. номер журнала [27], специально посвященный исследованиям на эту тему.)

$$
\begin{aligned}
c_1\dot{V}_1 &= \frac{1}{r}(V_2 - V_1) - g(V_1)\,,\\
c_2\dot{V}_2 &= \frac{1}{r}(V_1 - V_2) - I\,,\\
L\dot{I} &= -V_2,
\end{aligned} \qquad (5.13)
$$

где $g(V_1) = m_0V - 1 + 0.5(m_1 - m_0)|V_1 + b| + 0.5(m_0 - m_1)|V_1 - b|$.

Зафиксируйте параметры $c_1 = 1/9, c_2 = 1, L = 1/7, m_0 = -0.5$, $m_1 = 0.8, b = 1$ и, изменяя параметр r от 0.2 до 0.6, найдите такие его значения, при которых происходят две первые бифуркации удвоения периода. Изучите хаотический режим системы (5.13) при $r = 0.7$.

5.4.5. Модель автогенератора хаотических колебаний на основе туннельного диода [15, с. 84]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= 2hx + y - gz,\\
\dot{y} &= -x,\\
\varepsilon\dot{z} &= x - f(z).
\end{aligned} \qquad (5.14)
$$

Здесь h, g положительные параметры, $\varepsilon > 0$ мало, а $f(z)$ характеристика нелинейного элемента.

При $\varepsilon = 0.2$ и $f(z) = 8.592z - 22z^2 + 14.408z^3$ (см. [15]) меняйте параметры h и g в пределах $0.06 < h < 0.15$, $0.75 < g < 0.95$. Фиксируя g и меняя h, получите две первые бифуркации удвоения. Численно исследуйте хаотические режимы системы (5.14).

5.4.6. Автогенератор хаотических колебаний с инерционной нелинейностью [15, с. 86]

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= mx + y - xz,\\
\dot{y} &= -x,\\
\dot{z} &= -gz + \theta(x)x^2.
\end{aligned} \qquad (5.15)
$$

5.4.7. Кольцевой генератор Дмитриева-Кислова [15, с. 88]

$$
\begin{aligned}
T\dot{x} &= -x + Mz\exp(-z^2),\\
\dot{y} &= x - y,\\
\dot{z} &= y - 0.1z.
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

Здесь T, M положительные параметры.

Фиксируя M в пределах от 2 до 8 и меняя $1 < g < 6$, получите две первые бифуркации удвоения. Численно исследуйте различные хаотические режимы системы (5.16).

Следующие две модели описывают динамику движений при электромагнитных взаимодействиях.

5.4.5. Вынужденные движения вращающегося диполя в магнитных полях (в частности, такая модель описывает поведение стрелки компаса в колебательном или вращательном магнитном поле).

$$
J\ddot{\theta} + \gamma\dot{\theta} + \varkappa\sin\theta = F_0\cos\theta\cos\omega t
\tag{5.17}
$$

Изучите процесс возникновения хаотических колебаний уравнения (5.17) при

a) $J = \varkappa = 1, \gamma = 0.5, F_0 = 3, 0.5 < \omega < 2.5$;

b) $J = \varkappa = 1, \gamma = 0.5, F_0 = 7, 0.1 < \omega < 2.5$.

5.4.6. Динамика частицы, движущейся в бегущем электрическом поле (такие же уравнения возникают при изучении вынужденных колебаний математического маятника).

$$
\begin{aligned}
X' &= Y,\\
Y' &= -\delta Y - \alpha X + g(kX - Z),\\
Z' &= \omega.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

Варианты для численного исследования:

a) $\alpha = 1, \delta = 0.01, g(kX - Z) = f\sin(X - Z), f = 2, 10 < \omega < 50$;

b) $\alpha = 1, \delta = 0.01, g(kX - Z) = f\cos(Z), f = 5, 10 < \omega < 50$;

Найти значения, при которых система (5.18) имеет хаотические колебания, и определить характеристики этих колебаний.

Задача 1. *На плоскости параметров α, β системы*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x - 2y + \alpha x(x^2 + y^2)\,, \\ \dot{y} &= x - y + \beta xy - y(x^2 + y^2)\,, \end{aligned} \tag{1.59}$$

построить область, для которой реализуется бифуркация Андронова-Хопфа.

Задача 2. *Определить положительные значения параметров системы Лоренца*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x)\,, \\ \dot{y} &= rx - y - xz\,, \\ \dot{z} &= -bz + xy, \end{aligned} \tag{1.60}$$

при которых происходит бифуркация Андронова-Хопфа.

$$\begin{aligned} z_1' &= \gamma_1 z_1 + (d_{11} z_1^2 + d_{12} z_2^2) z_1, \\ z_2' &= \gamma_2 z_2 + (d_{21} z_1^2 + d_{22} z_2^2) z_2, \end{aligned} \tag{1.65}$$

где $\gamma_j = (A_1 a_j, b_j)$, $d_{jk} = \big(F_3(a_j, a_k, a_k) + F_3(a_k, a_j, a_k) + F_3(a_k, a_k, a_j), b_j\big)$, $d_{jj} = \big(F_3(a_j, a_j, a_j), b_j\big)$, $j, k = 1, 2$, $j \neq k$. Отметим, что функции $z_j(\tau)$ в данном случае вещественные.

Задача 3. *Выделите класс ненулевых квадратичных нелинейностей $F_2(x, x)$, для которых нормальная форма задачи* (1.1), *с нулевым собственным числом кратности два, имеет вид* (1.65)

Задача 4. *В предположении, что $F_2(x, x) \neq 0$, выполните в* (1.1) *замену*

$$x = \varepsilon(z_1(\tau) a_1 + z_2(\tau) a_2) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{1.66}$$

С помощью замены (1.66) *решите следующие задачи:*

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).

2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

Задача 5. *В предположении, что $F_2(x, x) \neq 0$, выполните в* (1.1) *замену*

$$x = \varepsilon\big(z_1(\tau) a_1 + z_2(\tau) e^{i\omega t} a_2 + \bar{z}_2(\tau) e^{-i\omega t} \bar{a}_2\big) + \varepsilon^2 x_1(t, \tau) + \dots, \quad \tau = \varepsilon t. \tag{1.71}$$

С помощью замены (1.71) *решите следующие задачи:*

1. Постройте нормальную форму задачи (1.1).

2. Найдите состояния равновесия полученной нормальной формы и исследуйте их на устойчивость.

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + k_1\xi_1\xi_2\cos(\psi+\delta_1) + (b_{11}\xi_1^2 + b_{12}\xi_2^2)\xi_1, \\ \dot{\xi}_2 &= \gamma_{21}\xi_2 + k_2\xi_2\xi_1\cos(\psi-\delta_2) + (b_{21}\xi_1^2 + b_{22}\xi_2^2)\xi_2, \\ \dot{\psi}_1 &= \delta - 2k_1\xi_2\sin(\psi+\delta_1) - k_2\xi_2\sin(\psi-\delta_2) + c_1\xi_1^2 + c_2\xi_2^2, \end{aligned} \tag{1.99}$$

Задача 6. *Найти состояния равновесия системы* (1.99) *и исследовать их на устойчивость.*

Задача 7. *При фиксированных значениях параметров численно построить устойчивые траектории системы* (1.99).

Задача 8. *Изучить численными методами изменения фазового портрета системы* (1.99) *при изменении одного из ее параметров и фиксированных остальных.*

$$\begin{aligned} z_1' &= \alpha_1 z_1 + \beta_1 \bar{z}_1 z_2, \\ z_2' &= \alpha_2 z_2 + \beta_2 \bar{z}_1^2. \end{aligned} \tag{1.106}$$

Здесь $\alpha_1 = (A_1 a_1, b_1)$, $\alpha_2 = (A_1 a_2, b_2)$, $\beta_1 = \big(F_{20}(\bar{a}_1, a_2) + F_{20}(a_2, \bar{a}_1),\, b_1\big)$, $\beta_2 = \big(F_{20}(a_1, a_1),\, b_2\big)$.

Задача 9. *Изучить качественное поведение системы* (1.106) *при различных значениях входящих параметров.*

Задача 10. *Построить следующее по порядку малости приближение нормальной формы* (1.106).

Задача 11. *Докажите, что корни квазимногочлена* $\lambda + \dfrac{\pi}{2}e^{-\lambda}$ *лежат в левой комплексной полуплоскости за исключением одной пары* $\pm i\dfrac{\pi}{2}$.

Примерные темы рефератов:

1. Асимптотические методы малого параметра в задачах нейродинамики.
2. Метод большого параметра в задачах нейродинамики.
3. Уравнения с запаздыванием в экологических приложениях.
4. Асимптотические методы в исследовании динамики полупроводникового лазера.
5. Математические основы теории катастроф и детерминированного хаоса.
6. Детектирование хаотических режимов в динамике экономических рядов: методы и примеры их приложений.
7. Численные методы анализа цепочек и решеток осцилляторов.
8. Бифуркация голубого неба, теорема Шильникова
9. Энтропийные показатели массивов экспериментальных данных.
10. Вычисление инвариантных размерностных показателей.

11. Усреднение и задачи о маятниках с вибрационным воздействием.
12. Динамические системы близкие к гамильтоновым
13. Хаотическая «паутина» в системах близких к консервативным.

Критерии выставления оценки за реферат

Оценка «отлично»: выполнены все требования к написанию реферата: обозначена проблема и обоснована ее актуальность, сделан анализ различных точек зрения на рассматриваемую проблему и логично изложена собственная позиция; сформулированы выводы, тема раскрыта полностью, выдержан объем; соблюдены требования к внешнему оформлению.

Оценка «хорошо»: основные требования к реферату выполнены, но при этом допущены недочеты. В частности, имеются неточности в изложении материала; отсутствует логическая последовательность в суждениях; не выдержан объем реферата; имеются упущения в оформлении.

Оценка «удовлетворительно»: имеются существенные отступления от требований к реферированию. В частности: тема освещена лишь частично; допущены фактические ошибки в содержании реферата; отсутствуют выводы.

Оценка «неудовлетворительно»: тема реферата не раскрыта, обнаруживается существенное непонимание проблемы или реферат не представлен вовсе.

Тест для самопроверки по результатам освоения дисциплины

<u>Проверка сформированности компетенции ПК-1</u>

Задание 1. При каких α происходит бифуркация Андронова-Хопфа?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \varepsilon & 4 \\ -4 & \varepsilon \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \alpha x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:

А) $\alpha > 0$;
Б) $\alpha < 0$;
В) $\alpha = 0$.

Задание 2. При каких α происходит бифуркация Андронова-Хопфа?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2+\varepsilon & 1 \\ 5 & -2+\varepsilon \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \alpha x_1^3 \\ \alpha x_2^3 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:

А) $\alpha > 0$;
Б) $\alpha < 0$;
В) $\alpha = 0$.

Задание 3. Имеет ли задача периодические решения?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} x + e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:

А) имеет периодические решения;
Б) периодических решений нет.

Задание 4. Имеет ли задача периодические решения?

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x + e^{2it} \begin{pmatrix} 4+2i \\ 2i \end{pmatrix}.$$

Варианты ответов:
А) имеет периодические решения;
Б) периодических решений нет.

Правильные ответы

Вопрос №	Вариант ответа
1	Б
2	Б
3	Б
4	А

Каждый правильный ответ оценивается в 2 балла.
0 баллов – студент полностью неверно решил задачу
1 балл – студент верно решил задачу, но не привел пояснений к ходу решения или допустил одну вычислительную ошибку.
2 балла – студент полностью разобрался в решении задачи.

Набранное количество баллов 8 соответствует формированию проверяемой компетенции на высоком уровне, 7-6 баллов – на продвинутом уровне, 5-4 – на пороговом уровне, менее 4 баллов – ниже порогового уровня.

2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкалы оценивания

2.1. Шкала оценивания сформированности компетенций и ее описание

Оценивание уровня сформированности компетенций в процессе освоения дисциплины осуществляется по следующей трехуровневой шкале:
Пороговый уровень - предполагает отражение тех ожидаемых результатов, которые определяют минимальный набор знаний и (или) умений и (или) навыков, полученных аспирантом в результате освоения дисциплины. Пороговый уровень является обязательным уровнем для аспиранта к моменту завершения им освоения данной дисциплины.
Продвинутый уровень - предполагает способность аспиранта использовать знания, умения, навыки и (или) опыт деятельности, полученные при освоении дисциплины, для решения профессиональных задач. Продвинутый уровень превосходит пороговый уровень по нескольким существенным признакам.
Высокий уровень - предполагает способность аспиранта использовать потенциал интегрированных знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, полученных при освоении дисциплины, для творческого решения профессиональных задач и самостоятельного поиска новых подходов в их решении путем комбинирования и использования известных способов решения применительно к конкретным условиям. Высокий уровень превосходит пороговый уровень по всем существенным признакам.

2.2. Перечень компетенций, этапы их формирования, описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компе-тенции	Форма контроля	Этапы форми-рования (№ темы (раздела)	Показатели оценивания	Шкала и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования		
				Пороговый уровень	Продвинутый уровень	Высокий уровень
Профессиональные компетенции						
ПК-1	Самостоятельная работа №1, 2. Контрольная работа 1. Зачет.	1-9	**Знать:** общие принципы построения нормальных форм обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений, понятие метода усреднения. **Уметь:** пользоваться методом усреднения, находить нормальную форму системы обыкновенных дифференциальных или разностных уравнений второго порядка,	Знать общие принципы построения нормальных форм обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений	Уметь пользоваться методом нормальных форм для конечных систем. Знать общую теорию метода нормальных форм и теории усреднения.	Знать общую теорию метода нормальных форм и теории усреднения, уметь обосновать применимость метода к конкретным динамическим системам
	Самостоятельная работа №1, 2. Контрольная работа 2. Зачет.	10–16	**Знать:** идею метода квазинормальных форм Уметь: пользоваться методами большого параметра.	Уметь пользоваться методами большого параметра.	Уметь: пользоваться методом квазинормальных форм и методами большого параметра Уметь строить асимптотики релаксационных колебаний	Уметь обосновать применимость метода квазинормальных форм к конкретным динамическим системам, Уметь строить и обосновывать асимптотики релаксационных колебаний

3. Методические рекомендации преподавателю по процедуре оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

Целью процедуры оценивания является определение степени овладения аспирантом ожидаемыми результатами обучения (знаниями, умениями, навыками и (или) опытом деятельности).

Процедура оценивания степени овладения аспирантом ожидаемыми результатами обучения осуществляется с помощью методических материалов, представленных в разделе «Типовые контрольные задания или иные материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций»

3.1 Критерии оценивания степени овладения знаниями¸ умениями, навыками и (или) опытом деятельности, определяющие уровни сформированности компетенций

Пороговый уровень (общие характеристики):

- владение основным объемом знаний по программе дисциплины;
- знание основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы без существенных ошибок;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении стандартных (типовых) задач;
- способность самостоятельно применять типовые решения в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- знание базовых теорий, концепций и направлений по изучаемой дисциплине;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, периодическое участие в групповых обсуждениях, достаточный уровень культуры исполнения заданий.

Продвинутый уровень (общие характеристики):

- достаточно полные и систематизированные знания в объёме программы дисциплины;
- использование основной терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать выводы;
- владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в решении учебных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в базовых теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им сравнительную оценку;
- самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

Высокий уровень (общие характеристики):

- систематизированные, глубокие и полные знания по всем разделам дисциплины;

- точное использование терминологии данной области знаний, стилистически грамотное, логически правильное изложение ответа на вопросы, умение делать обоснованные выводы;
- безупречное владение инструментарием дисциплины, умение его использовать в постановке и решении научных и профессиональных задач;
- способность самостоятельно и творчески решать сложные задачи (проблемы) в рамках рабочей программы дисциплины;
- полное и глубокое усвоение основной и дополнительной литературы, рекомендованной рабочей программой дисциплины;
- умение ориентироваться в основных теориях, концепциях и направлениях по изучаемой дисциплине и давать им критическую оценку;
- активная самостоятельная работа на практических и лабораторных занятиях, творческое участие в групповых обсуждениях, высокий уровень культуры исполнения заданий.

3.2 Описание процедуры выставления оценки

В зависимости от уровня сформированности каждой компетенции по окончании освоения дисциплины аспиранту выставляется оценка. Для дисциплин, изучаемых в течение нескольких семестров, оценка может выставляться не только по окончании ее освоения, но и в промежуточных семестрах. Вид оценки («отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно», «зачтено», «незачтено») определяется рабочей программой дисциплины в соответствии с учебным планом.

Оценка «отлично» выставляется аспиранту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована на высоком уровне.

Оценка «хорошо» выставляется аспиранту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на продвинутом уровне.

Оценка «удовлетворительно» выставляется аспиранту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «неудовлетворительно» выставляется аспиранту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «зачет» выставляется аспиранту, у которого каждая компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована не ниже, чем на пороговом уровне.

Оценка «незачтено» выставляется аспиранту, у которого хотя бы одна компетенция (полностью или частично формируемая данной дисциплиной) сформирована ниже, чем на пороговом уровне.

Приложение № 2 к рабочей программе дисциплины
«Бифуркации векторных полей»

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов по дисциплине

В качестве учебно-методического обеспечения рекомендуется использовать литературу, указанную в разделе № 7 данной рабочей программы.

Методические указания для аспирантов по освоению дисциплины

Основной формой изложения учебного материала по дисциплине «Бифуркации векторных полей» являются лекции, причем в достаточно большом объеме. Это связано с тем, что в основе этой дисциплины лежит фундаментальный математический аппарат, с помощью которого решаются довольно сложные и громоздкие задачи. По большинству тем предусмотрены практические занятия, на которых происходит закрепление лекционного материала путем применения его к конкретным задачам и отработка практических навыков.

Для успешного освоения дисциплины очень важно решение достаточно большого количества задач, как в аудитории, так и самостоятельно в качестве домашних заданий. Примеры решения задач разбираются на лекциях и практических занятиях, при необходимости по наиболее трудным темам проводятся дополнительные консультации. Основная цель решения задач – помочь усвоить фундаментальные понятия и основы математического моделирования. Для решения всех задач необходимо знать и понимать лекционный материал. Поэтому в процессе изучения дисциплины рекомендуется регулярное повторение пройденного лекционного материала. Материал, законспектированный на лекциях, необходимо дома еще раз прорабатывать и при необходимости дополнять информацией, полученной на консультациях, практических занятиях или из учебной литературы.

Большое внимание должно быть уделено выполнению домашней работы. В качестве заданий для самостоятельной работы дома аспирантам предлагаются задачи, аналогичные разобранным на лекциях и практических занятиях или немного более сложные, которые являются результатом объединения нескольких базовых задач.

Для проверки и контроля усвоения теоретического материала, приобретенных практических навыков работы на основе современных методов и приемов математического моделирования, в течение обучения проводятся мероприятия текущей аттестации в виде контрольной работы и самостоятельных работ. Также проводятся консультации (при необходимости) по разбору заданий для самостоятельной работы, которые вызвали затруднения.

В конце семестра изучения дисциплины аспиранты сдают зачет. Этот зачет выставляется в соответствии с результатами тестирования и собеседования по вопросам по курсу. Во время подготовки к зачету предусмотрена групповая консультация.

Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы аспирантов по дисциплине

Для самостоятельной работы особенно рекомендуется использовать учебную литературу. Также для подбора учебной литературы рекомендуется использовать широкий спектр интернет-ресурсов:

1. Электронно-библиотечная система «Университетская библиотека online» (www.biblioclub.ru) - электронная библиотека, обеспечивающая доступ к наиболее востребованным материалам-первоисточникам, учебной, научной и художественной

литературе ведущих издательств (*регистрация в электронной библиотеке – только в сети университета. После регистрации работа с системой возможна с любой точки доступа в Internet.).
2. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (http://window.edu.ru/library).
Целью создания информационной системы "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" (ИС "Единое окно ") является обеспечение свободного доступа к интегральному каталогу образовательных интернет-ресурсов и к электронной библиотеке учебно-методических материалов для общего и профессионального образования.
Для самостоятельного подбора литературы в библиотеке ЯрГУ рекомендуется использовать:
1. Личный кабинет (http://lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_login.php) дает возможность получения on-line доступа к списку выданной в автоматизированном режиме литературы, просмотра и копирования электронных версий изданий сотрудников университета (учеб. и метод. пособия, тексты лекций и т.д.) Для работы в «Личном кабинете» необходимо зайти на сайт Научной библиотеки ЯрГУ с любой точки, имеющей доступ в Internet, в пункт меню «Электронный каталог»; пройти процедуру авторизации, выбрав вкладку «Авторизация», и заполнить представленные поля информации.
2. Электронная библиотека учебных материалов ЯрГУ (http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_cat_find.php) содержит более 2500 полных текстов учебных и учебно-методических материалов по основным изучаемым дисциплинам, изданных в университете. Доступ в сети университета, либо по логину/паролю.
3. Электронная картотека «Книгообеспеченность»

(http://www.lib.uniyar.ac.ru/opac/bk_bookreq_find.php) раскрывает учебный фонд научной библиотеки ЯрГУ, предоставляет оперативную информацию о состоянии книгообеспеченности дисциплин основной и дополнительной литературой, а также цикла дисциплин и специальностей. Электронная картотека «Книгообеспеченность» доступна в сети университета и через Личный кабинет.